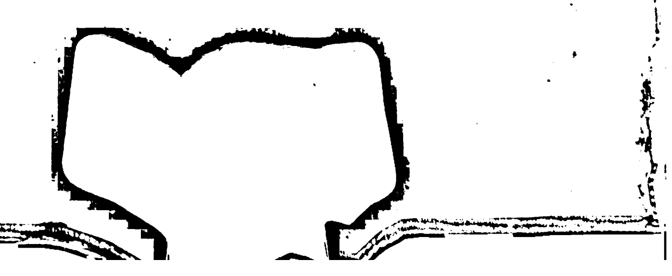






ABHANDLUNGEN

AUS DEM

GEBIETE DER TECHNISCHEN MECHANIK

VON

Dr.-Ing. OTTO MOHR
GEHEIMER RAT UND PROFESSOR.

MIT ZAHLREICHEN TEXTABBILDUNGEN.

BERLIN 1906
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN

VORWORT.

Das vorliegende Buch enthält in neuer Bearbeitung eine größere Anzahl von Aufsätzen aus dem Gebiete der angewandten Mechanik, die während einer langen Reihe von Jahren entstanden sind und in verschiedenen, zum Teil wenig verbreiteten Zeitschriften veröffentlicht wurden. Der Inhalt jener Aufsätze, der zum großen Teil bereits in die neueren Lehrbücher der technischen Mechanik und der Baumechanik übergegangen ist, wurde nicht wesentlich abgeändert und erweitert. Aber die Neuordnung und die Zusammenfassung zu zwölf gesonderten Abhandlungen gestattete es, das Zusammengehörige zu vereinigen, Wiederholungen zu vermeiden und auch die Darstellung zu vereinfachen.

Die zwölf Abhandlungen stehen vielfach miteinander in Zusammenhang; sie wurden daher so geordnet, daß überall nur auf Vorhergegangenes zu verweisen war.

Die zum Verständnis erforderlichen Vorkenntnisse sind sehr gering. Sie umfassen außer den Hauptsätzen der Elementarmechanik nur die niedere Mathematik und die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung. Die jungen Ingenieure des Bau- und Maschinenfaches werden also das Buch schon während ihres Studiums benutzen können.

Alle Abbildungen sind in den Text eingefügt worden, weil dadurch die Bequemlichkeit des Lesens wesentlich erhöht wird. Diese Rücksicht war auch maßgebend bei Auswahl der zur Erläuterung dienenden Beispiele. Die in den Originalaufsätzen vorkommenden Beispiele, welche zu ihrer Darstellung Zeichnungen von größeren Abmessungen erfordern, wurden daher durch andere ersetzt. Es

ist übrigens in Aussicht genommen, eine Sammlung von größeren, aus der Praxis zu entnehmenden Aufgaben und Beispielen für eine besondere Veröffentlichung zu bearbeiten.

Jeder Abhandlung wurden kurze literarische Notizen angefügt, die auf Vollständigkeit keinen Anspruch erheben können; es wurde jedoch überall angegeben, wo vollständigere Literaturnachweise zu finden sind.

Dresden, im Oktober 1905.

MOHR.

INHALT.

Seite

Seite

Abhandlung I.

Das Gleichgewicht und die unendlich kleinen Bewegungen eines starren Körpers.

1. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. Wenn ein starrer Körper unter der Einwirkung einer Kräftegruppe vom Ruhezustande aus sich in Bewegung setzt, so wird in jedem, also auch im *ersten* unendlich kleinen Zeitabschnitt der Bewegung dem Körper eine kinetische Energie erteilt, die gleich ist der algebraischen Summe der von den Kräften geleisteten Arbeiten. Eine Bewegung, bei der diese Arbeit gleich null ist, kann *nicht* entstehen, weil *jeder* Punkt des Körpers ruhen muß, wenn seine kinetische Energie gleich null ist. Hieraus folgt der Satz, welcher der Statik zugrunde liegt und das *Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten* genannt worden ist: *Ein ruhender Körper verbleibt in Ruhe, wenn bei jeder möglichen unendlich kleinen Bewegung die Arbeitsumme der auf ihn wirkenden Kräfte gleich null ist.*

Zwischen den Strecken, die einerseits die möglichen Gleichgewichtsgruppen, anderseits die möglichen Bewegungen eines starren Körpers darstellen, ergeben sich aus jenem Satze bemerkenswerte geometrische Beziehungen, die in allen Teilen der technischen Mechanik Anwendung finden und deshalb auf möglichst einfachem Wege hier abgeleitet werden sollen.

2. Achse und Strecke. Eine mit einem bestimmten *Sinne* behaftete Gerade heißt eine *Achse.* Mit jeder Geraden fallen also *zwei* Achsen zusammen, die dem Sinne nach einander entgegengesetzt sind. Der Sinn einer Achse wird in der Zeichnung durch einen Pfeil und bei der Bezeichnung mit zwei Buchstaben durch deren Aufeinanderfolge angegeben. Mit AB wird demnach die Achse bezeichnet, deren Sinn von A nach B zeigt.

Ein von zwei Punkten begrenzter und mit einem bestimmten Sinne behafteter Teil einer Geraden wird eine *Strecke* genannt. Der

Sinn der Strecke wird in derselben Weise bezeichnet wie der einer Achse. Wenn auf einer Achse eine Strecke dargestellt wird, so legt man der letzteren das positive oder das negative Vorzeichen bei, je nachdem ihr Sinn mit dem der Achse übereinstimmt oder ihm entgegengesetzt ist. Eine Strecke BA trägt sonach auf der Achse AB das *negative* Vorzeichen; sie hat in bezug auf diese Achse einen negativen Wert. Wir bezeichnen jede Achse mit einem *kleinen* Buchstaben und eine Strecke auf dieser Achse mit demselben *großen* Buchstaben. Die Strecke P liegt also auf der Achse p und hat einen positiven Wert, wenn sie den Sinn von p hat. Durch Strecken können verschiedenartige Größen dargestellt werden: Wege, Kräfte, Geschwindigkeiten, Drehungen, Bewegungsgrößen, Impulse usf. Für jede solche Darstellung ist der zugehörige Maßstab anzugeben.

Um die im folgenden auftretenden Beziehungen bequem ausdrücken und geometrisch darstellen zu können, legen wir jeder Achse *den Wert der unbenannten Zahl eins* bei. Erforderlichenfalls kann dieser Wert durch eine Strecke von der Größe der Längeneinheit und dem Sinne der Achse dargestellt werden.

3. Darstellung der Drehgeschwindigkeit eines starren Körpers. Die Drehung eines Körpers um eine Gerade AB erscheint einem Auge, welches in dieser Geraden sich befindet, verschieden, je nachdem es von A nach B oder von B nach A sieht. Die Drehung der Räder eines Wagens, der auf einem Wege von Süd nach Nord sich bewegt, erscheint einem Beobachter als eine *Rechts-* oder als eine *Links*drehung, je nachdem er rechts oder links vom Wege steht, je nachdem also der Sehstrahl den Sinn Ost-West oder den Sinn West-Ost hat. Die bezeichnete Drehbewegung ist demnach eine Rechtsdrehung in bezug auf die Achse OW und zugleich eine Linksdrehung in bezug auf die Achse WO. Die Zeiger einer Uhr drehen sich rechts in bezug auf die Achse, die mit dem von vorn auf das Zifferblatt gerichteten Sehstrahl zusammenfällt. Wir legen der *Rechts*drehung das *positive*, der *Links*drehung das *negative* Vorzeichen bei.

Der Bewegungszustand eines starren Körpers, der um eine feste Gerade AB sich dreht, kann für einen bestimmten Zeitpunkt durch eine Strecke CD auf der Drehachse AB unzweideutig dargestellt werden, wenn festgesetzt wird, daß die Drehung eine *Rechts*drehung in bezug auf den Sinn der Strecke CD sein soll, und daß die Länge CD in einem bestimmten Maßstabe, z. B.

$$1 \text{ cm} = 5 \text{ sek}^{-1}$$

die Größe der *Drehgeschwindigkeit* oder Winkelgeschwindigkeit im Zeitpunkte der Betrachtung angibt. In bezug auf die Achse AB ist sonach die Drehung negativ, wenn CD den Sinn BA hat. Die *Lage* der Strecke CD auf der Achse AB kommt bei dieser Darstellung *nicht* in Betracht: Die Strecke kann auf der Achse beliebig verschoben werden, ohne daß dadurch der dargestellte Bewegungszustand verändert wird.

4. Die Schubgeschwindigkeit einer Achse. Bei einer unendlich kleinen Bewegung eines starren Körpers durchlaufen die Punkte A, B, C . . . (Abb. 1), die auf einer mit dem Körper starr verbundenen Achse liegen, unendlich kleine Strecken *erster* Ordnung AA_1, BB_1, CC_1 . . ., deren Projektionen AA_2, BB_2, CC_2 . . . auf die Achse AB nur um unendlich kleine Größen *zweiter* Ordnung voneinander abweichen und daher nach Sinn und Größe einander gleich sind. Denn der Winkel φ, den die Richtungen der beiden Achsen AB, A_1B_1 bilden, ist unendlich klein, und sein Kosinus

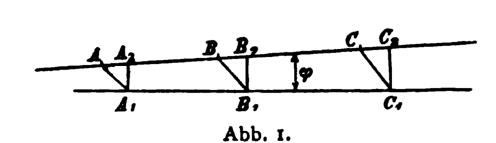


Abb. 1.

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \ldots$$

weicht daher nur um eine unendlich kleine Größe *zweiter* Ordnung von eins ab. Die Strecken

$$AA_2 = BB_2 = CC_2 = \ldots .$$

bezeichnen die *Verschiebung*, die der Achse AB in ihrer eigenen Richtung erteilt wird. Man bestimmt also die *Schubgeschwindigkeit* einer Achse AB, indem man die Länge jener unendlich kleinen Wegstrecken durch die unendlich kleine Zeitdauer der Bewegung dividiert, oder *indem man die Geschwindigkeit irgend eines Punktes der Achse auf die Achse projiziert.* Die Schubgeschwindigkeit ist negativ, wenn ihr Sinn dem der Achse entgegengesetzt ist. Die Maßeinheit der Schubgeschwindigkeiten stimmt mit der Einheit der Geschwindigkeiten überein und ist also 1 cm sek^{-1}.

5. Die Geschwindigkeitskugel und die Nullachsen eines Körperpunktes. Um die *gleichzeitigen* Schubgeschwindigkeiten aller Achsen, welche durch einen Körperpunkt A gehen, zu ermitteln, muß die Geschwindigkeit AA_0 des Punktes auf jede dieser Achsen projiziert werden. *Die Kugel vom Durchmesser AA_0 schneidet*

also auf jeder durch den Punkt A gehenden Achse eine Strecke AD (Abb. 2) *ab, deren Größe und Sinn die Schubgeschwindigkeit dieser Achse darstellt.* Diese *Geschwindigkeitskugel* des Körperpunktes A ist bestimmt, *wenn die Schubgeschwindigkeiten von drei Achsen, die durch A gehen und nicht in einer Ebene liegen, bekannt sind.* Denn durch den Punkt A und die drei Endpunkte der darstellenden Strecken läßt sich nur *eine* Kugel legen, *deren Durchmesser* AA_0 *die Geschwindigkeit des Punktes A bestimmt.* Die Achsen des Punktes A, deren Schubgeschwindigkeiten in dem Zeitpunkte der Betrachtung gleich null sind, bilden den Strahlenbüschel A der Ebene AE, welche die Geschwindigkeitskugel im Punkte A berührt. Diese Achsen werden die *Nullachsen* des Punktes A genannt und ihre Ebene AE heißt die *Nullebene* dieses Punktes. *Zwei* Nullachsen des Punktes A bestimmen seine Nullebene. Liegen *drei* Nullachsen eines Punktes nicht in einer Ebene, so ruht dieser Punkt zur Zeit der Betrachtung. Schneiden sich drei Nullachsen einer Ebene nicht in *einem*, sondern in *drei* Punkten A, B, C, so ist jeder Punkt D der Ebene ein Nullpunkt und jede ihrer Achsen eine Nullachse. Dieser Sonderfall tritt ein, wenn der Körper um eine ruhende Achse sich dreht, die in der Ebene ABC liegt.

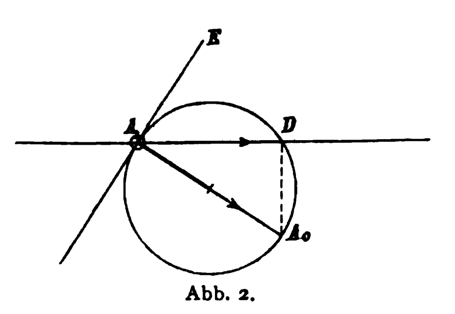


Abb. 2.

6. Das Moment zweier Achsen. AB und CD (Abb. 3 und 4) seien zwei starr miteinander verbundene Achsen, deren kürzester Abstand die Länge a hat. Um die Lage der beiden Achsen gegeneinander festzustellen, kann man den in der Zeichnung dargestellten Kreiszylinder vom Halbmesser a benutzen. In der *ersten* Lage (Abb. 3) fällt AB mit der Zylinderachse zusammen und zeigt nach *oben*, während die 'Achse CD den Zylinder *vorn* im Punkte F berührt. Die *zweite* Lage (Abb. 4) ergibt sich aus der ersten durch Vertauschung der beiden Achsen. Um die beiden Achsen aus der ersten Lage in die zweite überzuführen, erteilt man ihnen eine Parallelverschiebung, bei der F nach E und E nach G gelangt, darauf eine Linksdrehung um die Achse FG von der Größe des Winkels DFB und schließlich eine Drehung von 180° um die Zylinderachse. Man kann in beiden Lagen die vordere Achse

als den Minutenzeiger und die hintere Achse als den Stundenzeiger einer Uhr ansehen. Durch den Abstand a der beiden Zeiger voneinander und durch den Winkel α, der im Sinne der Uhrzeigerdrehung vom Stundenzeiger nach dem Minutenzeiger durchlaufen wird, ist die relative Lage der beiden Achsen gegeneinander voll-

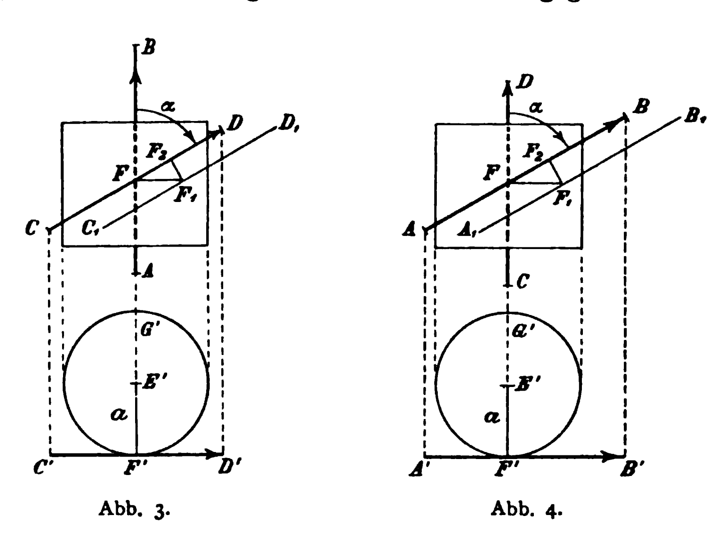


Abb. 3. Abb. 4.

kommen bestimmt. Wir nennen die Größe $a \sin \alpha$ das *Moment der beiden Achsen* und bezeichnen es mit $[AB, CD]$ oder $[CD, AB]$. Das Vorzeichen des Momentes wird durch den Sinus des Winkels α bestimmt. Es ist zu beachten, daß bei dieser Bezeichnung die Aufeinanderfolge der beiden Achsen gleichgültig ist. Das Moment ist gleich null, wenn die beiden Achsen in einer Ebene liegen.

7. Arbeitsgeschwindigkeit und statisches Moment einer Kraft. Wir bezeichnen eine der beiden Achsen AB, CD (Abb. 3 und 4) mit p, die andere mit q, lassen die Achse q auch dem Sinne nach mit der Zylinderachse zusammenfallen und erteilen dem Körper eine Drehgeschwindigkeit, welche durch die positive Strecke Q auf der Achse q dargestellt wird. Der Punkt F der Achse p durchläuft dann in der unendlich kleinen Zeit dt die unendlich kleine Wegstrecke

$$FF_1 = Q\,a\,dt$$

mit der Geschwindigkeit Qa. Die Projektion dieser Geschwindigkeit auf die Achse p hat die Größe

$$Qa \sin \alpha = Q\,[p,\, q].$$

Aendert sich das Vorzeichen der Strecke Q, so ändert sich zugleich der Sinn oder das Vorzeichen der Schubgeschwindigkeit der Achse p, die daher *das Moment der Strecke Q in bezug auf die Achse p* genannt und mit $[p, Q]$ oder $[Q, p]$ bezeichnet wird. Bei der Bestimmung dieser Größe

$$[p, Q] = Q\,[p, q] = Q\,a\ \sin\alpha \tag{1}$$

sind die Vorzeichen von Q und von $\sin\alpha$ zu berücksichtigen.

Wirkt auf den bewegten Körper eine Kraft, die nach Lage, Größe und Sinn durch die Strecke P auf der Achse p dargestellt wird, so nennt man das Produkt $P\,Q\,a\ \sin\alpha$ aus der Kraft P und der Schubgeschwindigkeit der Achse p *die Arbeitsgeschwindigkeit der Kraft P; sie bildet das Moment der beiden Strecken P, Q* und wird mit

$$[P, Q] = P\,Q\,[p, q] = P\,Q a\ \sin\alpha \tag{2}$$

bezeichnet. Die Maßeinheit dieser Größe ist 1 kg . cm . sek^{-1} und ihr Vorzeichen wird durch die Vorzeichen der *drei* Größen P, Q und $\sin\alpha$ bestimmt. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kraft P ist *positiv*, wenn die Kraft den Sinn der Schubgeschwindigkeit der Achse p hat.

Das *virtuelle Moment* oder das *statische Moment* der Kraft P in bezug auf die Achse q wird mit $[q, P]$ oder $[P, q]$ bezeichnet. Es entsteht aus der Arbeitsgeschwindigkeit $[P, Q]$, wenn man die Drehgeschwindigkeit Q durch die unbenannte Zahl $+ 1$, d. h. *durch den Wert der Achse q* ersetzt. Dieses Moment hat demnach die Größe

$$[q, P] = P\,[p, q] = P\,a\ \sin\alpha \tag{3}$$

und ihre Maßeinheit ist 1 kg. cm.

Die Verwandtschaft der Beziehungen zwischen den Kräften, die auf einen starren Körper wirken, einerseits und den unendlich kleinen Bewegungen eines solchen Körpers anderseits beruht darauf, daß in dem Begriffe der Arbeitsgeschwindigkeit $PQ\ [p, q]$ die beiden Grundbegriffe Kraft und Drehgeschwindigkeit in gleicher Form enthalten sind. Die beiden Begriffe der Schubgeschwindigkeit $Q\ [p, q]$ und des statischen Kraftmomentes $P\,[p, q]$, welche aus dem Begriffe der Arbeitsgeschwindigkeit abgeleitet werden können, indem entweder der Kraft P oder der Drehgeschwindigkeit Q der Wert $+ 1$ beigelegt wird, sind in jenen Beziehungen einander zugeordnet. *Einer jeden Eigenschaft, die in den geometrischen Gesetzen der Bewegung eines starren Körpers den Schubgeschwindigkeiten zukommt, steht in der Statik eine gleichlautende Eigenschaft der statischen Kraftmomente gegenüber.*

8. **Die Schubgeschwindigkeiten in den zusammengesetzten Bewegungen und die statischen Momente einer Kräftegruppe.** Einem starren Körper mögen *nacheinander* mehrere unendlich kleine Drehungen um feste Achsen $q_1, q_2, q_3 \ldots$ erteilt werden. Hierbei beschreibt der Körperpunkt A ein unendlich kleines Polygon $ABCDE$ im Raume (Abb. 5). Bei der ersten Drehung gelangt der Punkt von A nach B, bei der zweiten von B nach C usf. Die resultierende Wegstrecke AE bildet die *geometrische Summe* der Strecken, die der Punkt A bei der ersten Drehung, der Punkt B bei der zweiten usf. beschreibt. Da die Abstände der Punkte $A, B, C \ldots$ unendlich kleine Größen *erster* Ordnung sind, so weichen die Richtungen und die Größen der von allen diesen Punkten bei einer unendlich kleinen Drehung beschriebenen Wegstrecken nur um unendlich kleine Größen *zweiter* Ordnung voneinander ab, d. h. diese Strecken sind gleich gerichtet und gleich groß. Das Polygon $ABCDE$ entsteht also auch, indem man die Wegstrecken geometrisch summiert, die der Punkt A *von seiner ursprünglichen Lage aus* bei jeder einzelnen Drehung durchaufen würde. Die Ortsänderung ist demnach *unabhängig von der Reihenfolge* der unendlich kleinen Drehungen und bleibt auch dieselbe, wenn die Drehungen nicht nacheinander, sondern *gleichzeitig* ausgeführt werden. *Die hierbei entstehende resultierende Geschwindigkeit eines Körperpunktes A bildet die geometrische Summe der Geschwindigkeiten, die der Punkt bei jeder einzelnen Drehung annehmen würde.* Hieraus folgt, *daß die bei den Einzeldrehungen entstehenden Schubgeschwindigkeiten einer Achse p bei gleichzeitiger Ausführung der Drehungen sich algebraisch summieren*, d. h. es ist:

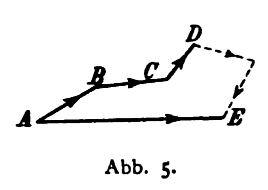


Abb. 5.

$$[p, (Q)] = [p, Q_1] + [p, Q_2] + [p, Q_3] + \ldots, \qquad (4)$$

wenn (Q) die *Gruppe* der Drehgeschwindigkeitsstrecken $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ bezeichnet, durch welche die zusammengesetzte Bewegung des Körpers gebildet wird.

In gleicher Weise bildet sich das statische Moment der aus den Kräften $P_1, P_2, P_3 \ldots$ bestehenden Kräftegruppe (P) in bezug auf eine Achse q durch *algebraische* Summierung der Einzelmomente:

$$[q, (P)] = [q, P_1] + [q, P_2] + [q, P_3] + \ldots \qquad (5)$$

9. **Die Momentenstrecken einer Gruppe von Kräften, die auf einen starren Körper wirken.** Das statische Moment

$[q, (P)]$ der Kräftegruppe (P) in bezug auf die Achse q wird dargestellt durch eine Strecke Q auf der Achse q. Die Länge von Q bestimmt in dem gewählten Momentenmaßstabe die Größe des Momentes, und der Sinn von Q bezeichnet den Sehstrahl, für den das Moment *rechts*drehend erscheint. Indem man die im Abschnitt 5 beschriebenen Eigenschaften der Schubgeschwindigkeiten auf die Kraftmomente überträgt, ergeben sich die folgenden Beziehungen:

Trägt man von einem Punkte A aus auf jeder durch A gehenden Achse q die Strecke

$$Q = [q, (P)] = A D$$

(Abb. 2) auf, die nach Größe und Sinn das statische Moment der Kräftegruppe darstellt, so liegen die Endpunkte D aller dieser Momentenstrecken auf einer Kugel, der *Momentenkugel des Punktes A.* Dem von dem Kugeldurchmesser $A A_0$ dargestellten *Hauptmoment des Punktes A* entspricht bei der unendlich kleinen Bewegung des Körpers, die von der Streckengruppe (P) dargestellt werden kann, die *Geschwindigkeit* des Punktes A.

Die Achsen $A E$ des Punktes A, deren Kraftmomente gleich null sind, bilden den Strahlenbüschel der Ebene, welche die Momentenkugel im Punkte A berührt.

Zwei Nullachsen des Punktes A bestimmen seine Nullebene.

Liegen *drei* Nullachsen des Punktes A nicht in einer Ebene, so sind alle durch A gehende Achsen Nullachsen und A ist der Nullpunkt einer jeden durch ihn gelegten Ebene.

Schneiden sich drei Nullachsen einer Ebene nicht in *einem*, sondern in *drei* Punkten, so ist jede Achse der Ebene eine Nullachse der Kräftegruppe (P). Bei diesen Beziehungen kommt die Lage der Kräfte auf ihren Achsen, also die Lage der *Angriffspunkte nicht* in Betracht. Die Angriffspunkte können auf den Kraftachsen beliebig verschoben werden, ohne daß dadurch die statischen Momente geändert werden.

10. Gleichwertige Streckengruppen. Man nennt zwei Streckengruppen (Q), (S), welche gleichzeitige Drehgeschwindigkeiten eines starren Körpers darstellen, *gleichwertig,* wenn sie denselben Bewegungszustand des Körpers bestimmen, wenn also die beiden Bewegungen einer jeden mit dem Körper starr verbundenen Achse u dieselbe Schubgeschwindigkeit

$$[u, (Q)] = [u, (S)] \tag{6}$$

erteilen. Dann sind auch die Geschwindigkeiten eines jeden Körper-

punktes in beiden Bewegungen nach Größe, Richtung und Sinn einander gleich. Diese Eigenschaft soll durch das Zeichen

$$(Q) \equiv (S) \tag{7}$$

dargestellt werden.

Ebenso nennt man zwei *Kräftegruppen* (P), (R), die auf einen starren Körper einwirken, gleichwertig

$$(P) \equiv (R), \tag{8}$$

wenn für jede Achse u die beiden statischen Momente der Gruppen gleich groß sind:

$$[u, (P)] = [u, (R)].$$

11. Die Koordinaten einer Streckengruppe. *Drei* Körperpunkte A, B, C, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmen die *Lage* eines starren Körpers. Daher bestimmen in jedem Zeitpunkte die Geschwindigkeiten von A, B, C die gleichzeitigen Geschwindigkeiten aller anderen Körperpunkte. Der Bewegungszustand eines starren Körpers, d. h. die Gesamtheit der gleichzeitigen Geschwindigkeiten aller Körperpunkte, ist folglich gegeben, *wenn die Schubgeschwindigkeiten der sechs Kanten irgend eines mit dem Körper starr verbundenen Tetraeders $ABCD$ bekannt sind.* Sie sind *hinreichend*, aber auch *erforderlich*, um die Geschwindigkeitskugeln der drei Körperpunkte A, B, C zu bilden. Die Schubgeschwindigkeiten der drei Achsen DA, DB, DC bestimmen ferner die Geschwindigkeitskugel des vierten Körperpunktes D, und da von den vier Achsen EA, EB, EC, ED, die irgend einen fünften Körperpunkt E mit den vier Tetraederecken verbinden, in jedem Falle mindestens *drei* nicht in einer Ebene liegen, so kann auch die Geschwindigkeitskugel E gebildet werden aus den Schubgeschwindigkeiten jener vier Achsen, welche durch die vier Geschwindigkeitskugeln A, B, C, D gegeben sind. *Demnach sind zwei Gruppen (Q), (S) von Drehgeschwindigkeiten gleichwertig, wenn sie einer jeden der sechs Kanten des Tetraeders gleiche Schubgeschwindigkeiten erteilen.*

Ebenso sind zwei Kräftegruppen (P), (R), die auf einen starren Körper einwirken, *gleichwertig, wenn in bezug auf jede der sechs Tetraederkanten die beiden statischen Momente der Kräftegruppen gleich groß sind.* Die Form und die Lage des mit dem Körper starr verbundenen Tetraeders können willkürlich gewählt werden. Für analytische Untersuchungen eignet sich am besten ein unendlich großes Tetraeder, welches von drei rechtwinkligen Koordinatenebenen und der unendlich fernen Ebene begrenzt wird. Für die geometrische

Darstellung ist dagegen ein Tetraeder von *endlichen* Abmessungen vorzuziehen. Wir benutzen in der Regel ein Tetraeder von der in den Abb. 6 und 7 dargestellten Form. Die mit den Tetraederkanten AB, AC, AD, CD, DB, BC *auch dem Sinne nach* zusammenfallenden Achsen sind in vorstehender Reihenfolge mit x, y, z, x', y', z' bezeichnet. Die drei Tetraederkanten AB, AC, AD stehen rechtwinklig aufeinander und haben gleiche Längen, nämlich $\sqrt{2}$ Längeneinheiten, also 1,414 cm.

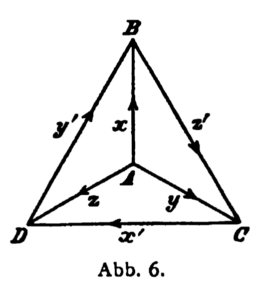


Abb. 6.

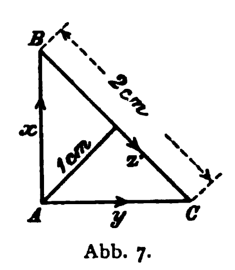


Abb. 7.

Demnach sind die Kanten CD, DB, BC 2 cm lang, und der kürzeste Abstand der zueinander rechtwinklig gerichteten Achsen x und x', y und y', z und z' beträgt 1 cm. Der Sinn der Achsen wurde so gewählt, daß die drei Momente $[x, x']$, $[y, y']$, $[z, z']$ den Wert $+$ 1 cm annehmen. Es ist zu beachten, daß die Momente aller übrigen Achsenpaare, z. B.: $[x, y]$, $[x, z]$, $[x, y']$ . . . gleich null sind, weil die beiden Achsen in einer Ebene liegen. Daher hat eine Gruppe (K), welche aus den sechs Strecken X, Y, Z, X', Y', Z' besteht, in bezug auf die Achsen x, y, z, x', y', z' die Momente:

$$\left.\begin{array}{ll} [x, (K)] = [x, X'] = X' \cdot 1\text{ cm}, & [y, (K)] = [y, Y'] = Y' \cdot 1\text{ cm} \\ [z, (K)] = [z, Z'] = Z' \cdot 1\text{ cm}, & [x' (K)] = [x', X] = X \cdot 1\text{ cm} \\ [y', (K)] = [y', Y] = Y \cdot 1\text{ cm}, & [z', (K)] = [z', Z] = Z \cdot 1\text{ cm} \end{array}\right\} \quad (9)$$

Die Gruppe (K) ist gleichwertig der gegebenen Streckengruppe (Q):

$$(K) \equiv (Q),$$

wenn die sechs Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{lll} [x, (K)] = [x, (Q)], & [y, (K)] = [y, (Q)], & [z, (K)] = [z, (Q)] \\ [x', (K)] = [x', (Q)], & [y', (K)] = [y', (Q)], & [z', (K)] = [z', (Q)] \end{array}\right\} \quad (10)$$

erfüllt sind. Die Strecken der Gruppe (K) erhalten demnach die Werte:

$$\left.\begin{array}{lll} X' = \dfrac{[x, (Q)]}{1\text{ cm}}, & Y' = \dfrac{[y, (Q)]}{1\text{ cm}}, & Z' = \dfrac{[z, (Q)]}{1\text{ cm}} \\ X = \dfrac{[x', (Q)]}{1\text{ cm}}, & Y = \dfrac{[y', (Q)]}{1\text{ cm}}, & Z = \dfrac{[z', (Q)]}{1\text{ cm}} \end{array}\right\} \quad (11)$$

Die sechs Strecken X, Y, Z, X', Y', Z' auf den Tetraederkanten x, y, z, x', y', z' heißen die *tetraedrischen Koordinaten* der Streckengruppe (Q). Sie sind selbstverständlich gleichartig den Strecken der Gruppe (Q), sie bezeichnen also gleichzeitige Drehgeschwindigkeiten um die Tetraederkanten, wenn die Streckengruppe (Q) eine unendlich kleine Bewegung des starren Körpers darstellt, und sie bezeichnen Kräfte, wenn (Q) eine Gruppe von Kräften bildet, die auf den starren Körper einwirken.

Zwei gleichartige Streckengruppen (P) und (R) sind nach dem Vorstehenden gleichwertig, wenn sie in bezug auf ein und dasselbe Tetraeder gleiche Koordinaten haben, oder, was dasselbe ist, wenn sie einer und derselben Koordinatengruppe (K) gleichwertig sind.

12. Die Arbeitsgeschwindigkeit einer Kräftegruppe. Auf einen starren Körper, dem in einem gegebenen Zeitpunkte die Bewegung (Q), d. h. eine Gruppe gegebener Drehgeschwindigkeiten erteilt wird, möge eine gegebene Kräftegruppe (P) einwirken. Unter Arbeitsgeschwindigkeit der Gruppe (P) versteht man die algebraische Summe der Arbeitsgeschwindigkeiten der Einzelkräfte. Sie bildet das Moment der beiden Streckengruppen (P), (Q) und wird daher mit $[(P), (Q)]$ bezeichnet. Wir bezeichnen ferner mit X, Y, Z, X', Y', Z' die Koordinaten der Bewegung (Q) und mit X_1, Y_1, Z_1, X_1', Y_1', Z_1' die Koordinaten der Kräftegruppe (P). Eine Einzelkraft P hat bei der Bewegung (Q) die Schubgeschwindigkeit

$$[p, (Q)] = [p, X] + [p, Y] + [p, Z] + [p, X'] + [p, Y'] + [p, Z']$$

und also eine Arbeitsgeschwindigkeit von der Größe $P\,[p, (Q)]$. Beachtet man, daß

$$P\,[p, X] = PX\,[p, x] = X\,[x, P]$$
$$P\,[p, Y] = PY\,[p, y] = Y\,[y, P]$$

usf. ist, so folgt:

$$P\,[p, (Q)] = X\,[x, P] + Y\,[y, P] + Z\,[z, P] + X'\,[x', P] + Y'\,[y', P] + Z'\,[z', P]$$

Bildet man nach dieser Formel die Arbeitsgeschwindigkeiten der Einzelkräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$, aus welchen die Gruppe (P) besteht, und berücksichtigt, daß die statischen Momente der Kräftegruppe (P) durch die Gleichungen

$$[x, (P)] = [x, P_1] + [x, P_2] + \ldots = 1\ \text{cm} \cdot X_1'$$
$$[y, (P)] = [y, P_1] + [y, P_2] + \ldots = 1\ \text{cm} \cdot Y_1'$$

usf. bestimmt werden, so ergibt sich für die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräftegruppe (P) der Wert:

$$[(P), (Q)] = 1 \text{ cm} (X X'_1 + Y Y'_1 + Z Z'_1 + X' X_1 + Y' Y_1 + Z' Z_1). \quad (12)$$

Diese Gleichung zeigt, *daß gleichwertige Kräftegruppen bei gleichwertigen Bewegungen gleiche Arbeitsgeschwindigkeiten haben.*

Nach Gleichung (12) kann jedes Moment durch die Koordinaten der das Moment bildenden Achsen und Strecken ausgedrückt werden.

13. Die rechtwinkligen Projektionen gleichwertiger Streckengruppen auf eine Ebene und auf eine Achse. Wir bezeichnen mit (P_1), (Q_1) die rechtwinkligen Projektionen von zwei gleichwertigen Gruppen (P), (Q) auf eine Ebene α und wählen ein Koordinatentetraeder $ABCD$, dessen Kanten CD, DB, BC oder x', y', z' in der Ebene α liegen, während die Kanten AB, AC, AD oder x, y, z zu α rechtwinklig gerichtet sind, also in dem unendlich fernen Punkt A sich schneiden. In bezug auf jede der Achsen x, y, z ist das Moment einer Strecke P gleich dem Moment ihrer Projektion P_1; daher sind in bezug auf jede dieser drei Achsen die Momente der vier Streckengruppen (P), (Q), (P_1), (Q_1) gleich groß. Ferner sind in bezug auf jede der drei Achsen x', y', z' die Momente der beiden Streckengruppen (P_1), (Q_1) gleich null. Es folgt hieraus, *daß die rechtwinkligen Projektionen von gleichwertigen Streckengruppen gleichwertig sind:*

$$(P_1) \equiv (Q_1).$$

Erteilt man ferner einem starren Körper in der Richtung irgend einer Achse v eine Parallelverschiebung von der Geschwindigkeit V, so ist die Arbeitsgeschwindigkeit einer auf den Körper wirkenden Kräftegruppe (P) gleich dem Produkt aus der Geschwindigkeit V und der algebraischen Summe der Projektionen der Kräfte P auf die Achse v. *Gleichwertige Kräftegruppen haben daher in bezug auf jede Achse gleiche Projektionen.*

Indem man diese Eigenschaft auch auf Drehungsgruppen überträgt, ergibt sich: *Gleichwertige Streckengruppen haben gleiche Projektionen in bezug auf jede Achse und folglich auch gleiche geometrische Summen.* Daß die beiden gleichartigen Streckengruppen (Q) und (S) dieselbe geometrische Summe G haben, soll in der Folge durch das Zeichen:

$$(Q) \mathrel{\overline{\overline{=}}} (S) \mathrel{\overline{\overline{=}}} G \quad (13)$$

ausgedrückt werden. Um die geometrische Summe G zu bestimmen, bildet man die Projektionen der sechs Koordinaten auf die zueinander rechtwinklig gerichteten Achsen x, y, z:

$$G_x = X + (Y' - Z')\sqrt{\frac{1}{2}}$$
$$G_y = Y + (Z' - X')\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad (14)$$
$$G_z = Z + (X' - Y')\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Die Länge der geometrischen Summe ergibt sich dann aus der Formel:

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2} \qquad (15)$$

14. Die Koordinaten einer Strecke und einer Achse. Eine Kraft P leistet keine Arbeit, wenn der Körper, auf den sie wirkt, um die ruhende Achse p sich dreht. Die Koordinaten einer Strecke P, mag dieselbe eine Kraft oder eine Drehgeschwindigkeit darstellen, sind daher nach Gleichung 12) voneinander abhängig durch die Bedingung:

$$[P, P] = 2 \text{ cm } (X X' + Y Y' + Z Z') = 0$$

oder (16)

$$X X' + Y Y' + Z Z' = 0$$

Eine Strecke P wird demnach durch fünf Koordinaten X, Y, Z, X', Y' bestimmt; die sechste ergibt sich aus der Gleichung:

$$Z' = -\frac{X X' + Y Y'}{Z} \qquad (17)$$

Dividiert man die Koordinaten der Strecke P durch den Wert von P, so entstehen die *sechs unbenannten Zahlenwerte:*

$$\frac{X}{P} = x, \quad \frac{Y}{P} = y, \quad \frac{Z}{P} = z, \quad \frac{X'}{P} = x', \quad \frac{Y'}{P} = y', \quad \frac{Z'}{P} = z' \qquad (18)$$

welche die Koordinaten einer Strecke auf der Achse p von dem Werte

$$\frac{P}{P} = +1$$

bilden und in Uebereinstimmung mit Abschnitt 2 *die Koordinaten der Achse p* genannt werden. Die sechs Koordinaten einer Achse sind durch *zwei* Bedingungen voneinander abhängig. Da sie eine Einzelstrecke darstellen, so ist nach Gleichung 16):

$$x x' + y y' + z z' = 0 \qquad (19)$$

und da ihre geometrische Summe gleich $+1$ ist, so muß nach den Gleichungen 14) und 15)

$$\left(x + (y' - z')\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(y + (z' - x')\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(z + (x' - y')\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1 \qquad (20)$$

sein.

15. Kräftepaare und Drehungspaare. Wenn die geometrische Summe einer Streckengruppe gleich null ist, so müssen ihre sechs Koordinaten nach den Gleichungen 14) die drei Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} X + (Y' - Z')\sqrt{\frac{1}{2}} = 0 \\ Y + (Z' - X')\sqrt{\frac{1}{2}} = 0 \\ Z + (X' - Y')\sqrt{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

erfüllen. Eine solche Streckengruppe wird also durch *drei* von diesen Bedingungen unabhängige Koordinaten bestimmt. Wenn wir von dem Sonderfalle, in dem jede der sechs Koordinaten gleich null ist, hier vorläufig absehen, so ist die Streckengruppe gleichwertig einer Einzelstrecke U, weil die Bedingung 16) in den Gleichungen 21) enthalten ist. Die Größe der Strecke U ist *gleich null*, ihre Entfernung aber ist *unendlich groß*, weil ihre Momente, z. B. in bezug auf die Koordinatenachsen, endliche Werte haben. Man nennt U daher eine *unendlich kleine* und *unendlich ferne* Strecke. Eine solche Gruppe von *Drehgeschwindigkeiten* bestimmt die einfachste Bewegung, die einem Körper erteilt werden kann: die Drehung um eine unendlich ferne Achse u, also eine *Parallelverschiebung*, bei der alle Körperpunkte Geschwindigkeiten V von gleicher Größe und gleicher Richtung haben. Die Richtung der Geschwindigkeit V ist rechtwinklig zu den Parallelebenen, die in der unendlich fernen Drehachse u sich schneiden. Größe und Richtung der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit V können bestimmt werden durch die Geschwindigkeitskugel *einer* Tetraederecke, also z. B. durch die Schubgeschwindigkeiten $X' \cdot 1$ cm, $Y' \cdot 1$ cm, $Z' \cdot 1$ cm der in der Ecke A sich schneidenden Achsen x, y, z. Werden die Projektionen von V auf die Achsen x, y, z mit V_x, V_y, V_z bezeichnet, so ist demnach

$$\left.\begin{aligned} V_x = X' \cdot 1 \text{ cm} \\ V_y = Y' \cdot 1 \text{ cm} \\ V_z = Z' \cdot 1 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

$$V = 1\,\mathrm{cm}\,\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} \qquad (23)$$

Die unendlich kleine und unendlich ferne Strecke U ist gleichwertig einer unendlich großen Anzahl von Streckengruppen (Q), die aus je zwei Strecken Q_1, Q_2 bestehen und folgende drei Bedingungen erfüllen:

1) Die beiden Strecken müssen in einer der Parallelebenen liegen, die in der unendlich fernen Achse u sich schneiden, weil alle Achsen dieser Ebenen Nullachsen sind.

2) Die beiden Strecken Q_1, Q_2 müssen nach Größe und Richtung einander gleich, dem *Sinne* nach einander entgegengesetzt sein, weil ihre geometrische Summe gleich null ist.

3) Jede zu jenen Parallelebenen normal gerichtete Achse v von dem Sinne der Geschwindigkeit V muß eine positive Schubgeschwindigkeit von der Größe

$$[v, Q_1] + [v, Q_2] = V$$

haben, denn diese Schubgeschwindigkeit stimmt mit der Geschwindigkeit der Körperpunkte überein. Die angegebene Größe ist gleich dem Produkt aus dem gemeinschaftlichen Wert der beiden gleich großen Strecken Q_1, Q_2 und ihrem Abstande voneinander.

Zwei parallele Strecken von gleicher Größe und entgegengesetztem Sinn werden ein *Streckenpaar*, also ein *Kräftepaar* oder ein *Drehungspaar* genannt, je nachdem die Strecken Q_1, Q_2 Kräfte oder Drehgeschwindigkeiten darstellen.

Ein *Kräftepaar* P_1, P_2 ist also gleichwertig einer unendlich kleinen und unendlich fernen Kraft U in der Ebene des Paares. Die Hauptmomentenstrecke des Paares ist für jeden Punkt rechtwinklig zu dieser Ebene gerichtet, hat die Größe $P_1 h$, wenn mit h der Abstand zwischen beiden Kräften bezeichnet wird, und den Sinn des Sehstrahls, für den der Drehsinn des Paares mit dem Sinne der Uhrzeigerdrehung übereinstimmt.

Die Arbeitsgeschwindigkeit eines jeden Kräftepaares U_1 ist bei jeder Parallelverschiebung U_2 gleich null:

$$[U_1, U_2] = 0,$$

weil die positive Arbeit der einen Kraft ebenso groß ist wie die negative der anderen.

16. Nullwertige Streckengruppen oder Gleichgewichtsgruppen. Der im vorigen Abschnitt erwähnte Sonderfall, in dem alle sechs Koordinaten einer Streckengruppe (Q) gleich null sind, bezeichnet, wenn die Strecken Drehgeschwindigkeiten darstellen, den

Ruhezustand des Körpers. Denn sind die Schubgeschwindigkeiten der sechs Kanten des Koordinatentetraeders gleich null, so ruhen die Ecken des Tetraeders und folglich auch alle anderen Körperpunkte. Bezeichnen die Strecken der Gruppe *Kräfte,* die auf einen ruhenden Körper einwirken, so verbleibt der Körper in Ruhe, weil der Gleichung (12) zufolge die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräftegruppe bei jeder unendlich kleinen Anfangsbewegung gleich null sein würde. Man sagt, der Körper befinde sich unter Einwirkung der Kräfte im *Gleichgewicht* und nennt daher eine solche Kräftegruppe eine *Gleichgewichtsgruppe* oder eine *nullwertige* Gruppe. Die letztere Bezeichnung kann auch auf Gruppen von Drehgeschwindigkeiten angewandt werden.

Daß die Strecken P_1, P_2, P_3 . . . eine nullwertige Gruppe bilden, soll in der Folge durch das Zeichen:

$$(P) \equiv P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger \ldots \equiv 0 \tag{24}$$

ausgedrückt werden. Wir bezeichnen die Koordinaten der Achsen p_1, p_2, p_3 . . . der Strecken P_1, P_2, P_3 . . . mit x, y, z, x', y', z' unter Anfügung der Streckennummer. Das Moment der Strecke P_1 in bezug auf die Koordinatenachse x ist daher z. B.:

$$[x, P_1] = P_1\,[x, p_1] = P_1\,x'_1 \cdot 1 \text{ cm}.$$

Die sechs Nullwertigkeitsbedingungen lauten demnach:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = X = P_1\,x'_1 + P_2\,x'_2 + P_3\,x'_3 + \ldots = \Sigma\,P\,x' \\ 0 = \Sigma\,P\,y' = \Sigma\,P\,z' = \Sigma\,P\,x = \Sigma\,P\,y = \Sigma\,P\,z. \end{array}\right\} \tag{25}$$

Eine Strecke, die nach Lage und Größe mit P_1 übereinstimmt, dem *Sinne* nach aber ihr entgegengesetzt ist, soll mit $+\!\!+ P_1$ bezeichnet werden.

Zerlegt man eine nullwertige Gruppe

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \ddagger P_5 \equiv 0$$

in zwei beliebige Teilgruppen, z. B.: P_1, P_2, P_3 und P_4, P_5, und wendet den Sinn der Strecken *einer* der beiden Gruppen, so entstehen zwei *gleichwertige* Gruppen:

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \equiv +\!\!+ P_4 +\!\!+ P_5.$$

Denn die Bedingung der Gleichwertigkeit dieser beiden Gruppen:

$$P_1\,x_1 + P_2\,x_2 + P_3\,x_3 = -\,P_4\,x_4 - P_5\,x_5$$

stimmt für jede Achse x' überein mit der Bedingung der Nullwertigkeit der ganzen Gruppe.

Die rechtwinklige Projektion (Q) einer nullwertigen Streckengruppe (P) auf irgend eine Ebene α bildet wieder eine nullwertige Gruppe. Denn bezieht man die Bedingungen der Nullwertigkeit

auf sechs Achsen, von denen drei in der Ebene α liegen und drei zu ihr senkrecht gerichtet sind, so sind die Bedingungen der Nullwertigkeit der Gruppe (Q) in denen der Gruppe (P) enthalten. Die *geometrische Summe* einer nullwertigen Streckengruppe hat die Größe null, wie unmittelbar aus den Gleichungen (14) hervorgeht.

17. Die möglichen Lagen der Strecken einer nullwertigen Gruppe. Das Moment, welches von der nullwertigen Gruppe (P) mit irgend einer anderen Gruppe (Q) oder mit irgend einer Einzelstrecke R gebildet wird, hat die Größe null:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= P_1\,[p_1, (Q)] + P_2\,[p_2, (Q)] + \ldots + P_n\,[p_n\,(Q)] \\ 0 &= P_1\,[p_1, R] + P_2\,[p_2, R] + \ldots + P_n\,[p_n, R] \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Sind von den n Achsen der Gruppe (P) die Achsen $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$ Nullachsen der Gruppe (Q) oder der Einzelstrecke R, so muß, wie aus den vorstehenden Gleichungen folgt, auch die Achse p_n zu diesen Nullachsen gehören. *Die Achse p_n muß also Nullachse einer jeden Streckengruppe sein, zu deren Nullachsen die $(n-1)$ anderen Achsen $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$ gehören, und sie muß jede Achse r schneiden, die von den anderen $(n-1)$ Achsen der Gruppe (P) geschnitten wird.*

Durch diese Bedingungen ist jede der n Achsen einer nullwertigen Streckengruppe *abhängig* von den übrigen $(n-1)$ Achsen. *Achsen, welche voneinander unabhängig sind, können nicht die Träger einer nullwertigen Streckengruppe sein.* Wir nennen als Beispiel einer Gruppe von unabhängigen Achsen die sechs Kanten eines Tetraeders: Jede Strecke dieser sechs Achsen muß gleich null sein, wenn die Gruppe nullwertig sein soll. Die vorstehende Betrachtung führt zu der folgenden Aufgabe: Gegeben sind $(n-1)$ voneinander unabhängige Achsen $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$; es sollen die Lagen der Achsen p_n angegeben werden, welche die Bildung der nullwertigen Gruppe

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger \ldots \ddagger P_n \equiv 0$$

ermöglichen. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe ergibt sich aus der folgenden Betrachtung. Den sechs Bedingungen der Nullwertigkeit kann man nach Gleichung (25) die Form geben:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_1 + \frac{P_2}{P_1}\,x_2 + \frac{P_3}{P_1}\,x_3 + \ldots + \frac{P_n}{P_1}\,x_n \\ 0 &= y_1 + \frac{P_2}{P_1}\,y_2 + \frac{P_3}{P_1}\,y_3 + \ldots + \frac{P_n}{P_1}\,y_n \\ 0 &= z_1 + \frac{P_2}{P_1}\,z_2 + \frac{P_3}{P_1}\,z_3 + \ldots + \frac{P_n}{P_1}\,z_n \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x'_1 + \frac{P_2}{P_1} x'_2 + \frac{P_3}{P_1} x'_3 + \ldots + \frac{P_n}{P_1} x'_n \\ 0 &= y'_1 + \frac{P_2}{P_1} y'_2 + \frac{P_3}{P_1} y'_3 + \ldots + \frac{P_n}{P_1} y'_n \\ 0 &= z'_1 + \frac{P_2}{P_1} z'_2 + \frac{P_3}{P_1} z'_3 + \ldots + \frac{P_n}{P_1} z'_n \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Eliminiert man aus diesen sechs Gleichungen die $(n-1)$ Unbekannten $\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_1} \ldots \frac{P_n}{P_1}$, so bleiben $(7-n)$ Gleichungen übrig, die außer den bekannten Koordinaten der gegebenen Achsen $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$ nur die sechs unbekannten Koordinaten $x_n, y_n \ldots z'_n$ der Achse p_n enthalten und daher die Form haben:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= X' x_n + Y' y_n + Z' z_n + X x'_n + Y y'_n + Z z'_n \\ 0 &= X'_1 x_n + Y'_1 y_n + Z'_1 z_n + X_1 x'_n + Y_1 y'_n + Z_1 z'_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Die Größen $X, Y, Z \ldots$ sind Funktionen der bekannten Koordinaten $x, y, z \ldots$ der Achsen $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$. Sie ergeben sich aus der angedeuteten Rechnung, brauchen jedoch für den vorliegenden Zweck hier nicht entwickelt zu werden. Die Gleichungen (28) sprechen die Bedingung aus, daß die unbekannte Achse p_n Nullachse einer jeden der $(7-n)$ Streckengruppen (Q), $(Q_1) \ldots$ sein muß, deren Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} (Q) &\equiv X \ddagger Y \ddagger Z \ddagger X' \ddagger Y' \ddagger Z' \\ (Q_1) &\equiv X_1 \ddagger Y_1 \ddagger Z_1 \ddagger X'_1 \ddagger Y'_1 \ddagger Z'_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

durch die Gleichungen (28) gegeben sind. Nachdem diesen Bedingungen gemäß eine Achse p_n gewählt worden ist, bestimmen die Gleichungen (27) die Größenverhältnisse $\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_1} \ldots \frac{P_n}{P_1}$ der Strecken.

Die angedeuteten, etwas unbequemen Rechnungen können durch das in den folgenden Abschnitten beschriebene geometrische Verfahren ersetzt werden.

18. Nullwertige Gruppen von zwei Strecken: $P_1 \ddagger P_2 \equiv 0$. Damit die Achse p_2 geschnitten werde von jeder Achse q, die auch p_1 schneidet, muß p_2 mit p_1 zusammenfallen. *Von einer Achse p_1 ist also nur die mit ihr zusammenfallende Achse p_2*

von entgegengesetztem Sinn abhängig. Die Strecke P_2 ist bestimmt durch die Bedingung

$$P_1 \ddagger P_2 \equiv 0$$

oder

$$P_2 \equiv +\!\!+ P_1$$

d. h P_2 hat Größe, Richtung und Sinn der gewendeten Strecke P_1.

19. Nullwertige Gruppen von drei Strecken: $P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \equiv 0$. Jede Achse q, die von p_1 und p_2 geschnitten wird, kann p_3 nur dann schneiden, wenn die drei Achsen in einer Ebene liegen und in einem Punkte A sich schneiden (Abb. 8). ***Von zwei sich schneidenden Achsen p_1, p_2 ist also jede Achse abhängig, die durch ihren Schnittpunkt A geht und in ihrer Ebene liegt.*** Die Größenverhältnisse $P_1 : P_2 : P_3$ werden in einer besonderen Zeichnung, dem ***Streckenplan*** (Abb. 9), bestimmt durch die Bedingung, daß die geometrische Summe der drei Strecken gleich null sein muß.

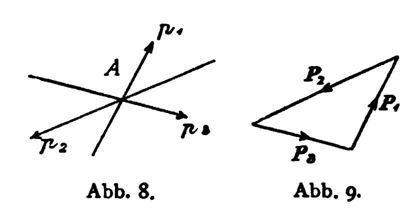


Abb. 8. Abb. 9.

Sind die drei Achsen p_1, p_2, p_3 *parallel*, so kann das Verhältnis $\frac{P_2}{P_1}$ durch eine Momentengleichung in bezug auf eine Achse bestimmt werden, welche die Ebene der Strecken in einem Punkte der Achse p_3 rechtwinklig schneidet. Das zweite Verhältnis $\frac{P_3}{P_1}$ ergibt sich darauf aus der Bedingung, daß die geometrische Summe der drei Strecken gleich null sein muß. Geometrisch werden diese Bedingungen durch Abb. 10 dargestellt:

$$P_1 : P_2 : P_3 = A_1B_1 : A_2B_2 : A_3B_3.$$

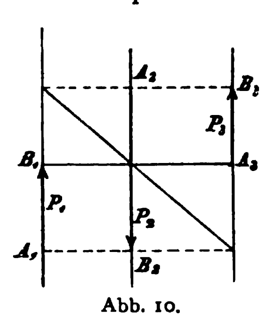


Abb. 10.

20. Nullwertige Gruppen von vier Strecken: $P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \equiv 0$. Es sind folgende vier Fälle zu unterscheiden:

1) *Die gegebenen drei Achsen p_1, p_2, p_3* (Abb. 11) *liegen in einer Ebene α*, und da sie voneinander unabhängig sind, gehen sie nicht durch *einen* Punkt. ***Von diesen drei Achsen ist jede Achse p_4 der Ebene α abhängig,*** weil jede Achse q, die von p_1, p_2, p_3 geschnitten wird, jede andere Achse der Ebene schneidet. Ist eine

Achse p_4 gewählt worden, so legt man, um die nullwertige Gruppe zu bilden, auf eine der drei Diagonalen r des Achsenviereckes, z. B. auf die Achse AB (Abb. 11), zwei Strecken R von gleicher Größe und entgegengesetztem Sinn, also die nullwertige Gruppe

$$R \mathbin{+\!\!\!+} R \equiv 0,$$

bildet darauf im Streckenplan (Abb. 12) die beiden Gruppen:

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger R \equiv 0$$
$$P_3 \ddagger P_4 \mathbin{+\!\!\!+} R \equiv 0$$

und durch Zusammenlegen derselben die zu bestimmende Gruppe

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \equiv 0.$$

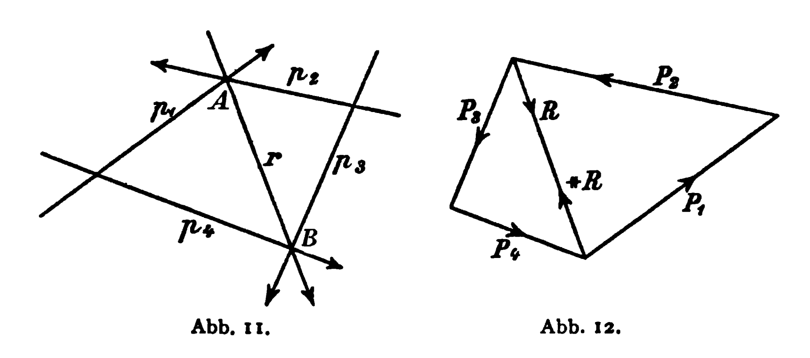


Abb. 11. Abb. 12.

2) *Die gegebenen Achsen p_1, p_2, p_3 liegen nicht in einer Ebene* und schneiden sich in einem Punkte A, der auch unendlich fern

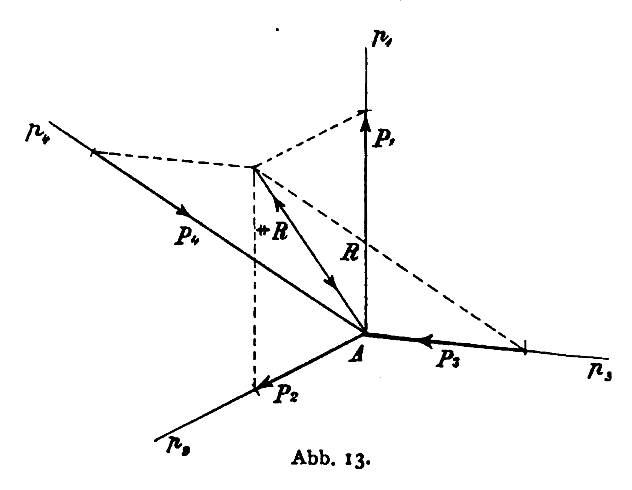


Abb. 13.

liegen kann. Die Achsen, welche zugleich p_1, p_2, p_3 schneiden, gehen alle durch den Punkt A; p_4 muß daher auch durch diesen

Punkt gehen. Auf die Schnittlinie der beiden Ebenen $p_1 p_2$ und $p_3 p_4$ (Abb. 13) legt man die nullwertige Gruppe

$$R \mathbin{+\!\!+} R \equiv 0$$

und bestimmt die gesuchte Gruppe

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \equiv 0$$

durch Zusammenlegen der beiden nullwertigen Gruppen:

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger R \equiv 0 \text{ und } P_3 \ddagger P_4 \mathbin{+\!\!+} R \equiv 0.$$

3) *Zwei der gegebenen Achsen p_1, p_2 schneiden sich im Punkte A und ihre Ebene α wird von der dritten Achse p_3 im Punkte B geschnitten* (Abb. 14). Der Punkt A und die Achse p_3 bestimmen eine zweite Ebene β. Die Achsen, welche zugleich p_1, p_2, p_3 schneiden, bilden zwei Strahlenbüschel: den Büschel A in der Ebene β und den Büschel B in der Ebene α. *Die Achse p_4 muß daher entweder dem Büschel A in der Ebene α oder dem Büschel B in der Ebene β angehören.* Im ersten Falle wird

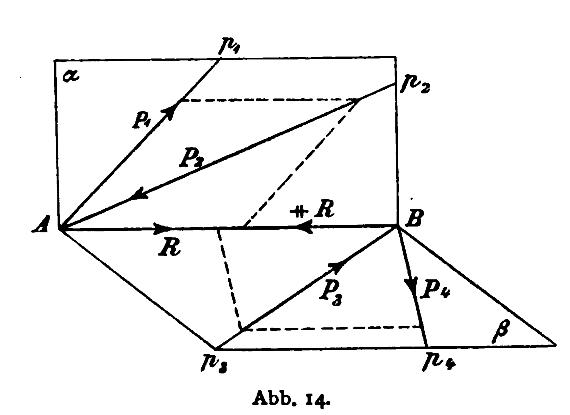


Abb. 14.

P_3 gleich null; derselbe kommt daher hier nicht in Betracht. Im zweiten Falle, der in Abb. 14 dargestellt ist, verfährt man wie in den vorhergehenden Beispielen: Man legt auf die Gerade AB die nullwertige Streckengruppe

$$R \mathbin{+\!\!+} R \equiv 0$$

und legt die beiden Gruppen:

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger R \equiv 0 \text{ und } P_3 \ddagger P_4 \mathbin{+\!\!+} R \equiv 0$$

zusammen.

4) *Die drei gegebenen Achsen p_1, p_2, p_3 schneiden sich nicht* und bestimmen also eine Schar der Erzeugenden eines einfachen Hyperboloids. Die Achsen q, welche jede der drei Achsen p_1, p_2, p_3 schneiden, bilden die *zweite* Schar. *Die Achse p_4 muß also der ersten Schar angehören.* Um eine der nullwertigen Gruppen

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \equiv 0$$

zu bilden, legt man durch eine der Achsen q irgend eine Ebene α

(Abb. 15), bezeichnet die Projektionen von p_1, p_2, p_3 auf α mit a_1, a_2, a_3 und die Schnitte der Ebenen p_1a_1, p_2a_2, p_3a_3 mit der durch q senkrecht zu α gelegten Ebene β mit n_1, n_2, n_3. Man

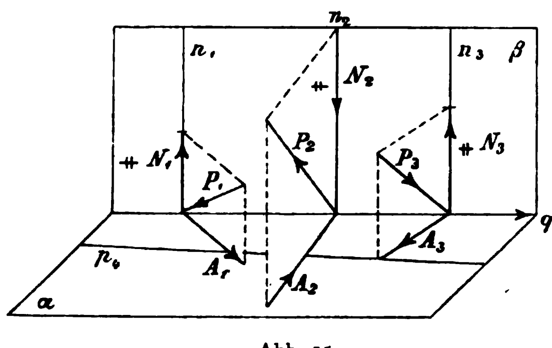


Abb. 15.

wählt dann die Strecke N_1 nach Belieben und bildet die fünf nullwertigen Streckengruppen:

$$N_1 \ddagger N_2 \ddagger N_3 \equiv 0$$
$$+\!\!\!+ N_1 \ddagger P_1 \ddagger A_1 \equiv 0$$
$$+\!\!\!+ N_2 \ddagger P_2 \ddagger A_2 \equiv 0$$
$$+\!\!\!+ N_3 \ddagger P_3 \ddagger A_3 \equiv 0$$
$$+\!\!\!+ A_1 +\!\!\!+ A_2 +\!\!\!+ A_3 \ddagger P_4 \equiv 0.$$

Durch Zusammenlegen dieser fünf Gruppen entsteht die zu bestimmende nullwertige Streckengruppe

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \equiv 0.$$

Die beschriebene Konstruktion ist nur zum Teil in Abb. 15 dargestellt.

21. Nullwertige Gruppen von fünf Strecken: $P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \ddagger P_5 \equiv 0$. Wir übergehen die besonderen Fälle, in denen zwei oder mehrere der gegebenen vier Achsen sich schneiden, und nehmen also an, daß die vier voneinander unabhängigen Achsen p_1, p_2, p_3, p_4 sich *nicht* schneiden. Da die Gruppe aus *fünf* Strecken besteht, so muß die fünfte Achse p_5 nach Abschnitt 17 *zwei* Bedingungen von der Form der Gleichungen (28) erfüllen, d. h. p_5 muß Nullachse von *zwei* Streckengruppen (Q) und (Q_1) sein, welche durch die vier gegebenen Achsen p_1, p_2, p_3, p_4 bestimmt sind. *In jeder Ebene α liegt also eine einzige Achse p_5*, welche diese Bedingung erfüllt, nämlich die Verbindungsachse der beiden Nullpunkte der Streckengruppen (Q) und (Q_1) in der Ebene α, und durch *jeden* Punkt A des Raumes geht ebenfalls *eine* Achse p_5:

die Schnittachse der beiden Nullebenen des Punktes A in bezug auf die Streckengruppen (Q) und (Q_1). Hierbei ist abgesehen von den Sonderfällen, in welchen die beiden Nullpunkte der Ebene α oder die beiden Nullebenen des Punktes A zusammenfallen. Es kann also bei Bildung der nullwertigen Gruppe die Bedingung gestellt werden, daß die Achse p_5 durch einen willkürlich gewählten Punkt A gehen oder in einer willkürlich gewählten Ebene α liegen soll.

Erster Fall. Der Punkt A ist gegeben (Abb. 16). Man wählt nach Belieben eine Ebene β, die den Punkt A nicht enthält, be-

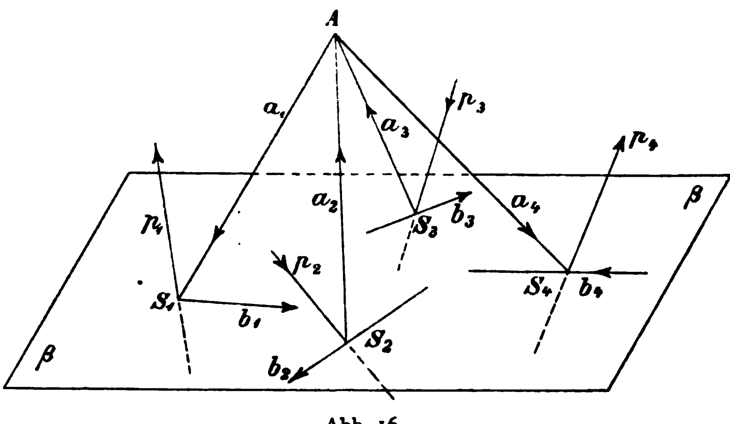


Abb. 16.

zeichnet mit S_1, S_2, S_3, S_4 die Schnittpunkte der Ebene β mit den gegebenen Achsen p_1, p_2, p_3, p_4, ferner mit a_1, a_2, a_3, a_4 die Achsen, welche A mit den vier Schnittpunkten verbinden, und mit b_1, b_2, b_3, b_4 die Achsen, in welchen β von den vier Ebenen p_1a_1, p_2a_2, p_3a_3, p_4a_4 geschnitten wird. Man wählt dann nach Belieben die Strecke B_1 auf der Achse b_1 und bildet die sechs nullwertigen Gruppen:

$$\begin{aligned} & B_1 \ddagger B_2 \ddagger B_3 \ddagger B_4 \equiv 0 \\ \mathbin{+\!\!\!+}\, & B_1 \ddagger P_1 \ddagger A_1 \equiv 0 \\ \mathbin{+\!\!\!+}\, & B_2 \ddagger P_2 \ddagger A_2 \equiv 0 \\ \mathbin{+\!\!\!+}\, & B_3 \ddagger P_3 \ddagger A_3 \equiv 0 \\ \mathbin{+\!\!\!+}\, & B_4 \ddagger P_4 \ddagger A_4 \equiv 0 \\ \mathbin{+\!\!\!+}\, & A_1 \mathbin{+\!\!\!+} A_2 \mathbin{+\!\!\!+} A_3 \mathbin{+\!\!\!+} A_4 \ddagger P_5 \equiv 0. \end{aligned}$$

Durch Zusammenlegen dieser sechs Gruppen entsteht die zu bestimmende nullwertige Gruppe

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \ddagger P_5 \equiv 0.$$

Zweiter Fall. Die Ebene α ist gegeben. Durch die Schnittpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 der gegebenen Achsen p_1, p_2, p_3, p_4 mit der

Ebene α legt man Achsen a_1, a_2, a_3, a_4, die in irgend einem Punkte A außerhalb α, z. B. wie in Abb. 17 in einem unendlich fernen Punkte sich schneiden, und bezeichnet die Achsen, in welchen β von den Ebenen $p_1 a_1$, $p_2 a_2$, $p_3 a_3$, $p_4 a_4$ geschnitten wird, mit b_1,

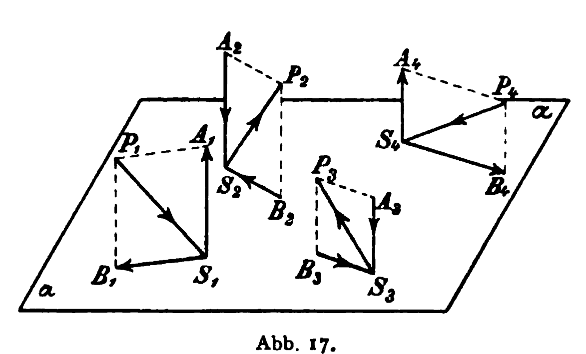


Abb. 17.

b_2, b_3, b_4. Man wählt dann die Strecke A_1 auf der Achse a_1 nach Belieben und bildet die sechs nullwertigen Gruppen

$$\mathbin{+\!\!+} A_1 \mathbin{+\!\!+} A_2 \mathbin{+\!\!+} A_3 \mathbin{+\!\!+} A_4 \equiv 0$$
$$A_1 \ddagger P_1 \ddagger B_1 \equiv 0$$
$$A_2 \ddagger P_2 \ddagger B_2 \equiv 0$$
$$A_3 \ddagger P_3 \ddagger B_3 \equiv 0$$
$$A_4 \ddagger P_4 \ddagger B_4 \equiv 0$$
$$\mathbin{+\!\!+} B_1 \mathbin{+\!\!+} B_2 \mathbin{+\!\!+} B_3 \mathbin{+\!\!+} B_4 \ddagger P_5 \equiv 0.$$

Durch Zusammenlegen dieser sechs Gruppen entsteht die zu bestimmende nullwertige Gruppe:

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \ddagger P_5 \equiv 0.$$

22. Nullwertige Gruppen von sechs Strecken: $P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \ddagger P_5 \ddagger P_6 \equiv 0$. Durch die Koordinaten der fünf gegebenen und voneinander unabhängigen Achsen p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 wird nach Abschnitt 17 *eine* Streckengruppe (Q) bestimmt, zu deren Nullachsen p_6 gehören muß. Diese Achsen bilden in jeder Ebene einen Büschel. Es kann daher die Bedingung gestellt werden, daß p_6 n einer willkürlich gewählten Ebene α liegen und durch einen Punkt A dieser Ebene gehen soll; die Aufgabe ist bestimmt, wenn nicht zufällig A mit dem Nullpunkt von α für die Gruppe (Q) zusammenfällt. Um in einem solchen Falle die nullwertige Gruppe (P) zu bilden, bestimmt man nach dem vorigen Abschnitt die beiden, aus je fünf Strecken bestehenden Gruppen:

$$(P') \equiv P_1' \ddagger P_2' \ddagger P_3' \ddagger P_4' \ddagger R' \equiv 0$$
$$(P'') \equiv P_1'' \ddagger P_2'' \ddagger P_3'' \ddagger P_5'' \ddagger R'' \equiv 0.$$

In diesen Ausdrücken bezeichnen P_1' und P_1'' zwei Strecken der Achse p_1, P_2' und P_2'' zwei Strecken der Achse p_2 usf. und R', R'' zwei Strecken in der Ebene α. Man kann, wie in Abb. 18 angedeutet ist, die Strecke R'' mit einer Zahl ϱ multiplizieren und diese Zahl so wählen, daß die Achse p_6 der Strecke

$$P_6 \equiv R' \ddagger \varrho R''$$

durch den gegebenen Punkt A geht. Indem man sämtliche Strecken der Gruppe (P'') mit der Zahl ϱ multipliziert und die hierdurch entstehende Gruppe $(\varrho P'') \equiv 0$ mit der Gruppe

$$(P') \equiv 0$$

Abb 18.

zusammenlegt, entsteht die zu bestimmende Gruppe:

$$(P') + (\varrho P'') \equiv P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \ddagger P_5 \ddagger P_6 \equiv 0.$$

Es ist also:

$$P_1 = P_1' + \varrho P_1'', \quad P_2 = P_2' + \varrho P_2'', \quad P_3 = P_3' + \varrho P_3'',$$
$$P_4 = P_4', \quad P_5 = \varrho P_5''.$$

23. Nullwertige Gruppen von sieben Strecken: $P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \ddagger P_5 \ddagger P_6 \ddagger P_7 \equiv 0$. Wenn die sechs Achsen $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ voneinander unabhängig sind, und die Lage der Achse p_7 *willkürlich* gewählt wird, so genügen die sechs Bedingungen 27), um die relativen Werte der sieben Strecken zu bestimmen. *Von sechs unabhängigen Achsen ist also jede andere Achse abhängig.* Um für die sieben gegebenen Achsen die nullwertige Streckengruppe zu bestimmen, legt man durch eine der Achsen, z. B. p_7, irgend eine Ebene α. Man bestimmt dann nach Abschnitt 21) die drei, aus je fünf Strecken bestehenden Gruppen:

$$(P') \equiv P_1' \ddagger P_2' \ddagger P_3' \ddagger P_4' \ddagger R' \equiv 0$$
$$(P'') \equiv P_1'' \ddagger P_2'' \ddagger P_3'' \ddagger P_5'' \ddagger R'' \equiv 0$$
$$(P''') \equiv P_1''' \ddagger P_2''' \ddagger P_3''' \ddagger P_6''' \ddagger R''' \equiv 0.$$

Wie im vorigen Abschnitt bezeichnen P_1', P_1'', P_1''' Strecken der Achse p_1, P_2', P_2'', P_2''' Strecken der Achse p_2 usf., ferner R', R'', R''' drei Strecken in der Ebene α. Man bestimmt darauf die beiden Zahlen ϱ', ϱ'' aus der Bedingung, daß die Strecke

$$P_7 \equiv R''' \ddagger \varrho'' R'' \ddagger \varrho' R'$$

auf die gegebene Achse p_7 fällt. Multipliziert man nun alle Strecken der Gruppe (P') mit ϱ', alle Strecken der Gruppe (P'') mit ϱ'', so

entsteht durch Zusammenlegen der drei nullwertigen Gruppen $(\varrho' P')$, $(\varrho'' P'')$ und (P''') die zu bestimmende Gruppe:

$$(\varrho' P') \ddagger (\varrho'' P'') \ddagger (P''') \equiv P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \ddagger P_5 \ddagger P_6 \ddagger P_7.$$

Es ist demnach:

$$P_1 = \varrho' P_1' + \varrho'' P_1'' + P_1''', \quad P_2 = \varrho' P_2' + \varrho'' P_2'' + P_2''',$$
$$P_3 = \varrho' P_3' + \varrho'' P_3'' + P_3''', \quad P_4 = \varrho' P_4',$$
$$P_5 = \varrho'' P_5'', \quad P_6 = P_6'''.$$

24. Die Zusammensetzung einer gegebenen Gruppe von Strecken zu einer möglichst einfachen gleichwertigen Gruppe. Da die *graphische* Zusammensetzung der Strecken in der nächstfolgenden Abhandlung beschrieben wird, so können wir uns hier auf das rechnerische Verfahren beschränken. Eine gegebene Streckengruppe (P) wird durch ihre *sechs* Koordinaten X, Y, Z, X', Y', Z' bestimmt. Da eine Einzelstrecke nur *fünf* voneinander unabhängige Koordinaten hat, so ist es im allgemeinen nicht möglich, eine gegebene Gruppe (P) durch eine gleichwertige Einzelstrecke R zu ersetzen. Die Möglichkeit tritt nur dann ein, wenn die Bedingung 16):

$$XX' + YY' + ZZ' = 0$$

erfüllt ist. Die Einzelstrecke

$$R \equiv (P)$$

wird dann die *Resultante* der Gruppe genannt. Die beiden wichtigsten und einfachsten Fälle ergeben sich, wenn alle Strecken der Gruppe in einer Ebene α liegen oder durch einen Punkt A gehen. Im ersten Fall kann man die Ebene der Koordinatenachsen x', y', z' auf die Ebene α legen; dann werden die drei Koordinaten X, Y, Z gleich null. Im zweiten Falle legt man den Schnitt der drei Koordinatenachsen x, y, z auf den Punkt A und macht dadurch die Koordinaten X', Y', Z' gleich null. In beiden Fällen ist demnach die Bedingung der Gleichung 16) erfüllt.

Hierher gehört auch der Fall, wenn alle Strecken der gegebenen Gruppe

$$U \equiv U_1 \ddagger U_2 \ddagger U_3 \ddagger \ldots$$

unendlich klein sind und in der unendlich fernen Ebene liegen, wie man am leichtesten erkennt, wenn man die Strecken U_1, U_2, $U_3 \ldots$ als *Drehungspaare*, also als Parallelverschiebungen eines starren Körpers ansieht, deren Geschwindigkeiten mit V_1, V_2, $V_3 \ldots$ bezeichnet werden mögen. Die resultierende Bewegung ist dann eben-

falls eine Parallelverschiebung mit der Geschwindigkeit, welche durch die geometrische Summe

$$V \equiv V_1 \ddagger V_2 \ddagger V_3 \ddagger \ldots$$

dargestellt wird. Bezeichnen U_1, U_2, U_3 . . . *Kräftepaare*, so sind ihre *Hauptmomentenstrecken* V_1, V_2, V_3 . . . geometrisch zu summieren.

Zwei Einzelstrecken K_1, K_2 werden nach Abschnitt 14 durch je *fünf* Koordinaten X_1, Y_1, Z_1, X'_1, Y'_1 und X_2, Y_2, Z_2, X'_2, Y'_2 bestimmt, und die beiden fehlenden Koordinaten sind dann durch die Gleichungen:

$$Z'_1 = -\frac{X_1 X'_1 + Y_1 Y'_1}{Z_1}, \qquad Z'_2 = -\frac{X_2 X'_2 + Y_2 Y'_2}{Z_2}$$

gegeben. Die sechs Bedingungen der Gleichwertigkeit

$$(P) \equiv K_1 \ddagger K_2$$

lauten nach Abschnitt 11:

$$\left.\begin{array}{lll} X = X_1 + X_2, & Y = Y_1 + Y_2, & Z = Z_1 + Z_2 \\ X' = X'_1 + X'_2, & Y' = Y'_1 + Y'_2, & Z' = Z'_1 + Z'_2. \end{array}\right\} \quad (30)$$

Die Aufgabe: eine gegebene Streckengruppe (P) durch *zwei* Strecken zu ersetzen, ist daher *unbestimmt* und läßt unendlich viele Lösungen zu. Sie wird bestimmt, wenn *vier* der unbekannten Koordinaten oder wenn *vier* voneinander unabhängige Bedingungen gegeben sind, die durch Gleichungen zwischen den Koordinaten der Strecken K_1, K_2 ausgedrückt werden können. Die folgenden Abschnitte enthalten die wichtigsten Fälle.

25. Erstes Beispiel. Gegeben ist die Lage der Achse k_1. Zu bestimmen sind dann außer dem Wert der Strecke K_1 die fünf Koordinaten der Strecke K_2. Man ersieht hieraus, daß durch die gegebene Lage der Achse k_1 die Lage der zugehörigen Achse k_2 bestimmt wird. Daher nennt man in bezug auf die gegebene Streckengruppe (P) die beiden Achsen k_1, k_2 *konjugierte Achsen* und die beiden Strecken K_1, K_2 *konjugierte Strecken*.

Die gegebenen Koordinaten der Achse k_1 werden mit x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1 bezeichnet. Um zunächst den Wert der Strecke K_1 zu bestimmen, hat man zu beachten, daß aus der Gleiehwertigkeit der Gruppen:

$$K_1 \ddagger K_2 \equiv (K) \equiv (P)$$

nach Gleichung 12) folgt:

$$[(K), (K)] = 2\,[K_1, K_2] = [(P), (P)] = 2\,\mathrm{cm}\,(X X' + Y Y' + Z Z').$$

Ferner ist:

$$[k_1, K_2] = [k_1 (K)] - [k_1 K_1] = [k_1 (K)] = [k_1 (P)]$$

und also nach Gleichung 12):

$$[K_1, K_2] = K_1 [k_1, K_2] = K_1 (x_1 X' + y_1 Y' + z_1 Z' + x'_1 X + y'_1 Y + z'_1 Z) \text{ 1 cm.}$$

Folglich hat die Strecke K_1 den Wert:

$$K_1 = \frac{X X' + Y Y' + Z Z'}{x_1 X' + y_1 Y' + z_1 Z' + x'_1 X + y'_1 Y + z'_1 Z} \cdot \qquad (31)$$

Darauf ergeben sich die Koordinaten der Strecke K_2 aus den Gleichungen 30):

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= X - x_1 K_1, & Y_2 &= Y - y_1 K_1, & Z_2 &= Z - z_1 K_1, \\ X'_2 &= X' - x'_1 K_1, & Y'_2 &= Y' - y'_1 K_1, & Z'_2 &= Z' - z'_1 K_1. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

26. Die wichtigsten Eigenschaften der konjugierten Achsen und Strecken einer Gruppe (P).

1. Jede Achse q, die zwei konjugierte Achsen k_1, k_2 schneidet, ist eine *Nullachse* der Gruppen (P) und (K), weil die beiden Momente $[q, K_1]$ und $[q, K_2]$ gleich null sind.

2. Jede Ebene α, welche die Achse k_1 enthält, wird von der konjugierten Achse k_2 in ihrem Nullpunkt A geschnitten. Denn jede Achse q, die in der Ebene α liegt und durch den Punkt A geht, schneidet beide Achsen k_1 und k_2.

3. Die Nullebene eines jeden Punktes A, der auf der Achse k_2 liegt, enthält die Achse k_1.

4. Sind (k_1, k_2), (k_3, k_4), (k_5, k_6) ... konjugierte Achsenpaare, so liegen alle Achsen q, die durch einen Punkt A gehen und die Achsen je eines Paares schneiden, in einer Ebene, der Nullebene des Punktes A.

5. Alle Achsen k_1, k_3, k_5 ..., die durch einen Punkt A gehen, haben konjugierte Achsen k_2, k_4, k_6 ..., die in einer durch A gehenden Ebene, der Nullebene des Punktes A, liegen.

6. Wir bezeichnen mit G die *geometrische Summe* der Streckengruppe (P) und mit γ eine zu G senkrecht gestellte Ebene. Projiziert man zwei konjugierte Strecken der Gruppe (P), z. B. die Strecken K_1 und K_2, rechtwinklig auf die Ebene γ, so sind die beiden Projektionen parallel, gleich groß und dem Sinne nach einander entgegengesetzt, weil

$$K_1 \ddagger K_2 \equiv G$$

ist.

7. Alle Achsen 1, 2, 3 . . ., die den Kanten (1), (2), (3) . . . eines gegebenen Polyeders I konjugiert sind, bilden die Kanten eines zweiten Polyeders II, das dem Polyeder I zugleich eingeschrieben und umschrieben ist. Denn einer jeden Ecke des einen Polyeders entspricht im anderen Polyeder ein Polygon, dessen Ebene durch jene Ecke geht. Solche *reziproke Polyeder* kommen in der Theorie des Fachwerks zur Anwendung (Abhandlung XI, Abschnitt 7).

8. Die Abb. 19 und 20 zeigen die Projektionen von zwei reziproken Polyedern auf die zur geometrischen Summe G senk-

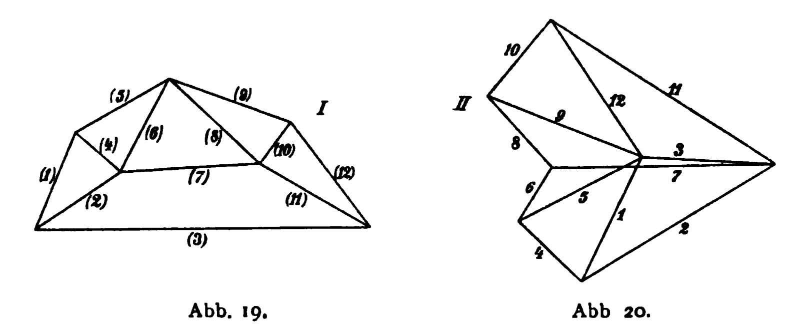


Abb. 19. Abb 20.

recht gestellte Ebene γ. Um die Zeichnung deutlicher zu machen und nur die Eigenschaften zu zeigen, die hier in Betracht kommen, sind die beiden Projektionen parallel auseinander gezogen. Das eine Polyeder ist also dem anderen *nicht* um- und eingeschrieben. Die gegenseitigen Beziehungen der beiden Projektionen bestehen in folgenden Eigenschaften:

Den Kanten (1), (2), (3), (4) . . . des Polyeders I entsprechen die gleichgerichteten Kanten 1, 2, 3, 4 . . . des Polyeders II. Den Ecken ((1), (2), (3)), ((1), (4), (5)), ((2), (4), (6), (7)), ((5), (6), (8), (9)) . . . des Polyeders I entsprechen die Seitenpolygone (1, 2, 3), (1, 4, 5), (2, 4, 6, 7), (5, 6, 8, 9) . . . des Polyeders II. Ebenso entsprechen den Ecken (1, 2, 4), (2, 3, 11, 7), (1, 5, 9, 12, 3) . . . des Polyeders II die Polygone ((1), (2), (4)), ((2), (3), (11), (7)), ((1), (5), (9), (12), (3)) . . . des Polyeders I.

Die *Größen* der konjugierten Strecken kommen bei diesen Beziehungen nicht in Betracht.

9. Das Moment

$$[K_1, K_2] = K_1 K_2 [k_1, k_2]$$

hat für alle konjugierten Streckenpaare einer Gruppe (P) dieselbe Größe $\frac{1}{2}$ $[(P), (P)]$. Diese Größe kann dargestellt werden durch

den sechsfachen Rauminhalt des Tetraeders $ABCD$, zu dessen Kanten die beiden Strecken K_1 und K_2 gehören.

In den Abb. 21 und 22 bezeichnen a und α die Größen, welche nach Abschnitt 6 das Moment der beiden Achsen k_1, k_2 bestimmen:

$$[k_1, k_2] = a \sin \alpha.$$

Die Aufrißebene β ist also parallel zu den beiden Achsen k_1, k_2 gestellt. Die Grundfläche des Tetraeders hat die Größe

$$A\,B\,C = \frac{1}{2} K_1\, a,$$

während seine Höhe

$$D'\,F = K_2 \sin \alpha$$

ist. Der Rauminhalt ist folglich:

Abb. 21.

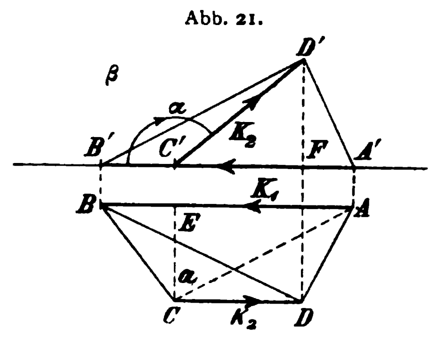


Abb. 22.

$$A\,B\,C\,D = \frac{1}{6} K_1\, K_2\, a \sin\alpha = \frac{1}{6} [K_1, K_2].$$

Diese Größe ändert sich nicht, wenn die Strecken K_1, K_2 auf ihren Achsen nach Belieben verschoben werden.

27. Zweites Beispiel. Gegeben sind eine Ebene α und ein nicht in ihr liegender Punkt A. Die Achse k_1 soll durch den Punkt A gehen, und die Achse k_2 in der Ebene α liegen. Man wählt ein Koordinatentetraeder, dessen Achsen x, y, z im Punkte A sich schneiden, und dessen Achsen x', y', z' in der Ebene α liegen. Dann sind gegeben: drei Koordinaten der Strecke K_1:

$$X'_1 = Y'_1 = Z'_1 = 0$$

und drei Koordinaten der Strecke K_2:

$$X_2 = Y_2 = Z_2 = 0.$$

Die übrigen sechs Koordinaten ergeben sich aus den Gleichungen 30):

$$X_1 = X, \qquad Y_1 = Y, \qquad Z_1 = Z,$$
$$X'_2 = X', \qquad Y'_2 = Y', \qquad Z'_2 = Z'.$$

Demnach ist:

$$K_1 = X \ddagger Y \ddagger Z$$
$$K_2 = X' \ddagger Y' \ddagger Z'.$$

28. Drittes Beispiel. Die Achse k_1 geht durch einen gegebenen Punkt A und die Achse k_2 liegt unendlich fern. Wir wählen das in Abb. 6 dargestellte Koordinatentetraeder und legen die Ecke A auf den gegebenen Punkt. Gegeben sind dann drei Koordinaten der Strecke K_1:

$$X'_1 = Y'_1 = Z'_1 = 0$$

und nach den Gleichungen 14) die drei Projektionen der Strecke K_1 auf die Achsen x, y, z:

$$X_1 = X + (Y' - Z')\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$Y_1 = Y + (Z' - X')\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$Z_1 = Z + (X' - Y')\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Die sechs Koordinaten der unendlich kleinen und unendlich fernen Strecke K_2 werden darauf durch die Bedingungen der Gleichwertigkeit:

$$(P) \equiv K_1 \ddagger K_2$$

bestimmt:

$$X_2 = X - X_1 = (Z' - Y')\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$Y_2 = Y - Y_1 = (X' - Z')\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$Z_2 = Z - Z_1 = (Y' - X')\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$X'_2 = X', \qquad Y'_2 = Y', \qquad Z'_2 = Z'.$$

29. Viertes Beispiel. Die Ebene der unendlich kleinen und unendlich fernen Strecke K_2 soll rechtwinklig zur Achse k_1 gestellt sein. Die Aufgabe ist *bestimmt*, weil außer den fünf voneinander unabhängigen Koordinaten der Strecke K_1 nur noch das *Hauptmoment* $[k_1, K_2]$ der unendlich fernen Strecke K_2 unbekannt ist. Eine jede unendlich kleine Bewegung (P) eines starren Körpers besteht demnach aus einer Drehung um eine Achse k_1 mit der Drehgeschwindigkeit K_1 verbunden mit einer Parallelverschiebung in der Richtung der Drehachse k_1 mit der Geschwindigkeit $[k_1, K_2]$. Sie ist also eine unendlich kleine *Schraubenbewegung*, die bestimmt wird durch die Lage der Schraubenachse k_1, die Drehgeschwindigkeit K_1 und die Schubgeschwindigkeit $[k_1, K_2]$ der Schraubenachse. Die Bewegung kann dargestellt werden durch *zwei*

Strecken auf der Schraubenachse k_1: durch die Drehgeschwindigkeit K_1 und die Schubgeschwindigkeit:

$$S = [k_1, K_2]$$

der Schraubenachse. Die Bewegung ist die einer rechtsgängigen oder einer linksgängigen Schraube, je nachdem die beiden Strecken K_1 und S dem Sinne nach gleich oder einander entgegengesetzt sind. Wir geben der Achse k_1 den Sinn der Strecke K_1. Das positive Vorzeichen der Schubgeschwindigkeit S bestimmt also eine *rechts*gängige Schraubenbewegung.

Da die Strecke K_2 gleich null ist, so wird, wie im dritten Beispiel, K_1 nach Größe, Richtung und Sinn durch die geometrische Summe G der Streckengruppe (P) bestimmt. Daher haben die Projektionen K_x, K_y, K_z der Strecke K_1 nach den Gleichungen 14) die Werte:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= G_x = X + (Y' - Z')\sqrt{\frac{1}{2}} \\ K_y &= G_y = Y + (Z' - X')\sqrt{\frac{1}{2}} \\ K_z &= G_z = Z + (X' - Y')\sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

woraus folgt:

$$K_1 = + \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}\,. \tag{34}$$

Das Vorzeichen von K_1 ist positiv, weil diese Strecke den Sinn der Achse k_1 hat. Wir bestimmen ferner die Schubgeschwindigkeit S der Schraubenachse aus Gleichung 12):

$$[(P), (P)] = 2\,K_1\,[k_1, K_2] = 2 \text{ cm } [X X' + Y Y' + Z Z')$$

$$S = [k_1, K_2] = 1 \text{ cm } \frac{X X' + Y Y' + Z Z'}{K_1}\,. \tag{35}$$

Da die beiden Strecken K_1 und S auf *einer* Achse liegen, so werden die Projektionen S_x, S_y, S_z der Schubgeschwindigkeit S bestimmt durch die Proportionen:

$$S_x : S_y : S_z : S = K_x : K_y : K_z : K_1. \tag{36}$$

S_x, S_y, S_z bezeichnen nach Abschnitt 15 die Schubgeschwindigkeiten $X'_2 \cdot 1$ cm, $Y'_2 \cdot 1$ cm, $Z'_2 \cdot 1$ cm, die den Achsen x, y, z durch die Parallelverschiebung erteilt werden. Daher ist

$$X'_2 = \frac{S_x}{1 \text{ cm}}, \qquad Y'_2 = \frac{S_y}{1 \text{ cm}}, \qquad Z'_2 = \frac{S_z}{1 \text{ cm}}, \tag{37}$$

während die drei anderen Koordinaten der unendlich kleinen Strecke K_2 nach den Gleichungen 21) bestimmt werden:

$$X_2 = (Z'_2 - Y'_2)\sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad Y_2 = (X'_2 - Z'_2)\sqrt{\frac{1}{2}},$$
$$Z_2 = (Y'_2 - X'_2)\sqrt{\frac{1}{2}}. \tag{38}$$

Endlich ergeben sich die Koordinaten der Strecke K_1 aus den Gleichungen 30).

Wenn die Strecken P und K *Kräfte* bezeichnen, die auf einen starren Körper wirken, so ändert sich an den vorstehenden Beziehungen nichts. Auch die Bezeichnung von k_1 als *Schraubenachse* der Kräftegruppe (P) kann beibehalten werden, obgleich die Bezeichnung *Zentralachse* gebräuchlicher ist. An die Stelle der Drehgeschwindigkeiten, der Schubgeschwindigkeiten und der Punktgeschwindigkeiten treten die Kräfte, die Momente und die Hauptmomente der Kräftegruppe.

30. **Eigenschaften der gleichzeitigen Geschwindigkeiten der Punkte eines starren Körpers.** Zieht man (Abb. 23 und 24) von irgend einem Punkte o aus die Strecken oa, ob, oc, od ...,

Abb. 23. Abb. 25.

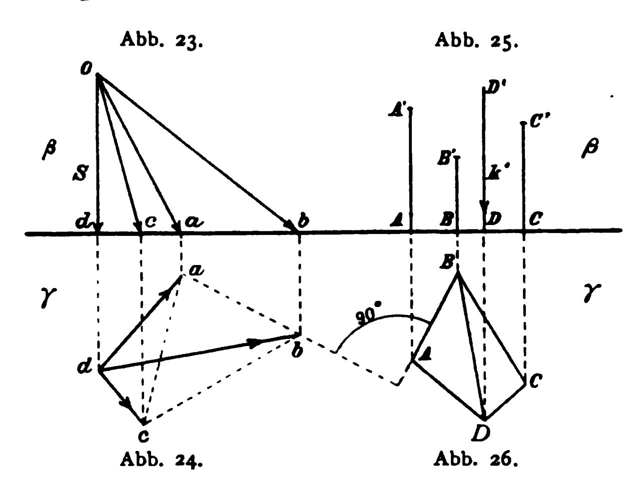


Abb. 24. Abb. 26.

welche die gleichzeitigen Geschwindigkeiten der Körperpunkte A', B', C', D' ... nach Größe, Richtung und Sinn darstellen, so liegen die Endpunkte a, b, c, d ... aller dieser Geschwindigkeitsstrecken in einer zur Schraubenachse der unendlich kleinen Bewegung normal gestellten Ebene γ. Denn die Geschwindigkeit oa eines jeden Körperpunktes A' läßt sich zerlegen in die Schubgeschwindigkeit od

der Schraubenachse und in eine zweite zur Schraubenachse senkrecht gerichtete Komponente da. Durch die Ebene abc ist sonach die Richtung od der Schraubenachse und Größe und Sinn ihrer Schubgeschwindigkeit od bestimmt. In den Abb. 25 und 26 sind die Körperpunkte A', B', C' im Grundriß und Aufriß dargestellt, und $D'D$ bezeichnet die zur Ebene γ normal gerichtete Schraubenachse. Die Strecken da, db, dc (Abb. 24) bestimmen die Geschwindigkeitskomponenten der Körperpunkte A', B', C' parallel zur Ebene γ. Diese Geschwindigkeitsstrecken sind zu den Strecken DA, DB, DC senkrecht gerichtet und den genannten Strecken proportional. Demnach sind die Vierecke $dabc$ und $DABC$ in den Abb. 24 und 26 geometrisch ähnlich und gegeneinander um 90° gedreht.

Aus den gleichzeitigen Geschwindigkeiten oa, ob, oc *dreier* Körperpunkte bestimmt man demnach die augenblickliche Schraubenbewegung des Körpers auf folgendem Wege. Nachdem in den Abb. 23 und 24 Größe, Richtung und Sinn der Schubgeschwindigkeit S der Schraubenachse durch die Strecke od ermittelt worden sind, werden die drei Körperpunkte A', B', C' (Abb. 25) rechtwinklig auf die Ebene γ projiziert. Die Bedingung

$$DABC \sim dabc$$

bestimmt dann den Schnittpunkt D der Schraubenachse k_1 mit der Ebene γ. Die Drehgeschwindigkeit K_1 des Körpers um die Schraubenachse ergibt sich schließlich durch einen der Werte

$$K_1 = \frac{da}{DA} = \frac{db}{DB} = \frac{dc}{DC}.$$

Der Sinn der Geschwindigkeiten bestimmt den Sinn der Drehung.

31. Einige Eigenschaften der Schraubenbewegung. Die Längenstrecke p auf der Schraubenachse, die durch den Quotienten

$$p = \frac{S}{K_1} \tag{39}$$

aus der Schubgeschwindigkeit S und der Drehgeschwindigkeit K_1 der Schraubenbewegung bestimmt wird, heißt der *Parameter* der Bewegung (P). Wäre diese Bewegung nicht unendlich klein, sondern von endlicher Größe, so würde die Dauer einer vollen Umdrehung der Schraube $\frac{2\pi}{K_1}$ Sekunden betragen. Der Schubweg der Schraubenachse während einer Umdrehung oder die *Steigung der Schraube* hat demnach die Größe

$$S\frac{2\pi}{K_1} = 2p\pi. \tag{40}$$

Die *Schubgeschwindigkeit irgend einer Achse* q, deren Lage gegen die Schraubenachse k_1 nach Abschnitt 6 durch die Größen a und α bestimmt wird, hat den Wert

$$[q, (P)] = K_1 (a \sin\alpha + p \cos\alpha); \tag{41}$$

denn

$$[q, K_1] = K_1 \, a \sin\alpha$$

ist die Schubgeschwindigkeit der Achse q infolge der Drehung K_1, während die Parallelverschiebung S der Achse q die Schubgeschwindigkeit

$$S \cos\alpha = K_1 p \cos\alpha$$

erteilt. In Gleichung 41) sind die Vorzeichen von p, $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ zu beachten. Die Größen a und K_1 haben stets das positive Vorzeichen.

Alle Nullachsen der Streckengruppe (P) sind durch die Gleichung

$$a \sin\alpha + p \cos\alpha = 0$$

oder

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{p}{a} \tag{42}$$

bestimmt.

Jede Achse, welche die Schraubenachse rechtwinklig schneidet, ist eine Nullachse der Streckenpruppe; denn Gleichung 42) fordert

$$\operatorname{tg}\alpha = \infty,$$

wenn

$$a = 0$$

ist.

Jede Achse q_1, die mit dem kürzesten Abstande b zwischen zwei konjugierten Achsen k_3, k_4 zusammenfällt, schneidet die Schraubenachse k_1 rechtwinklig. Denn diese Achse q_1 ist rechtwinklig gerichtet zu den Strecken K_3, K_4, folglich auch zur geometrischen Summe K_1 jener beiden Strecken, und da q_1 eine Nullachse ist, so muß sie die Schraubenachse k_1 schneiden.

Bezeichnet q_2 eine zweite Achse, die mit dem kürzesten Abstande c zwischen zwei anderen konjugierten Achsen k_5, k_6 zusammenfällt, so fällt die Schraubenachse k_1 mit dem kürzesten Abstande zwischen q_1 und q_2 zusammen. Denn die Schraubenachse k_1 wird von den beiden Achsen q_1 und q_2 rechtwinklig geschnitten.

32. Die Bedingungen des Gleichgewichtes eines starren Körpers bei beschränkter Bewegungsfreiheit. Wenn ein

starrer Körper A volle Bewegungsfreiheit hat, so kann jede seiner unendlich kleinen Bewegungen (R) zusammengesetzt werden aus Drehungen um *sechs* voneinander unabhängige Achsen oder aus sechs voneinander unabhängigen Schraubenbewegungen (R_1), (R_2) .... (R_6), d. h. man kann die sechs Zahlen $\varrho_1, \varrho_2 \ldots \varrho_6$ so wählen, daß die Bedingung

$$(R) \equiv \varrho_1 (R_1) \ddagger \varrho_2 (R_2) \ddagger \ldots\ldots \ddagger \varrho_6 (R_6)$$

erfüllt wird; denn die sechs Bedingungen der Gleichwertigkeit bestimmen die sechs unbekannten Zahlen ϱ. Die sechs Bewegungen (R_1), (R_2) ... (R_6) sind *unabhängig* voneinander, wenn es unmöglich ist, die Ruhebedingung

$$0 \equiv \varrho_1 (R_1) \ddagger \varrho_2 (R_2) \ddagger \ldots\ldots \ddagger \varrho_6 (R_6)$$

zu erfüllen. Von einem Körper mit *voller* Bewegungsfreiheit sagt man daher, seine Bewegung hat *sechs* Freiheitsgrade, d. h. er kann sechs voneinander unabhängige und folglich *alle* möglichen Bewegungen ausführen. In einem solchen Falle sind *sechs* Gleichungen nötig, um die Bedingungen des Gleichgewichts der auf den Körper wirkenden Kräfte (P) auszudrücken. Man kann diesen sechs Bedingungen die Form geben:

$$0 = [(P), (R_1)] = [(P), (R_2)] = \ldots = [(P), (R_6)],$$

d. h. die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräftegruppe (P) muß bei jeder der sechs unendlich kleinen und voneinander unabhängigen Bewegungen gleich null sein.

Die Bewegung des Körpers A kann *beschränkt* werden durch Berührung mit anderen starren und festliegenden Körpern. Wir nehmen z. B. an, der Körper A sei genötigt, mit *vier* anderen Körpern A_1, A_2, A_3, A_4 in Berührung zu bleiben, die Berührung sei *reibungslos* und die vier Achsen s_1, s_2, s_3, s_4, welche durch die Berührungspunkte senkrecht zu den unendlich kleinen Berührungsflächen gelegt werden, seien *unabhängig* voneinander. Bei jeder dann noch möglichen Bewegung des Körpers A haben die starr mit ihm verbundenen Achsen s keine Schubgeschwindigkeit, sie sind also *Nullachsen* jeder möglichen Bewegung. Es bleiben in diesem Falle, wie im Abschnitt 21 sich ergab, nur

$$6 - 4 = 2$$

voneinander unabhängige Bewegungen (Q) und (Q_1) übrig, welche durch die vier Nullachsen s_1, s_2, s_3, s_4 bestimmt sind. Der Körper A hat also nur *zwei* Freiheitsgrade. Zu den Kräften (P), die auf den Körper A einwirken, kommen dann noch die vier Stützkräfte S_1, S_2,

S_3, S_4, welche von den Körpern A_1, A_2, A_3, A_4 auf den Körper A in den Achsen s_1, s_2, s_3, s_4 übertragen werden. Zwischen den sämtlichen auf den Körper A einwirkenden Kräften (P) und (S) bleiben selbstverständlich die *sechs* Gleichgewichtsbedingungen bestehen. Aber unter diesen sechs Bedingungen lassen sich nur *zwei*, nämlich *ebensoviele* wie *Freiheitsgrade vorhanden sind*, bilden, die nur die Kräfte (P) und *nicht* die Stützkräfte (S) enthalten. Es sind dies die Gleichungen:

$$[(P), (Q)] = 0, \quad [(P), (Q_1)] = 0,$$

aus welchen die Kräfte (S) herausfallen, weil die Schubgeschwindigkeiten der Achsen s in den Bewegungen (Q) und (Q_1) gleich null sind.

33. Literarische Notizen.

Der wesentliche Inhalt der vorstehenden Abhandlung findet sich in meinem Aufsatze: *Theorie der Streckensysteme*, Zivilingenieur 1888, S. 691.

Zu weiteren Studien sind besonders zu empfehlen:

Fiedler, *Geometrie und Geomechanik*. Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1876, S. 186; diese Abhandlung enthält eine ausführliche Würdigung der einschlägigen umfangreichen Literatur.

Poinsot, *Eléments de Statique*, achte Auflage, Paris 1842; enthält als Anhang die beiden wichtigen Abhandlungen: Sur la composition des moments et des aires, und Théorie nouvelles de la rotation des corps, die auch im Journal de l'école polytechnique 1806 und 1834 veröffentlicht wurden.

Möbius, *Lehrbuch der Statik*, 1837; Gesammelte Werke, Bd. 3; besonders wichtig ist Kapitel VI, die *Theorie der Momente*.

Chasles, *Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide dans l'espace*. Comptes rendus 1843 p. 1420.

Die hier ohne Beweis mitgeteilten Eigenschaften werden bewiesen von:

E. de Jonquières, *Mélanges de géométrie pure*, Paris 1856.

Plücker, *Neue Geometrie des Raumes*, 1868; insbesondere die Linien-Komplexe des ersten Grades, S. 1—148.

Ball, *The Theorie of Screws*, Dublin 1876.

Schell, *Theoretische Mechanik*, 1879; insbesondere erster Teil: Geometrie der Streckensysteme.

E. Timerding, *Geometrische Elemente der Statik und Kinematik des starren Körpers*, Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, 2.

In den Werken von Schell und Timerding finden sich ausführliche Literaturangaben.

Auf einzelne Abschnitte der vorstehenden Abhandlung beziehen sich folgende Notizen:

Möbius verdanken wir:

die Begriffe *Achse* und *Strecke*, Gesammelte Werke, Bd. I, S. 25,

die Darstellung der Drehgeschwindigkeit eines Körpers durch eine Strecke, Bd. I, S. 552,

den Begriff der *Schubgeschwindigkeit* einer Achse und ihre Bestimmung durch die Projektion der Geschwindigkeit eines ihrer Punkte, Bd. I, S. 558 und Bd. III, S. 265,

die Eigenschaften der Geschwindigkeitskugeln, der Nullachsen und der Nullebenen der Körperpunkte, Bd. III, S. 106 und 118,

endlich die Darstellung der Schubgeschwindigkeit einer Achse als das Moment der Drehgeschwindigkeitsstrecke; Bd. I, S. 558 und Bd. III, S. 265.

Der Satz, daß unendlich kleine Drehungen eines starren Körpers sich zusammensetzen wie Kräfte, wurde in die deutsche Literatur eingeführt durch *Möbius*, Bd. I, S. 545 und Bd. III, S. 263. Nach einer Notiz von ihm, entnommen aus *Ide*, *System der reinen und angewandten Mechanik fester Körper*, ist dieser Satz sehr alt und stammt aus Italien. Es wäre von Interesse, den Ursprung kennen zu lernen.

Die tetraedrischen Koordinaten in der von uns benutzten Form wurden eingeführt durch *Zeuthen*, Notes sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace, Mathematische Annalen 1869, S. 432; in einer anderen Form von *Cayley*, On the six coordinates of a line, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, T. XI, p. 290.

Die Poinsotsche Darstellung einer Kräftegruppe durch sechs Koordinaten, nämlich durch *drei* endliche Kräfte in den Achsen eines Koordinatensystems und drei unendlich kleine Kräfte in den unendlich fernen Geraden der Koordinatenebenen, unterscheidet sich von der Cayley-Zeuthenschen übrigens nur durch die Größe des Koordinatentetraeders. Sowohl Zeuthen als auch Cayley bestimmen die Momente der Streckengruppen durch ihre Koordinaten.

Die Bedeutung des Momentes zweier Streckengruppen als Arbeitsgeschwindigkeit erkannte *Klein*, *Notiz*, *betreffend den Zu-*

sammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper, Mathematische Annalen, 1871, S. 413.

Die Abhängigkeit der Achsen voneinander behandelte zuerst *Möbius*, Bd. III, S. 137.

Eine graphische Lösung der im Abschnitt 22 behandelten Aufgabe findet sich in meinem Aufsatz: *Eine Aufgabe der graphischen Statik*, Zivilingenieur 1889, S. 237.

Die Eigenschaften der konjugierten Achsen und Strecken, die zum Teil bereits von Möbius abgeleitet waren, Bd. III, S. 118, bilden die Grundlage der obengenannten Abhandlung von Chasles.

Die Bedingung, unter der eine Kräftegruppe durch eine gleichwertige Einzelkraft ersetzt werden kann, ist schon von Poinsot angegeben worden. Von Poinsot wurden auch die Ersetzung einer Kräftegruppe durch eine Einzelkraft in Verbindung mit einem zur Einzelkraft normal gestellten Kräftepaar und die wichtigsten Eigenschaften der Zentralachse entdeckt; Eléments de statique, p. 76 und 136.

Nachdem fast gleichzeitig von *d'Alembert*, Traité de la précession des équinoxes, 1749, und von *Euler*, Découverte d'un nouveau principe de Mécanique, Mémoires de l'Académie de Berlin 1750, gefunden war, daß jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt eine *Drehung* um eine durch diesen Punkt gehende Achse bildet, wurde die Darstellung einer jeden unendlich kleinen Bewegung eines Körpers als Schraubenbewegung zuerst von dem Italiener *Guilio Mozzi*, Discorso matematico sopra il rotamento dei corpi, Napoli 1763, nachgewiesen. Diese Entdeckung blieb unbeachtet und wurde viel später von *Cauchy*, Exercises de Mathématiques 1827, T. II p. 87, noch einmal gemacht.

Abhandlung II.

Die Grundzüge der graphischen Statik.

1. Einleitende Bemerkungen. Die graphische Statik im weiteren Sinne löst statische Aufgaben auf zeichnerischem Wege. Die Methoden, die hierbei regelmäßig oder doch häufig zur Anwendung kommen, bilden den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. In erster Linie gehören hierher die Regeln für die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräftegruppen und für die Bildung von Gleichgewichtsgruppen. Diese Aufgaben stehen in engem Zusammenhange miteinander. In (I, 16), d. h. im Abschnitt 16 der Abhandlung I, wurde für die Darstellung der Tatsache, daß ein starrer Körper unter Einwirkung einer Kräftegruppe im Gleichgewicht sich befindet, der Ausdruck

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \ddagger P_5 \equiv 0$$

eingeführt. Da die Bedeutung desselben darin besteht, daß bei jeder unendlich kleinen Bewegung des starren Körpers die *algebraische Summe* der Arbeitsgeschwindigkeiten aller Kräfte der Gruppe gleich null ist, so darf ein solcher Ausdruck nach den Regeln der algebraischen Summierung umgeformt werden. Es folgt z. B. daraus:

$$\mathbin{+\!\!+} P_5 \equiv P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4$$

und

$$P_1 \ddagger P_3 \ddagger P_5 \equiv \mathbin{+\!\!+} P_2 \mathbin{+\!\!+} P_4.$$

Die *gewendete* Kraft P_5 ist also die Resultante der vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, und die beiden Kräftegruppen, die von P_1, P_3, P_5 und von den *gewendeten* Kräften P_2, P_4 gebildet werden, sind *gleichwertig*. Es folgt ferner, daß die Reihenfolge der Zusammensetzung gleichgültig ist.

Bei der Zusammensetzung von Kräftegruppen und bei der Bildung von Gleichgewichtsgruppen kommen nur Lage, Größe und Sinn der Kräfte, dagegen *nicht* die Lage der Angriffspunkte auf

den Kraftachsen in Betracht; denn je zwei Kräfte auf einer Geraden, die nach Größe und Sinn übereinstimmen, sind gleichwertig (I, 2, 3, 10).

Mit Rücksicht auf die Einfachheit und Deutlichkeit der Zeichnungen empfiehlt es sich, bei allen graphostatischen Darstellungen den *Lageplan* von dem *Kräfteplan* zu trennen, also die Lage der Kraftachsen in *einer* Zeichnung, dem Lageplan, und Größe, Richtung und Sinn der Kräfte in einer *zweiten* Zeichnung, dem Kräfteplan, zur Anschauung zu bringen. In den Abbildungen tragen die Lagepläne und die Kräftepläne die abgekürzten Bezeichnungen L und K.

Aus dem Inhalt der Abhandlung I werden ferner die folgenden Sätze entnommen.

Die rechtwinkligen Projektionen von zwei gleichwertigen Kräftegruppen auf irgend eine Ebene bilden wieder zwei gleichwertige Gruppen (I, 13).

Gleichwertige Kräftegruppen haben gleiche geometrische Summen (I, 13).

Die rechtwinklige Projektion einer Gleichgewichtsgruppe auf irgend eine Ebene bildet wieder eine Gleichgewichtsgruppe (I, 16).

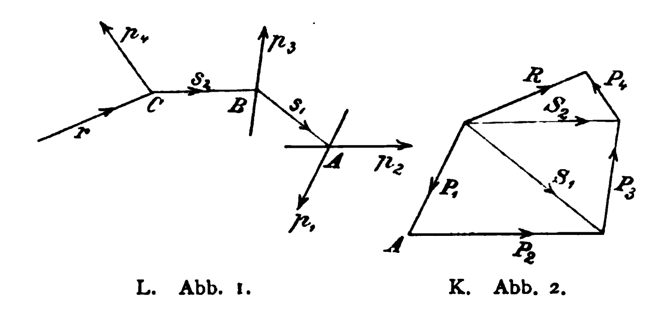
Die geometrische Summe einer Gleichgewichtsgruppe hat die Größe null (1, 16).

A. Ebene Kräftegruppen.

2. Die Zusammensetzung einer gegebenen Kräftegruppe zu ihrer Resultanten. Die Achsen p_1, p_2, p_3, p_4 der gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 sind im *Lageplan* (Abb. 1) dargestellt. Es ist nicht nötig, den *Sinn* der Achsen in Uebereinstimmung mit dem gegebenen Sinn der Kräfte im Lageplan anzugeben; es geschieht aber gewöhnlich, weil die Zeichnung dadurch an Uebersichtlichkeit gewinnt. Die Reihenfolge der Zusammensetzung wird durch die Numerierung der Kräfte angegeben. Zuweilen ist diese Reihenfolge durch den Zweck der Aufgabe gegeben. Ist dies nicht der Fall, so wird die Reihenfolge so gewählt, daß die in Betracht kommenden Schnittpunkte der Kraftachsen möglichst bequem und sicher festzulegen sind. Um die Resultante R der gegebenen Kräftegruppe zu bestimmen, bildet man nacheinander die Gruppen

$$S_1 \equiv P_1 \ddagger P_2$$
$$S_2 \equiv S_1 \ddagger P_3 \equiv P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3$$
$$R \equiv S_2 \ddagger P_4 \equiv P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 .$$

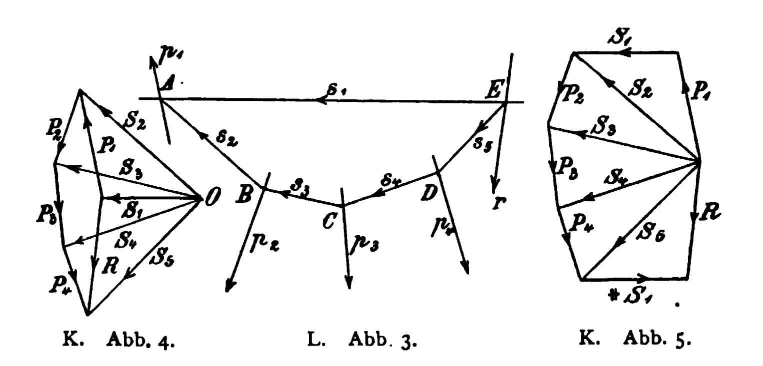
Die Kraft S_1 wird nach Größe, Richtung und Sinn durch die im Kräfteplan (Abb. 2) gebildete geometrische Summe von P_1 und P_2 und darauf ihrer Lage nach durch den Schnittpunkt A der



L. Abb. 1. K. Abb. 2.

beiden Kraftachsen p_1, p_2 (Abb. 1) bestimmt. (I, 19). In gleicher Weise ergibt sich Größe, Richtung und Sinn der Kraft S_2 durch die geometrische Summe von P_1, P_2, P_3 im Kräfteplan, und darauf ihre Lage s_2 durch den Schnittpunkt B der Achsen s_1 und p_3 im Lageplan. Endlich wird die Resultante R bestimmt durch die geometrische Summe der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 und durch den Schnittpunkt C der Achsen s_2 und p_4.

3. Das Seilpolygon. Wenn die Schnittpunkte A, B, C der Kraftachsen im Lageplan (Abb. 1) nicht auf das Zeichnungsblatt



K. Abb. 4. L. Abb. 3. K. Abb. 5.

fallen oder wegen Kleinheit der Schnittwinkel nur unsicher zu ermitteln sind, so fügt man zu der gegebenen Kräftegruppe P_1, P_2, P_3, P_4 (Abb. 3, 4, 5) eine *Gleichgewichtsgruppe*:

$$S_1 + S_1 = 0$$

von geeigneter Lage hinzu, wodurch die Resultante der Gruppe

nicht geändert wird (II, 1). Man bildet also, wie im vorigen Abschnitt beschrieben worden ist, die Gruppen:

$$S_2 \equiv S_1 \ddagger P_1$$
$$S_3 \equiv S_2 \ddagger P_2 \equiv S_1 \ddagger P_1 \ddagger P_2$$
$$S_4 \equiv S_3 \ddagger P_3 \equiv S_1 \ddagger P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3$$
$$S_5 \equiv S_4 \ddagger P_4 \equiv S_1 \ddagger P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4$$
$$R \equiv S_5 \dotplus S_1 \equiv S_1 \ddagger P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \dotplus S_1,$$

wodurch zugleich die Resultante:

$$R \equiv P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4$$

bestimmt wird. Die Größe der Kraft S_1 und die Lage ihrer Achse s_1 sind so zu wählen, daß die Schnittpunkte A, B, C, D, E im Lageplan bequem und sicher festzulegen sind; im übrigen ist die Wahl willkürlich.

Die Abbildungen 4 u. 5 zeigen zwei verschiedene Anordnungen des Kräfteplans. In Abb. 4 sind die Summierungsdreiecke der Gruppen:

$$S_1 \ddagger P_1 \equiv S_2, \qquad S_2 \ddagger P_2 \equiv S_3, \qquad S_3 \ddagger P_3 \equiv S_4,$$
$$S_4 \ddagger P_4 \equiv S_5, \quad \dotplus S_1 \ddagger S_5 \equiv R$$

so angeordnet und aneinander gesetzt, *daß das Summierungspolygon*

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \equiv R$$

durch die Kräfte S_1 ***und*** $\dotplus S_1$ ***nicht unterbrochen wird.*** Die Kräfte S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 gehen also von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkte O, *dem Pol des Kräfteplans*, aus. In der ***zweiten*** Anordnung (Abb. 5) sind die Kräftedreiecke so angeordnet und aneinander gesetzt, ***daß sie einander nicht decken.*** Die Aufeinanderfolge der Kräfte bei der geometrischen Summierung ist also folgende:

$$P_1 \ddagger S_1 \equiv S_2, \qquad S_2 \ddagger P_2 \equiv S_3, \qquad S_3 \ddagger P_3 \equiv S_4,$$
$$S_4 \ddagger P_4 \equiv S_5, \qquad S_5 \dotplus S_1 \equiv R.$$

Diese Anordnung gewährt den Vorteil der größeren Uebersichtlichkeit, wodurch Flüchtigkeitsfehler vermieden werden. Dagegen ist der ersten Anordnung der Vorzug zu geben, wenn es die Absicht ist, nicht nur die Resultante der *ganzen* Kräftegruppe zu bestimmen, sondern außerdem die Resultante einer jeden Teilgruppe von Kräften, die bei der Zusammensetzung aufeinander folgen. Um beispielsweise die Resultante R_1 der Kräftegruppe P_1, P_2, P_3 zu ermitteln, hat man zu beachten, daß:

$$S_4 \equiv S_1 \ddagger P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3$$

oder:

$$S_4 \dotplus S_1 \equiv P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \equiv R_1$$

ist. Die Achse r_1 der Resultante R_1 geht also im Lageplan durch den Schnittpunkt der beiden Achsen s_4 und s_1. Im Kräfteplan der Abb. 4 kann Größe, Richtung und Sinn von R_1 ohne weiteres durch die geometrische Summe

$$R_1 = P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3$$

bestimmt werden, während bei der Anordnung der Abb. 5 es nötig wird, zu der geometrischen Summe der Kräfte P_1, S_1, P_2, P_3 noch die Kraft $+\!\!+ S_1$ hinzuzufügen.

Dem Polygon der Achsen $s_1, s_2, s_3 \ldots$ im Lageplan hat man den Namen *Seilpolygon* gegeben, weil ein Seil von dieser Form unter Einwirkung der Kräfte P im Gleichgewicht sich befinden würde, wenn es imstande wäre, nicht nur *Zugkräfte*, sondern auch *Druckkräfte* zu übertragen. Die Kräfte S_1, S_2, $S_3 \ldots$ werden *Seilkräfte* genannt. Da die *erste* Seilkraft S_1 nach Belieben gewählt wird, so lassen sich für eine Kräftegruppe (P) unendlich viele verschiedene Seilpolygone bilden.

4. Ebene Gleichgewichtsgruppen. Jede ebene Kräftegruppe läßt sich zu einer Resultanten zusammensetzen (I, 24). Die Bedingung, daß ein starrer Körper unter Einwirkung einer ebenen Kräftegruppe im Gleichgewicht sich befinde, oder daß diese Gruppe nullwertig sei, wird also erfüllt, wenn die Resultante die Größe null hat und nicht unendlich fern liegt, d. h. wenn sie nicht einem Kräftepaare gleichwertig ist. Die erste Bedingung kann durch *zwei* Gleichungen dargestellt werden, welche ausdrücken, daß die algebraischen Summen der Projektionen aller Kräfte der Gruppe in bezug auf zwei Achsen der Ebene gleich null sind. Die zweite Bedingung erfordert eine Momentengleichung.

In besonderen Fällen nimmt *eine* oder es nehmen *zwei* dieser Gleichungen die Form

$$0 = 0$$

an, und die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen ermäßigt sich dann auf zwei oder eins.

Gehen alle Achsen der Kräfte durch einen nicht unendlich fernen Punkt, so kann die Resultante kein Kräftepaar sein, und es fällt dann also die Momentengleichung fort. Sind alle Achsen parallel, so kann durch *eine* Gleichung ausgedrückt werden, daß die geometrische Summe der Gruppe gleich null ist. In diesen beiden Fällen bestehen demnach *zwei* Gleichgewichtsbedingungen.

Fallen die Achsen aller Kräfte mit *einer* Achse zusammen, so bleibt die *einzige* Bedingung, daß die *algebraische* Summe der Kräfte gleich null sein muß.

In jedem anderen Falle ist die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen *drei*. Eine statische Aufgabe, die sich auf das Gleichgewicht einer *ebenen* Kräftegruppe bezieht, ist also im allgemeinen nur dann bestimmt, wenn sie nicht mehr und nicht weniger als *drei* unbekannte Größen enthält. Hierbei ist zu beachten, daß eine unbekannte Kraft, von der man nur weiß, daß sie in einer gegebenen Ebene liegt, *drei* unbekannte Größen enthält. Die Zahl der Unbekannten ist *zwei*, wenn die Kraft durch einen gegebenen Punkt der Ebene gehen soll, und *eins*, wenn sie mit einer gegebenen Achse zusammenfallen muß.

Die graphische Lösung einer Gleichgewichtsaufgabe wird damit eingeleitet, daß alle *gegebenen* Kräfte der Gleichgewichtsgruppe zu ihrer Resultanten R zusammengesetzt werden. Diese Gruppe enthält dann außer der bekannten Kraft R höchstens *drei* Kräfte P_1, P_2, P_3, auf die sich die drei unbekannten Größen der Aufgabe verteilen. Die wichtigsten Formen der Gleichgewichtsaufgabe:

$$R \ddagger P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 = 0$$

sind demnach folgende drei:

Erstens: $$R \ddagger P_1 = 0.$$

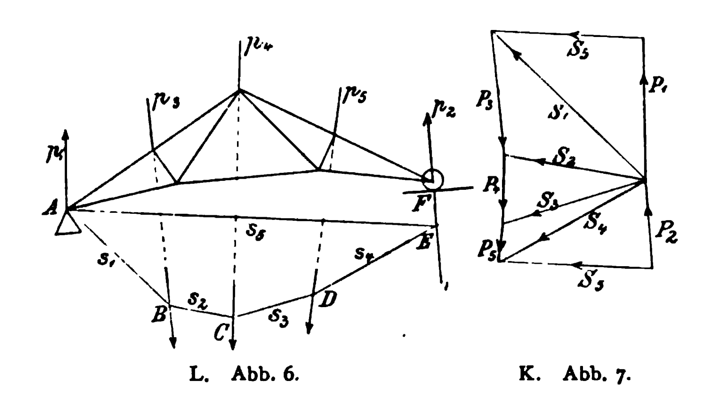
Die Gleichgewichtsgruppe enthält nur *eine* unbekannte Kraft P_1, von der Lage, Größe und Sinn zu bestimmen sind. Die Lösung dieser Aufgabe:

$$P_1 = {+\!\!+} R$$

ist bereits in den vorhergehenden beiden Abschnitten enthalten: Man bestimmt die Resultante R der gegebenen Kräfte und wendet den Sinn derselben.

Zweitens: $$R \ddagger P_1 \ddagger P_2 = 0.$$

Die unbekannte Kraft P_1 geht durch einen gegebenen Punkt A, und die unbekannte Kraft P_2 fällt mit einer gegebenen Achse p_2 zusammen.



L. Abb. 6. K. Abb. 7.

Erstere enthält demnach *zwei* unbekannte Größen, letztere nur *eine*. Abb. 6 zeigt ein Beispiel. Der Dachbinder AF trägt die gegebenen Lasten P_3, P_4, P_5. Er ruht auf einer festen Stütze A und einer reibungslosen Gleitstütze F. Die Stützkraft P_1 hat also eine *unbekannte*, die Stützkraft P_2 dagegen eine *gegebene* Richtung. Um diese beiden Stützkräfte zu bestimmen, verbindet man die gegebenen Lasten P_3, P_4, P_5 durch ein Seilpolygon s_1, s_2, s_3, s_4 *und legt die erste Seite s_1 durch den gegebenen Punkt A*. Demnach ist:

$$S_4 \equiv S_1 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \ddagger P_5,$$

und aus der Gleichgewichtsbedingung:

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \ddagger P_5 \equiv 0$$

folgt:

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger S_4 +\!\!+ S_1 \equiv 0$$

oder:

$$S_1 +\!\!+ P_1 \equiv P_2 \ddagger S_4 \equiv S_5,$$

d. h. die Resultante S_5 der beiden Kräfte S_4 und P_2 ist gleichwertig oder muß zusammenfallen mit der Resultanten aus der Kraft S_1 und der gewendeten Kraft P_1. Die Achse s_5 wird bestimmt durch die beiden Schnittpunkte A und E der Achsen s_1, p_1 und s_4, p_2. Demnach können im Kräfteplan (Abb. 7) die beiden Kräftedreiecke:

$$S_5 \equiv S_1 +\!\!+ P_1 \text{ und } S_5 \equiv P_2 \ddagger S_4$$

gebildet und die beiden unbekannten Kräfte P_1, P_2 bestimmt werden.

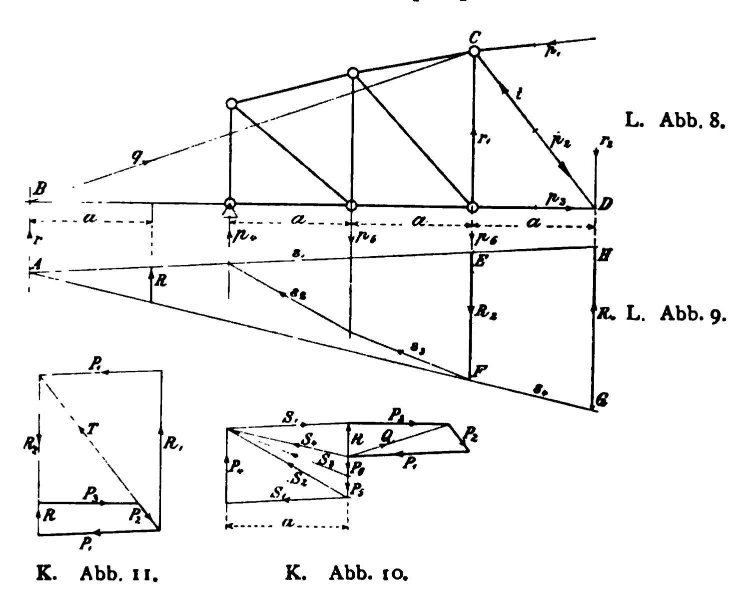
Die geometrische Gleichgewichtsbedingung, die hier zur Anwendung gebracht wurde, kann ausgesprochen werden durch den Satz: ***Das Seilpolygon einer Gleichgewichtsgruppe muß ein geschlossenes Polygon bilden***, und dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus der Ueberlegung, daß irgend eine Kraft S_5 zusammengesetzt mit einer ***nullwertigen*** Kräftegruppe als Resultante wieder die Kraft S_5 ergeben muß. Demgemäß nennt man die letzte Seite s_5 eines solchen Seilpolygons die *Schlußlinie* desselben.

Sind in der vorstehenden Aufgabe alle fünf Kräfte parallel, z. B. lotrecht, so bleibt die Lösung unverändert. In diesem Falle ist es jedoch unnötig, die erste Seilpolygonseite s_1 durch den Punkt A zu legen, weil die Richtung der Achse p_1 gegeben und also ihr Schnittpunkt mit s_1 auch bei jeder anderen Lage des Seilpolygons bestimmt ist.

Drittens: $$R \ddagger P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \equiv 0.$$

Die drei unbekannten Kräfte P_1, P_2, P_3 fallen mit gegebenen Achsen p_1, p_2, p_3 zusammen, enthalten also je *eine* unbekannte Größe.

Abb. 8 zeigt ein Beispiel. Die Gleichgewichtsgruppe besteht aus der gegebenen Stützkraft P_4, den beiden gegebenen Lasten P_5, P_6 und den drei unbekannten Stabkräften P_1, P_2, P_3. Durch das Seil-



L. Abb. 8.

L. Abb. 9.

K. Abb. 11.

K. Abb. 10.

polygon s_1, s_2, s_3, s_4 (Abb. 9) mit dem zugehörigen Kräfteplan (Abb. 10) wird die Resultante

$$R \equiv P_4 \ddagger P_5 \ddagger P_6$$

der ***gegebenen*** Kräfte bestimmt. Aus der Gleichgewichtsbedingung:

$$R \ddagger P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \equiv 0$$

folgt:

$$R \ddagger P_3 \equiv \mathbin{+\!\!+} P_1 \mathbin{+\!\!+} P_2 \equiv Q,$$

d. h. die Resultante Q der beiden Kräfte R und P_3 fällt zusammen mit der Resultanten der beiden *gewendeten* Kräfte P_1 und P_2. Nachdem die Achse q (Abb. 8) durch die beiden Schnittpunkte B und C der Kräfte R, P_3 und P_1, P_2 bestimmt worden ist, können durch die beiden Kräftedreiecke der Gruppen:

$$R \ddagger P_3 \equiv Q \text{ und } P_1 \ddagger P_2 \equiv \mathbin{+\!\!+} Q$$

(Abb. 10) die unbekannten Kräfte P_1, P_2, P_3 bestimmt werden.

Der Lösung können noch zwei andere Formen gegeben werden, indem man in gleicher Weise die Kräftedreiecke der Gruppen:

$$R \ddagger P_1 \equiv \mathbin{+\!\!+} P_2 \mathbin{+\!\!+} P_3 \equiv Q_1$$

und

$$R \ddagger P_2 \equiv \mathbin{+\!\!+} P_1 \mathbin{+\!\!+} P_3 \equiv Q_2$$

bildet. Für die zuletzt genannten Gruppen
oder wenigstens nicht bequem ausführbar,
der Achsen r, p_2 nicht auf das Zeichnungs
Achse q_2 nicht ohne weiteres festgelegt werd

Es kommt insbesondere bei Untersuch
nicht selten der Fall vor, daß *keine* der dre
quem festgelegt werden kann, weil auf der
dazu fehlt. In solchen Fällen ersetzt man di
zwei Kräfte

$$R \equiv R_1 \ddagger R_2,$$

welche durch zwei Schnittpunkte C, D der drei u
P_2, P_3 gehen. Die hierdurch gebildete Gleich

$$R_1 \ddagger R_2 \ddagger P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \equiv$$

ergibt zwei gleichwertige Gruppen

$$R_1 \ddagger P_1 \equiv +\!\!+ R_2 +\!\!+ P_3 +\!\!+ P_2 \equiv$$

deren Resultante T mit der Geraden CD zusam
die beiden Kräfte R_1, R_2 bestimmt worden sin
plan (Abb. 11) zunächst das Kräftedreieck der G

$$R_1 \ddagger P_1 \equiv T$$

und darauf das Kräfteviereck der Gruppe

$$+\!\!+ R_2 +\!\!+ P_3 +\!\!+ P_2 \equiv T$$

gebildet werden.

In den Fällen, welche hier in Frage k
Kräfte P_4, P_5, P_6 und ihre Resultante R in der
es empfiehlt sich dann, auch den Kräften R_1 u
tung zu geben. Man wählt den Kräftemaßstab s
schaftliche Horizontalprojektion der Seilkräfte S_1,
die Fachlänge a (Abb. 8) dargestellt wird.

Dann folgt aus der Gleichwertigkeit:

$$R_1 \ddagger R_2 \equiv R,$$

daß R_1 den Sinn von R und die Größe der Streck

$$R_1 = GH$$

hat, während R_2 den entgegengesetzten Sinn und
Strecke

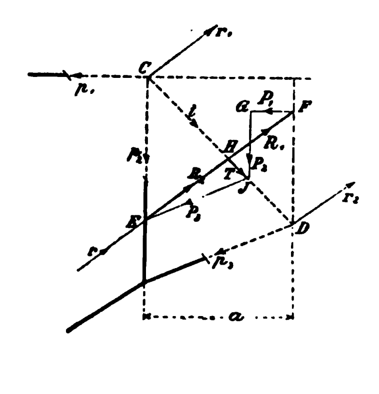
$$R_2 = EF$$

(Abb. 9) erhält (I, 19). Es ist zu beachten, daß
auf der Achse r_2, ferner die Strecke R_2 auf der Ach
wird, und daß bei der Bestimmung dieser beiden Str
der Kraft R nicht in Betracht kommt.

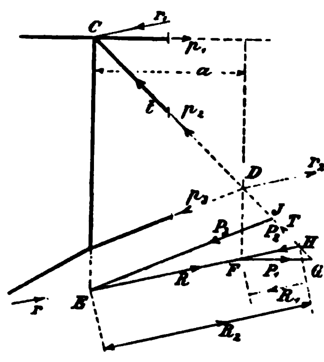
Zwei Beispiele von ähnlicher Form werden durch die Abb. 12 und 13 vorgeführt. In diesen beiden Fällen wurde der Kräfteplan in den Lageplan gelegt, was nur ausnahmsweise zu empfehlen ist. Die Kraft R der Gleichgewichtsgruppe

$$R \ddagger P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \equiv 0$$

wird in beiden Fällen nach *Lage*, Größe und Sinn durch die Strecke EF dargestellt, deren Horizontalprojektion mit der Fach-



L, K. Abb. 12.



L, K. Abb. 13.

länge a übereinstimmt. Wie im ersten Beispiele wird die Kraft R ersetzt durch zwei zu ihr parallel gerichtete Kräfte R_1, R_2, die durch die Punkte C, D gehen. Aus der Gleichwertigkeit

$$R_1 \ddagger R_2 \equiv R$$

folgt dann wieder eine sehr einfache Bestimmung der beiden Kräfte: R_1 wird nach Größe, Richtung und Sinn durch die Strecke HF und R_2 durch die Strecke EH dargestellt. Die Gleichgewichtsgruppe

$$R_1 \ddagger R_2 \ddagger P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \equiv 0$$

ergibt die beiden gleichwertigen Gruppen:

$$R_1 \ddagger P_1 \ddagger P_2 \equiv \mathbin{+\!\!\!+} R_2 \mathbin{+\!\!\!+} P_3 \equiv T,$$

deren Resultantenachse t bestimmt wird durch die beiden Punkte C, D, in denen die Kräfte der beiden Gruppen sich schneiden. Demnach kann zunächst das Kräftedreieck der Gruppe

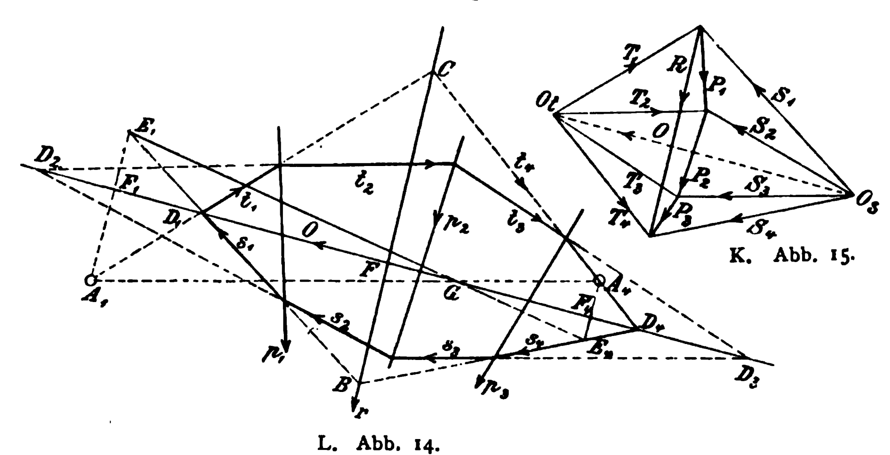
$$\mathbin{+\!\!\!+} R_2 \mathbin{+\!\!\!+} P_3 \equiv T$$

und darauf das Kräfteviereck der Gruppe

$$R_1 \ddagger P_1 \ddagger P_2 \equiv T$$

gebildet werden. Die Resultante T wird in beiden Fällen durch die Strecke HJ dargestellt.

5. Aufgabe. Für eine gegebene Kräftegruppe P_1, P_2, P_3 ein Seilpolygon t_1, t_2, t_3, t_4 zu bilden, von dem zwei be stimmte Seiten t_1, t_4 durch zwei gegebene Punkte A_1, A_4 gehen (Abb. 14 u. 15). Man bestimmt durch irgend ein Seilpolygon s_1, s_2, s_3, s_4 die Resultante R der Kräfte P_1, P_2, P_3, die *zwischen den Seilpolygonseiten* t_1 und t_4 liegen. Die beiden Seiten t_1 und t_4 haben außer der Forderung, daß t_1 durch den Punkt A_1



L. Abb. 14. K. Abb. 15.

und t_4 durch A_4 gehen soll, nur die eine Bedingung zu erfüllen, daß sie die Achse r der Resultanten R in *einem* Punkte schneiden. Die Wahl des Schnittpunktes C ist willkürlich. Die vorliegende Aufgabe ist also unbestimmt und läßt unendlich viele Lösungen zu. Nachdem der Schnittpunkt C gewählt worden ist, wodurch die Richtungen $A_1 C$, $A_4 C$ der Seilpolygonseiten t_1, t_4 bestimmt werden, läßt sich im Kräfteplan (Abb. 15) das Kräftedreieck der Gruppe

$$T_4 \equiv T_1 \ddagger R$$

bilden, wodurch der Pol O_t und die Seilkräfte T_2, T_3 bestimmt werden.

In manchen Fällen kann das Seilpolygon (t) ohne Benutzung des zugehörigen Poles O_t gebildet werden, indem man die folgende Eigenschaft der beiden Seilpolygone (s) und (t) zur Anwendung bringt. Beachtet man nämlich, daß

$$\begin{aligned} S_2 &\equiv S_1 \ddagger P_1, \qquad & T_2 &\equiv T_1 \ddagger P_1 \\ S_3 &\equiv S_2 \ddagger P_2, & T_3 &\equiv T_2 \ddagger P_2 \\ S_4 &\equiv S_3 \ddagger P_3, & T_4 &\equiv T_3 \ddagger P_3 \end{aligned}$$

ist, so folgt:

$$S_1 +\!\!+ T_1 \equiv S_2 +\!\!+ T_2 \equiv S_3 +\!\!+ T_3 \equiv S_4 +\!\!+ T_4 \equiv O.$$

Die Schnittpunkte D_1, D_2, D_3, D_4 der in beiden Seilpolygonen einander entsprechenden Seiten (s_1, t_1), (s_2, t_2), (s_3, t_3), (s_4, t_4) liegen also auf einer Achse o, der *Schnittachse* der beiden Seilpolygone (s), (t). Die zur Achse o parallel gerichtete Kraft O wird im Kräfteplan (Abb. 15) durch die Strecke $O_s O_t$ dargestellt, welche die beiden Pole O_s, O_t verbindet und die geometrischen Summen

$$S_1 \dotplus T_1 \equiv S_2 \dotplus T_2 \equiv S_3 \dotplus T_3 \equiv S_4 \dotplus T_4 \equiv O$$

bestimmt.

Die Schnittachse o wird, wenn die beiden Seiten t_1 und t_4 gewählt worden sind, durch die beiden Schnittpunkte D_1, D_4 der Seitenpaare (s_1, t_1) und (s_4, t_4) bestimmt. Die übrigen Seiten t_2, t_3 des zu bildenden Seilpolygons werden dann durch die Schnittpunkte D_2, D_3 der Achsenpaare (s_2, o), (s_3, o) festgelegt, vorausgesetzt, daß diese Punkte auf das Zeichnungsblatt fallen.

Noch eine andere Eigenschaft der beiden Seilpolygone (s), (t) ist hier zu erwähnen. Die Achse r, welche die Schnittpunkte B, C der Achsenpaare (s_1, s_4), (t_1, t_4) verbindet, schneidet die Achse o im Punkte F. Eine durch den Punkt A_1 parallel zu r gelegte Gerade $A_1 E_1$ schneidet o im Punkte F_1 und s_1 im Punkte E_1. Eine zweite durch den Punkt A_4 zu r parallel gelegte Gerade $A_4 E_4$ schneidet o im Punkte F_4 und s_4 im Punkte E_4. Durch diese Geraden entstehen die ähnlichen Figuren:

$$D_1 A_1 F_1 E_1 \sim D_1 CFB$$

und

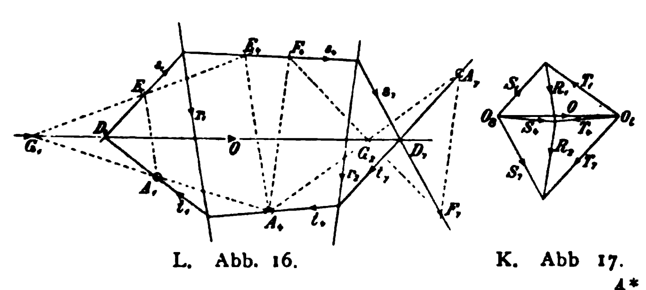
$$D_4 A_4 F_4 E_4 \sim D_4 CFB,$$

d. h. es ist:

$$A_1 F_1 : F_1 E_1 = CF : FB = A_4 F_4 : F_4 E_4 .$$

Hieraus folgt, daß *die beiden Geraden $A_1 A_4$ und $E_1 E_4$ in einem Punkte G der Achse o sich schneiden.* Diese Eigenschaft kommt in der folgenden Aufgabe zur Anwendung.

6. Aufgabe. Für eine gegebene Kräftegruppe P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 in den Abb. 16 und 17 ein Seilpolygon t_1, t_2 ...



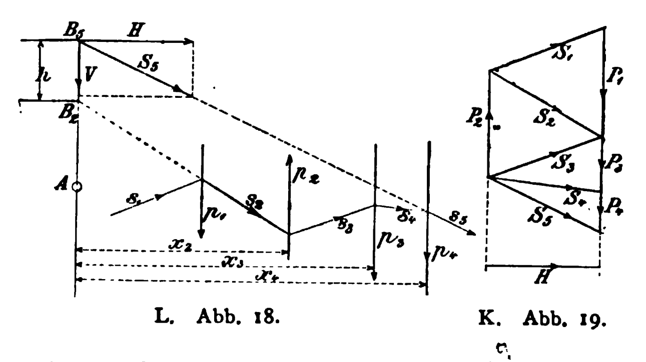
L. Abb. 16. K. Abb 17.

t_7 zu bilden, von dem drei bestimmte Seiten t_1, t_4, t_7 durch drei gegebene Punkte A_1, A_4, A_7 gehen. In der Zeichnung sind nur die hier in Betracht kommenden Kräfte und deren Achsen dargestellt, nämlich außer S_1 und T_1 die Kräfte

$$R_1 \equiv P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3, \qquad R_2 \equiv P_4 \ddagger P_5 \ddagger P_6$$
$$S_4 \equiv S_1 \ddagger R_1, \qquad T_4 \equiv T_1 \ddagger R_1$$
$$S_7 \equiv S_4 \ddagger R_2, \qquad T_7 \equiv T_4 \ddagger R_2$$
$$O \equiv S_1 \mathbin{+\!\!+} T_1 \equiv S_4 \mathbin{+\!\!+} T_4 \equiv S_7 \mathbin{+\!\!+} T_7.$$

Durch die zwei Bedingungen, daß die Seilpolygonseite t_1 durch den Punkt A_1 und t_4 durch A_4 gehen soll, ist nach Anleitung des vorigen Abschnittes ein Punkt G_1 der Schnittachse o der beiden Seilpolygonene (s) und (t) bestimmt. Ebenso ergibt sich ein zweiter Punkt G_2 der Achse o aus den beiden Bedingungen, daß t_4 durch A_4 und t_7 durch A_7 gehen soll. Man zieht, um diese beiden Punkte und dadurch die Schnittachse o festzulegen, die Geraden A_1E_1, A_4E_4 parallel zur Achse r_1, ferner A_4F_4 und A_7F_7 parallel zur Achse r_2 und erhält die Punkte G_1, G_2 durch die Geraden $A_4A_1G_1$, $E_4E_1G_1$, $A_4G_2A_7$, $F_4G_2F_7$. Die Achse o schneidet die Seilpolygonseiten s_1, s_4, s_7 in den Punkten D_1, D_4, D_7, welche zunächst die Lage der Seilpolygonseiten t_1, t_4, t_7 und dadurch auch die Lage der übrigen Seiten t_2, t_3 ... bestimmen. Erforderlichen Falls, wenn nämlich die Schnittpunkte D nicht bequem liegen, wird der Kräfteplan zu Hilfe genommen, in dem der Pol O_t durch die Richtungen zweier Seilkräfte, z. B. T_1 und T_7, bestimmt wird.

7. Die Bestimmung der statischen Momente paralleler Kräfte vermittels des Seilpolygons (Abb. 18 und 19). Bei



L. Abb. 18. K. Abb. 19.

statischen Untersuchungen, die auf *ebene* Kräftegruppen sich beziehen, kommen nur die *Hauptmomente* für die Punkte der Kraftebene in Betracht (I, 9.). Unter dem Moment einer ebenen Kräftegruppe (P)

in bezug auf einen Punkt A der Ebene, *den Momentenpunkt*, versteht man also die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte in bezug auf die Achse, welche die Ebene im Punkte A *rechtwinklig* schneidet und den Sinn des Sehstrahles hat. Das Moment einer Kraft P ist demnach positiv oder negativ, je nachdem der Momentenpunkt A rechts oder links von der Kraft liegt.

Sind die Kräfte P parallel, wir nehmen an lotrecht, so sind die Horizontalprojektionen aller Seilkräfte S_1, S_2, S_3 ... nach Größe und Sinn einander gleich. Wir nennen diese Kraft H die *Horizontalkraft* des Seilpolygons, oder wenn die Kräfte P nicht lotrecht sind, die *Normalkraft*. Ein solches Polygon kann in besonders bequemer Weise benutzt werden zur Bestimmung des Momentes M einer jeden Gruppe von aufeinander folgenden Kräften, z. B. P_2, P_3, P_4, in bezug auf irgend einen Punkt A der Ebene. Die durch A parallel zu den Kräften P gezogene Gerade AB_2B_5 schneidet die beiden Seilpolygonseiten s_2, s_5, zwischen welchen die Kräfte in der Reihenfolge: P_2, P_3, P_4 zusammengesetzt worden sind, in den Punkten B_2, B_5. Da demnach

$$S_5 \equiv S_2 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4$$

ist, so hat in bezug auf den Punkt B_2 die Kraft S_5 ein ebenso großes Moment wie die Kräftegruppe P_2, P_3, P_4, und in bezug auf diesen Punkt B_2 sind die Momente der Kräfte P_2, P_3, P_4 ebenso groß wie in bezug auf den Punkt A. Um das Moment M von S_5 zu bilden, kann man diese Kraft im Punkte B_5 zerlegen in die Horizontalkraft H und die durch den Momentenpunkt B_2 gehende Kraft V. Wir bezeichnen die Strecke B_2B_5 mit h und geben ihr das positive oder das negative Vorzeichen, je nachdem B_2 rechts oder links von S_5 liegt; im vorliegenden Beispiel ist demnach h positiv. Die Momentengleichung für den Momentenpunkt B_2 ergibt also:

$$Hh = x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4 = M,$$

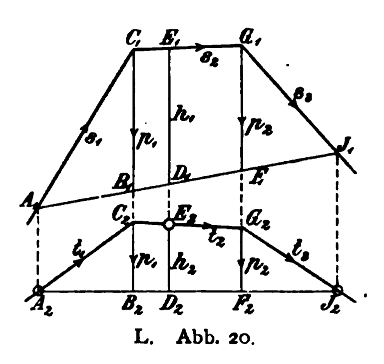
wenn mit x_2, x_3, x_4 die Abstände des Momentenpunktes A von den Achsen p_2, p_3, p_4 bezeichnet werden. Es ist zu beachten, daß die Strecke x_2 *negativ* ist, die Strecken x_3, x_4 dagegen *positive* Werte haben, weil A links von p_2 und rechts von p_3 und p_4 liegt. Ist aus einer Zeichnung eine größere Zahl von Momenten zu entnehmen, so gibt man der Normalkraft H zweckmäßig einen *runden* Wert, damit die Produkte Hh bequem gebildet werden können.

Bildet man zwei Seitenpolygone s_1, s_2, s_3 ... und t_1, t_2, t_3 ... (Abb. 20) für dieselbe Gruppe von Parallelkräften P_1, P_2 ... mit

verschiedenen Normalkräften H_1, H_2, *so verhalten sich die einander entsprechenden Ordinaten* h_1, h_2 *beider Polygone von der Richtung der Kräfte P zueinander umgekehrt wie die beiden Normalkräfte*, d. h. es ist:

$$\frac{B_1 C_1}{B_2 C_2} = \frac{D_1 E_1}{D_2 E_2} = \frac{F_1 G_1}{F_2 G_2} = \frac{H_2}{H_1} = \frac{h_1}{h_2}.$$

Die im vorigen Abschnitt gelöste Aufgabe nimmt demnach für Parallelkräfte die folgende einfachere Form an: s_1, s_2, s_3 ... sei irgend ein Seilpolygon der Kräftegruppe P_1, P_2 ...; zu bilden ist ein zweites Seilpolygon t_1, t_2, t_3 ... unter der Bedingung, daß t_1 durch den gegebenen Punkt A_2, t_2 durch E_2 und t_3 durch J_2 gehen soll. Durch die Gerade $A_2 J_2$ und die entsprechende Gerade $A_1 J_1$ im Seilpolygon (s) werden die beiden Strecken $E_2 D_2$ und $E_1 D_1$ bestimmt. Das Seilpolygon (t) ergibt sich dann aus der Bedingung:



L. Abb. 20.

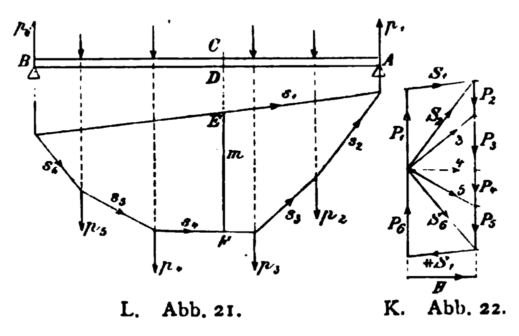
$$\frac{B_2 C_2}{B_1 C_1} = \frac{F_2 G_2}{F_1 G_1} = \frac{D_2 E_2}{D_1 E_1}.$$

Wenn die Kräfte P *nicht* parallel gerichtet sind, so ist die Bestimmung der Momente weniger einfach. Man muß dann vermittels des Seilpolygons unter *Zuhilfenahme des Kräfteplans* die Resultante der Kräftegruppe nach Lage, Größe und Sinn bestimmen, um darauf das Produkt aus der Resultanten und ihrem Abstand vom Momentenpunkte bilden zu können.

8. Bestimmung der Biegungsmomente vermittels des Seilpolygons. In den Abb. 21, 22 ist das Seilpolygon einer Gleichgewichtsgruppe von lotrechten Kräften

$P_1 \ddagger P_2 \ddagger \ldots \ddagger P_6 \equiv 0$,

die auf einen geraden Balken $A\,B$ einwirken, dargestellt und nach Anleitung des Abschnittes 4 zur Bestimmung der Stützkräfte P_1 und P_6 benutzt worden. Unter dem



L. Abb. 21. K. Abb. 22.

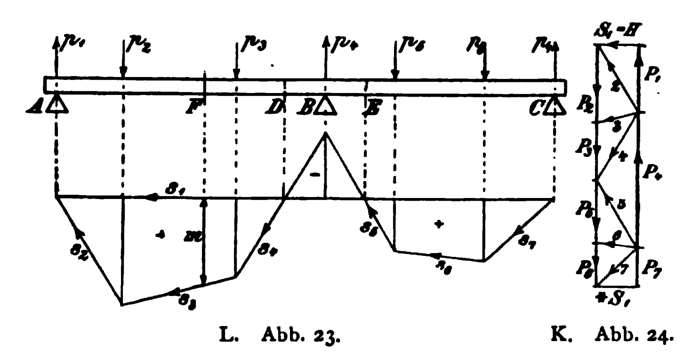
Biegungsmoment des Balkenquerschnittes CD versteht man jede der beiden Momentensummen der links und rechts von CD liegenden Kräfte in bezug auf irgend einen Punkt C des lotrechten Querschnittes. Diese beiden Momente sind der Größe nach gleich, dem Sinne oder Vorzeichen nach einander entgegengesetzt, weil ihre algebraische Summe als das Moment einer Gleichgewichtsgruppe gleich null ist. Man nennt das Biegungsmoment *positiv*, wenn das Moment der *links* vom Balkenquerschnitt CD liegenden Kräfte das positive Vorzeichen trägt; in diesem Falle liegt die *konkave* Seite des gebogenen Balkens *oben*, die *konvexe unten*. Im entgegengesetzten Falle ist das Biegungsmoment *negativ*. Im vorliegenden Beispiele sind demnach die Biegungsmomente aller Balkenquerschnitte positiv. In Abb. 21 ist die Reihenfolge der links vom Querschnitt liegenden Kräfte diese: P_4, P_5, P_6. Daher ist:

$$S_1 \equiv S_4 \ddagger P_4 \ddagger P_5 \ddagger P_6,$$

und das Biegungsmoment M ist zufolge Abschnitt 7 gleich dem Moment der im Punkte E angebrachten Kraft H in bezug auf den Punkt F, d. h. es ist: $M = m\,H,$

wenn mit m die vom Seilpolygon auf dem Lot des Querschnittes CD abgeschnittene Strecke EF bezeichnet wird. Das Seilpolygon bestimmt demnach für *jeden* Balkenquerschnitt Größe und Sinn des Biegungsmomentes M durch die dem Querschnitt entsprechende Strecke m. Die vom Seilpolygon s_1, s_2 ... s_6 umschlossene Fläche wird die *Momentenfläche* des Balkens AB genannt.

Zweites Beispiel. In den Abb. 23 und 24 sind die Biegungs-



L. Abb. 23. K. Abb. 24.

momente eines kontinuierlichen Balkens auf drei Stützen gebildet worden. Da die Gleichgewichtsgruppe

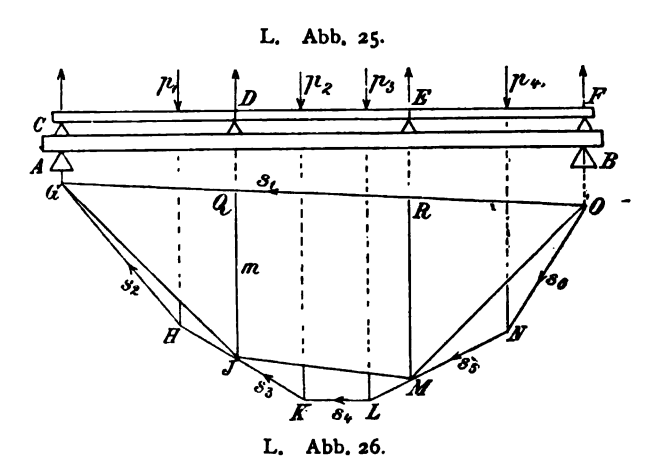
$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger \ldots \ddagger P_7 \equiv 0$$

aus *parallelen* Kräften besteht, so können auf statischem Wege von

den drei Stützkräften P_1, P_4, P_7 nur *zwei* bestimmt werden. Wir nehmen an, *eine* derselben, z. B. P_4, sei gegeben. Dann kann das Seilpolygon $s_2, s_3 \ldots s_7$ mit Hilfe des Kräfteplans (Abb. 24) gebildet werden, und die Schlußlinie s_1 ergibt die beiden Stützkräfte P_1, P_7. Da s_1 zufällig wagerecht ist, so fällt S_1 mit der Horizontalkraft H zusammen. Die Biegungsmomente sind für die Balkenteile AD und EC positiv, für den Balkenteil DE negativ; in D und E wechselt also der Sinn der Krümmung.

Drittes Beispiel. Der Hauptbalken AB (Abb. 25) trägt die Stützen C, D, E, F von drei sogenannten Zwischenbalken, welche nicht zusammenhängen, also keinen kontinuierlichen Balken bilden,

L. Abb. 25.



L. Abb. 26.

sondern über den Stützen voneinander getrennt sind. Die Zwischenbalken nehmen die Lasten $P_1, P_2 \ldots$ auf und übertragen sie durch ihre Stützen auf den Hauptbalken. Um die Biegungsmomente der vier Balken zu bestimmen, ist vermittels des Kräfteplans nur das Seilpolygon der Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 zu bilden. Dasselbe ergibt, wie in den vorhergehenden Beispielen, die Momentenflächen GHJ, $JKLM$, MNO der drei Zwischenbalken. Das hierdurch entstehende Polygon $GJMO$, das dem Seilpolygon der Lasten eingeschrieben ist, bildet die Momentenfläche des Hauptbalkens, wie aus folgender Ueberlegung sich ergibt. Wir bezeichnen die Stützkräfte des Hauptbalkens mit A, B und die der Zwischenbalken mit (C_1, D_1), (D_2, E_2), (E_3, F_3). Die Gleichgewichtsgruppen der vier Balken bestehen demnach aus den Kräften:

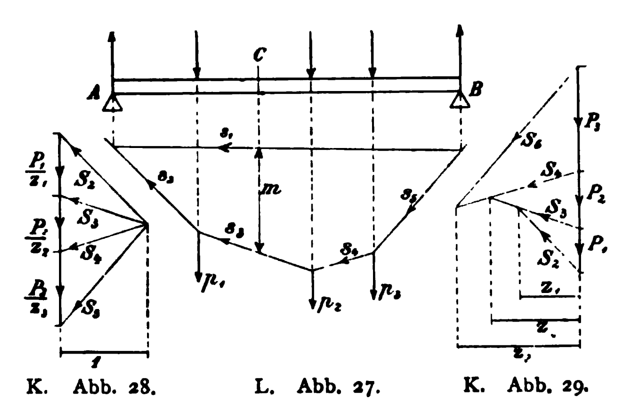
$$C_1 \ddagger P_1 \ddagger D_1 \equiv 0, \quad D_2 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger E_2 \equiv 0, \quad E_3 \ddagger P_4 \ddagger F_3 \equiv 0$$

$$A \mathbin{+\!\!+} C_1 \mathbin{+\!\!+} D_1 \mathbin{+\!\!+} D_2 \mathbin{+\!\!+} E_2 \mathbin{+\!\!+} E_3 \mathbin{+\!\!+} F_3 \ddagger B \equiv 0.$$

In bezug auf den Punkt D ist die Summe der Momente von C_1 und P_1 gleich null, das Moment von P_1 ist also gleich dem von $+\!\!+ C_1$. Wenn die Lasten unmittelbar auf den Hauptbalken einwirkten, so würde das Biegungsmoment des Balkenquerschnittes D durch die Strecke

$$QJ = m$$

dargestellt werden und aus der Momentensumme der beiden Kräfte A und P_1 in bezug auf den Punkt D bestehen. Ebenso groß ist das Biegungsmoment dieses Balkenquerschnittes bei mittelbarer Belastung durch die Zwischenträger; denn es besteht aus der Momentensumme der beiden Kräfte A und $+\!\!+ C_1$. In gleicher Weise wird bewiesen, daß das Biegungsmoment des Balkenquerschnittes E wie bei unmittelbarer so auch bei mittelbarer Belastung durch die Strecke RM dargestellt wird.



K. Abb. 28. L. Abb. 27. K. Abb. 29.

Viertes Beispiel. Die Belastungen des Balkens AB in Abb. 27 sind in der Form $\frac{P_1}{z_1}, \frac{P_2}{z_2}, \frac{P_3}{z_3}$ . . . gegeben; P_1, P_2, P_3 bezeichnen Kräfte und z_1, z_2, z_3 Zahlen. Um die Biegungsmomente in einem solchen Falle zu bestimmen, kann man die Belastungswerte $\frac{P_1}{z_1}, \frac{P_2}{z_2}, \frac{P_3}{z_3}$ berechnen und den Kräfteplan des Seilpolygons (Abb. 28) in bekannter Weise bilden, z. B. mit einer Normalkraft

$$H = 1 \text{ Tonne.}$$

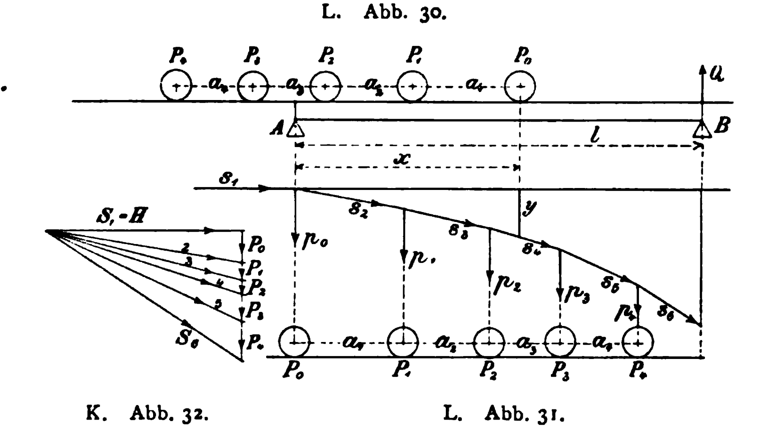
Man kann aber die Rechnung vermeiden, indem man, wie in Abb. 29 geschehen ist, als Lasten die Kräfte P_1, P_2, P_3 aufträgt und das Kräftedreieck der ersten, zweiten, dritten Seilecke mit der Horizontalkraft z_1, z_2, z_3 Tonnen bildet. Gibt man in Abb. 29 der ersten Seilkraft S_2 dieselbe Richtung wie in Abb. 28, so entstehen

Kräftedreiecke, die den entsprechenden Kräftedreiecken in Abb. 28 geometrisch ähnlich sind und daher dieselbe Form des Seilpolygons $s_1, s_2 \ldots s_5$ ergeben. In beiden Fällen ist also das Biegungsmoment des Balkenquerschnitts C:

$$M = mH = m \cdot 1 \text{ Tonne.}$$

9. Anwendung des Seilpolygons auf die Bestimmung der Wirkungen eines beweglichen Lastenzuges.

L. Abb. 30.



K. Abb. 32. L. Abb. 31.

Erstes Beispiel. Ein Lastenzug von gegebener Zusammensetzung Abb. 30):

$$P_0 = 6{,}3 \text{ t}, \quad P_1 = 3{,}9 \text{ t}, \quad P_2 = 2{,}8 \text{ t}, \quad P_3 = 5 \text{ t}, \quad P_4 = 8 \text{ t}.$$
$$a_1 = 2{,}2 \text{ m}, \quad a_2 = 1{,}7 \text{ m}, \quad a_3 = 1{,}4 \text{ m}, \quad a_4 = 1{,}5 \text{ m}$$

bewegt sich von links nach rechts über einen Brückenbalken von

$$AB = l = 8 \text{ m}$$

Stützweite. Für *jede* Lage des Zuges soll die vom Auflager B gegen den Balken wirkende Stützkraft Q bestimmt werden. Bei der in Abb. 30 angegebenen Lage hat das Vorderrad P_0 vom linken Auflager A den Abstand x, und folglich hat die Stützkraft Q die Größe

$$Q = \frac{1}{l}\left(P_0 x + P_1 (x - a_1) + P_2 (x - a_1 - a_2)\right).$$

Um diese Größe auf graphischem Wege darzustellen, wendet man den Lastenzug um und bringt ihn in die Ruhelage der Abb. 31, bei der die Abszisse x des Vorderrades P_0 gleich null ist. Man bildet dann mit einer willkürlich gewählten Horizontalkraft

$$H = S_1 = 40 \text{ Tonnen}$$

vermittels des Kräfteplans (Abb. 32) das Seilpolygon $s_1, s_2 \ldots s_6$.

Dieses Seilpolygon schneidet auf dem Lote des Vorderrades von Abb. 30 eine Länge y ab, die nach Abschnitt 7 aus der Gleichung

$$Hy = P_0 x + P_1 (x_1 - a_1) + P_2 (x - a_1 - a_2) = Ql$$

sich ergibt. Die Ordinate

$$y = \frac{l}{H} Q$$

des Seilpolygons bestimmt also für *jede* Lage dieses Zuges die Größe der Stützkraft

$$Q = y \frac{H}{l}.$$

Der Längenmaßstab für $x, y, l \ldots$ ist

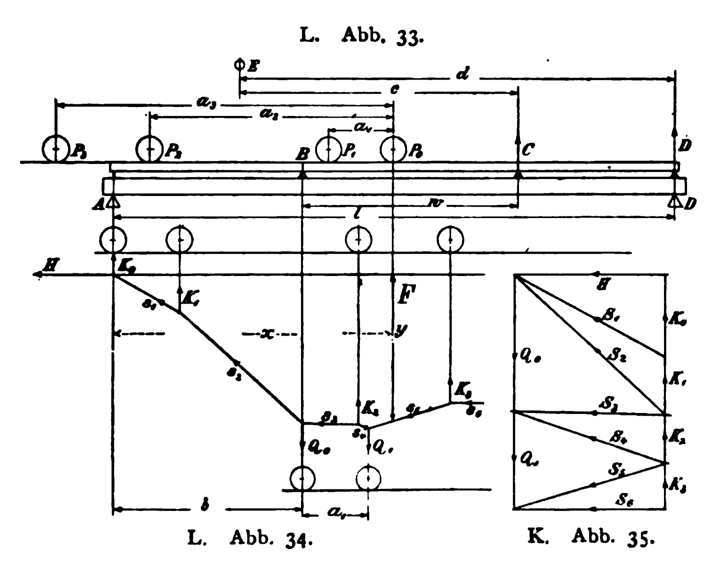
$$1 \text{ mm} = 0{,}15 \text{ m}.$$

Daher ist der Kräftemaßstab der Strecken y als Darstellung von Q

$$1 \text{ mm} = 0{,}15 \text{ m} \cdot \frac{H}{l} = 0{,}15 \text{ m} \frac{40 \text{ t}}{8 \text{ m}} = 0{,}75 \text{ t}.$$

Die Vervollständigung der graphischen Darstellung für solche Lagen des Zuges, bei denen das Vorderrad P_0 die Stütze B bereits überschritten hat, bietet keine Schwierigkeit, für den vorliegenden Zweck aber auch kein Interesse.

L. Abb. 33.



L. Abb. 34. K. Abb. 35.

Zweites Beispiel. Ein Lastenzug P_0, P_3 (Abb. 33) bewegt sich von links nach rechts über den Balken AD, der seine Belastungen durch Vermittelung der Zwischenträger AB, BC, CD aufnimmt.

D bezeichnet den Druck der Stütze D gegen den Hauptbalken und C den Druck der Stütze C des Zwischenbalkens BC ebenfalls gegen den Hauptbalken. Das Moment

$$M = -dD + cC$$

der beiden Kräfte D und C in bezug auf den gegebenen Momentenpunkt E soll graphisch dargestellt werden für die Lagen des Lastenzuges, in welchen das Vorderrad P_0 zwischen A und C sich befindet.

Wir bezeichnen mit a_1, a_2, a_3 die Abstände der Lasten P_1, P_2, P_3 von P_0, ferner mit x den Abstand der Last P_0 von der Stütze A, mit l die Stützweite AD des Hauptbalkens AD und mit w die Stützweite des Zwischenbalkens BC. Für die in Abb. 33 angegebene Lage des Lastenzuges ist also:

$$D = \frac{1}{l}\left(P_0 x + P_1 (x - a_1) + P_2 (x - a_2)\right)$$

und

$$C = \frac{1}{w}\left(P_0 (x - b) + P_1 (x - a_1 - b)\right),$$

wenn mit b die Länge AB bezeichnet wird. Bezeichnet man ferner

die Lasten $P_0 \frac{d}{l}$, $P_1 \frac{d}{l}$ ... mit K_0, K_1 ...

und die Lasten $P_0 \frac{c}{w}$, $P_1 \frac{c}{w}$ ... mit Q_0, Q_1 ...,

so ergibt sich für das Moment M der Ausdruck:

$$M = -K_0 x - K_1 (x - a_1) + Q_0 (x - b) - K_2 (x - a_2) + Q_1 (x - a_1 - b).$$

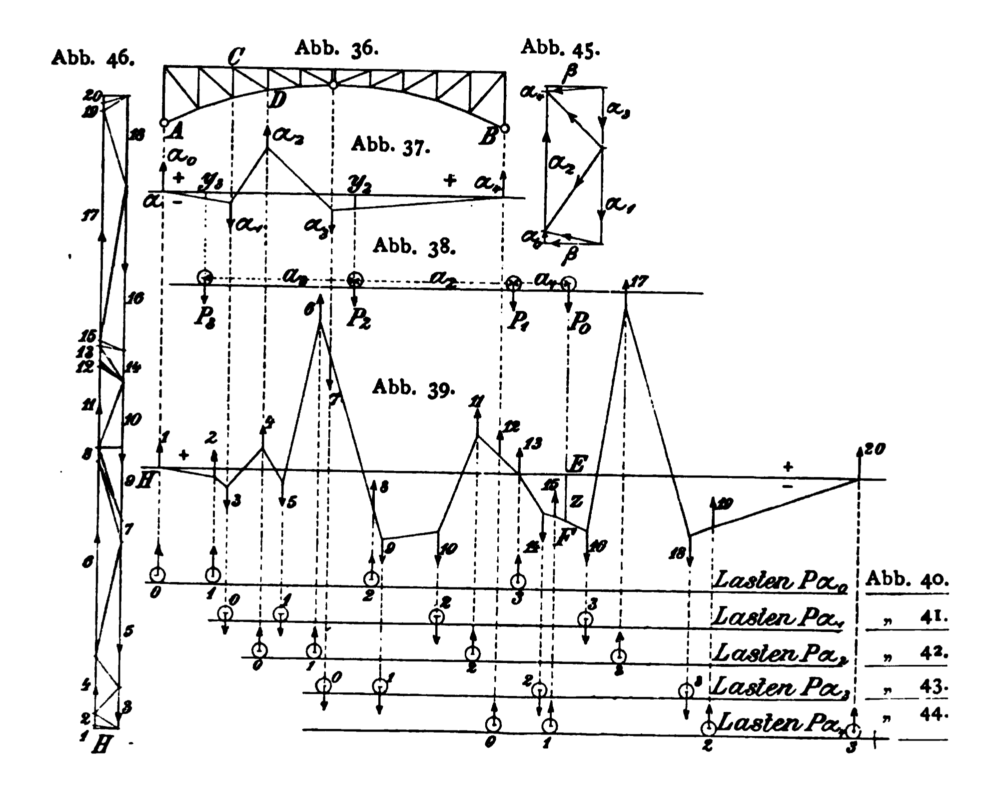
Um diese Größe vermittels eines Seilpolygons (Abb. 34) zu bestimmen, wendet man den gegebenen Lastenzug um und bringt das Vorderrad P_0 einmal in das Lot der Stütze A und das zweite Mal in das Lot der Stütze B. Durch Multiplikation mit den Zahlen $-\frac{d}{l}$ und $+\frac{c}{w}$ werden die Lasten des ersten Zuges in die nach oben zeigenden Kräfte K_0, K_1 ... und die Lasten des zweiten Zuges in die nach unten zeigenden Kräfte Q_0, Q_1 .. verwandelt. Mit Hilfe des Kräfteplanes (Abb. 35) und der willkürlich gewählten Horizontalkraft H bildet man darauf das Seilpolygon s_1, s_2, s_3 .... der Lasten K und Q. In bezug auf den Punkt F, in dem das Lot des Vorderrades P_0 von Abb. 33 die Seilpolygonseite H schneidet, lautet die Momentengleichung des Seilpolygons:

$$Hy = K_0 x + K_1 (x_1 - a_1) - Q_0 (x - b) + K_2 (x - a_2) - Q_1 (x - a_1 - b)$$

oder

$$M = -Hy.$$

Die Ordinate y des Seilpolygons bestimmt demnach für jede Lage des Vorderrades P_0 zwischen A und C die Größe des Momentes M.



Drittes Beispiel. Ein Lastenzug von gegebener Zusammensetzung (Abb. 38):

$$P_0 = 2 \text{ t}, \; P_1 = 7 \text{ t}, \; P_2 = 3 \text{ t}, \; P_3 = 8 \text{ t};$$
$$a_1 = 5 \text{ m}, \; a_2 = 14 \text{ m}, \; a_3 = 13 \text{ m}$$

bewegt sich von links nach rechts über die Fahrbahn des in Abb. 36 im Maßstabe 3 mm = 2 m dargestellten Bogenfachwerks. Es wird hier als gegeben vorausgesetzt, daß die von dem Lastenzuge in dem Fachwerkstabe CD hervorgerufene Stabkraft K durch die Gleichung:

$$K = \frac{1}{4 \text{ m}} (P_0 y_0 + P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3)$$

bestimmt wird, wenn mit y_0, y_1, y_2, y_3 in Metern die Ordinaten des in Abb. 37 dargestellten Einflußpolygons in den Loten der Lasten P_0, P_1, P_2, P_3 bezeichnet werden. In dem vorliegenden Beispiel ist in dem oben angegebenen Maßstabe:

$$y_0 = y_1 = 0, \quad y_2 = -1{,}13 \text{ m}, \quad y_3 = -0{,}62 \text{ m},$$

also

$$K = -\frac{1}{4}(3 \cdot 1{,}13 + 8 \cdot 0{,}62) = -2{,}09 \text{ t}.$$

Das negative Vorzeichen gibt an, daß K bei dieser Belastung eine *Druckkraft* ist. In dem Lot des Vorderrades P_0 ist diese Kraft K in Abb. 39 durch die Ordinate

$$z = EF$$

und zwar in dem Maßstabe

$$1 \text{ mm} = 0{,}33 \text{ t}$$

dargestellt worden. Die negativen Ordinaten z liegen *unter* der Abszissenachse. Wenn diese Ordinate

$$z \text{ mm} = \frac{K}{0{,}33} \text{ mm}$$

für *jede* Lage des Lastenzuges in dem Lot des Vorderrades P_0 aufgetragen wird, entsteht das in Abb. 39 dargestellte Polygon, welches in folgender Weise gebildet wird.

Wir betrachten das Einflußpolygon (Abb. 37) als Seilpolygon und bestimmen seine durch Zahlen dargestellten Lasten α_0, α_1, α_2, α_3, α_4, indem wir in Abb. 45 seinen Kräfteplan bilden und seine Horizontalkraft β willkürlich gleich 1000 setzen. Es ergibt sich:

$$\alpha_0 = -156, \quad \alpha_1 = +1808, \quad \alpha_2 = -2540, \quad \alpha_3 = +976, \quad \alpha_4 = -88.$$

Die positiven Lasten zeigen nach unten, die negativen nach oben. Die Abstände der Lasten α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 vom linken Auflager A sind in dieser Reihenfolge 0, 6, 9, 15, 30 m. Bei der in Abb. 38 angegebenen Laststellung ist der Abstand des Vorderrades P_0 vom linken Auflager A gleich 36 m. Demnach ergeben sich die Ordinaten y_0, y_1, y_2, y_3 des Seilpolygons aus den Momentengleichungen (Abb. 37):

$$\begin{aligned}
1000\, y_0 &= 36\,\alpha_0 + 30\,\alpha_1 + 27\,\alpha_2 + 21\,\alpha_3 + 6\,\alpha_4 = 0 \\
1000\, y_1 &= 31\,\alpha_0 + 25\,\alpha_1 + 22\,\alpha_2 + 16\,\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\
1000\, y_2 &= 17\,\alpha_0 + 11\,\alpha_1 + 8\,\alpha_2 + 2\,\alpha_3 = -1132 \text{ m} \\
1000\, y_3 &= 4\,\alpha_0 = -624 \text{ m}.
\end{aligned}$$

Indem man die Werte der Ordinaten y in die gegebene Gleichung für K einsetzt, entsteht die Gleichung:

$$K = \frac{1}{4000} (36\, P_0 \alpha_0 + 31\, P_1 \alpha_0 + 30\, P_0 \alpha_1 + 27\, P_0 \alpha_2 + 25\, P_1 \alpha_1$$
$$+ 22\, P_1 \alpha_2 + 21\, P_0 \alpha_3 + 17\, P_2 \alpha_0 + 16\, P_1 \alpha_3 + 11\, P_2 \alpha_1 + 8\, P_2 \alpha_2$$
$$+ 6\, P_0 \alpha_4 + 4\, P_3 \alpha_0 + 2\, P_2 \alpha_3 + P_1 \alpha_4).$$

Um diesen Wert und die ähnlich geformten Größen für alle anderen Lagen des Lastenzuges auf graphischem Wege zu ermitteln, wird der Zug *gewendet* und, wie die Abb. 40 bis 44 angeben, in fünf Lagen so gestellt, daß die Vorderräder der fünf Stellungen in den Loten der fünf Lasten α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 stehen. Die Radlasten P_0, P_1, P_2, P_3 sind in der ersten Stellung (Abb. 40) mit der Zahl α_0, in der zweiten (Abb. 41) mit α_1, in der dritten (Abb. 42) mit α_2 usf. zu multiplizieren. Da die drei Zahlen α_0, α_2, α_4 negative Werte haben, so sind die Lasten der drei Züge $P\alpha_0$, $P\alpha_2$, $P\alpha_4$ ***nach oben*** gerichtet. In dem Seilpolygon (Abb. 39) und dem zugehörigen Kräfteplan (Abb. 46) sind die zwanzig Lasten $P\alpha$, wie sie von links nach rechts aufeinander folgen, mit den Nummern 1 bis 20 bezeichnet worden. Für die Horizontalkraft des Seilpolygons wurde die Größe

$$H = 2000 \text{ t}$$

gewählt. Es ist zu beachten, daß die Ordinate z in dem Lot des Vorderrades (Abb. 38 u. 39) negativ ist. Demnach lautet die Momentengleichung für den Punkt F:

$$0 = -Hz + 36\, P_0 \alpha_0 + 31\, P_1 \alpha_0 + 30\, P_0 \alpha_1 + 27\, P_0 \alpha_2 + 25\, P_1 \alpha_1$$
$$+ 22\, P_1 \alpha_2 + 21\, P_0 \alpha_3 + 17\, P_2 \alpha_0 + 16\, P_1 \alpha_3 + 11\, P_2 \alpha_1 + 8\, P_2 \alpha_2$$
$$+ 6\, P_0 \alpha_4 + 4\, P_3 \alpha_0 + 2\, P_2 \alpha_3 + P_1 \alpha_4$$

oder

$$0 = -Hz + K\, 4000 \text{ m}.$$

Folglich ist

$$K = z \frac{2000 \text{ t}}{4000 \text{ m}} = \frac{z}{2 \text{ m}} 1 \text{ t}.$$

Dieselbe Gleichung ergibt sich für jede andere Stellung des Lastenzuges, da in dem vorliegenden Beispiele eine besondere Stellung nicht gewählt wurde. Die Stabkraft K im Stabe CD wird demnach bei *jeder* Stellung des Lastenzuges (Abb. 38) durch die Ordinate z des Seilpolygons (Abb. 39) in der Vertikalen des Vorderrades dargestellt. Da der Längenmaßstab für z, wie in den Abb. 36 bis 44:

$$3 \text{ mm} = 2 \text{ m oder } 1 : 667$$

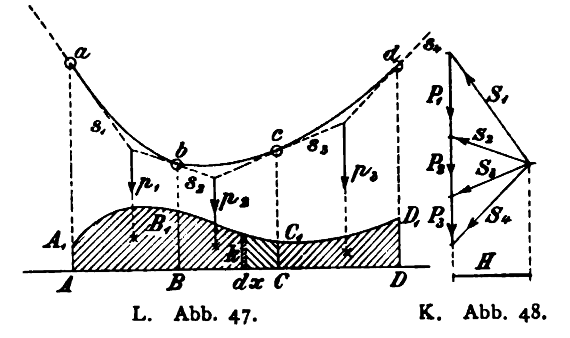
ist, so ist in dem vorliegenden Beispiel für die Strecken s als Darstellung der Kräfte K der Maßstab:

$$1 \text{ mm} = \frac{0{,}667 \text{ m}}{2 \text{ m}} 1 \text{ t} = 0{,}33 \text{ t}$$

anzuwenden.

Bei der Anwendung des im vorstehenden beschriebenen Verfahrens auf die Berechnung der Eisenbahnbrücken von großer Stützweite erreicht man eine wesentliche Vereinfachung, wenn man für die von den Lokomotiven und von den Bahnwagen bedeckten Strecken anstatt der Raddrücke gleichmäßig verteilte Belastungen einführt.

10. Die Seilkurven. Das Seilpolygon geht über in die Seilkurve, wenn die zu verbindenden unendlich kleinen Parallelkräfte in unendlich kleinen Abständen aufeinander folgen. Eine solche stetige Belastung kann dargestellt werden durch die *Belastungsfläche* (Abb. 47). Zerlegt man diese Fläche in unendlich schmale Streifen parallel zur Richtung der Kräfte, so bestimmt die Fläche $k\,dx$ eines solchen Streifens die Belastung der unendlich kleinen Strecke dx. Sind die Kräfte z. B. lotrecht, so bezeichnet die Ordinate k, oder die *Belastungshöhe*, die auf die Längeneinheit der Horizontalprojektion bezogene veränderliche Belastung des Seiles. Liegen einzelne Teile der Belastungsfläche *über*, andere *unter* der Abszissenachse, so werden dadurch die nach unten gerichteten *positiven* und die nach oben gerichteten *negativen* Belastungen voneinander unterschieden.



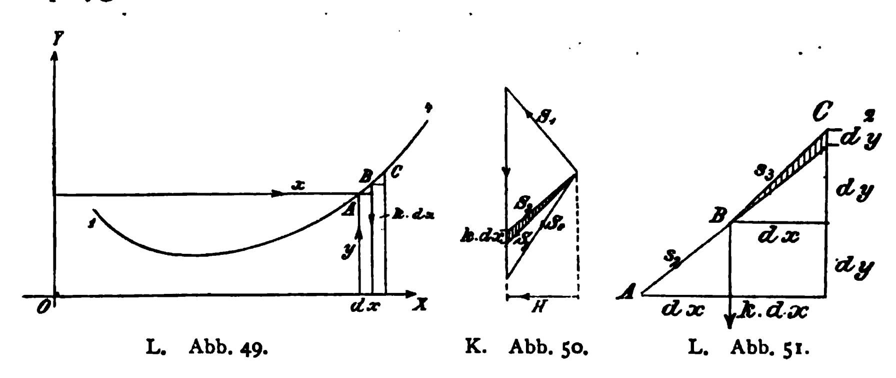
L. Abb. 47. K. Abb. 48.

Um eine Seilkurve für eine gegebene Belastungsfläche zu bilden, zerlegt man die Fläche (Abb. 47) parallel zur Kraftrichtung durch Ordinaten AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 in Teile, und zwar so, daß die Größen der Flächenteile P_1, P_2, P_3 möglichst einfach und ihre Schwerpunkte nach Augenmaß bestimmt werden können. Man bildet alsdann vermittels des Kräfteplans (Abb. 48) das in gestrichelten Linien dargestellte Seilpolygon s_1, s_2, s_3, s_4 der Lasten P_1, P_2, P_3 und bestimmt die Schnittpunkte a, b, c, d der Teilordinaten AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 mit den Seilpolygonseiten s_1, s_2, s_3, s_4. *Das Seil-*

polygon wird von der Seilkurve der stetigen Belastung in den Punkten a, b, c, d berührt. Um sich hiervon zu überzeugen, beachte man, daß z. B.

$$S_3 \equiv S_1 \ddagger P_1 \ddagger P_2$$

ist, und daß P_1 und P_2 die Resultanten der unendlich vielen und unendlich kleinen Lasten bilden, die von der Fläche AA_1C_1C dargestellt werden. Im Punkte c muß daher die Seilkraft der Kurve mit der Seilkraft S_3 des Polygons zusammenfallen, d. h. das Seilpolygon muß in diesem Punkte die Seilkurve berühren.



L. Abb. 49. K. Abb. 50. L. Abb. 51.

11. Die Differentialgleichung der Seilkurve lotrechter Kräfte. In Abb. 49 bezeichnen x, y die Koordinaten eines Punktes A der Seilkurve. Die wagerechte Abszisse x zeigt von links nach rechts, die lotrechte Ordinate y zeigt nach oben. Mit 1 und 4 sind Anfangspunkt und Endpunkt der Seilkurve, mit 2 und 3 die auf A folgenden unendlich kleinen Seilstrecken AB, BC bezeichnet, deren Horizontalprojektionen gleich dx sind. In Abb. 51 sind diese beiden Strecken in unendlich starker Vergrößerung dargestellt. Die Vertikalprojektionen von AB und BC haben die Größen dy und $dy + d^2y$. Die unendlich kleine Belastung des Punktes B ist von der Größe $k\,dx$. Der Kräfteplan (Abb. 50) zeigt die Seilkräfte S_1, S_2, S_3, S_4 und die zwischen S_2 und S_3 liegende Belastung $k\,dx$ des Punktes B. Die in den Abb. 50 und 51 schraffierten beiden Dreiecke sind geometrisch ähnlich, weil ihre Seiten paarweise parallel gerichtet sind. Daher besteht die Beziehung:

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{k\,dx}{H},$$

woraus die Differentialgleichung der Seilkurven mit lotrechter Belastung sich ergibt:

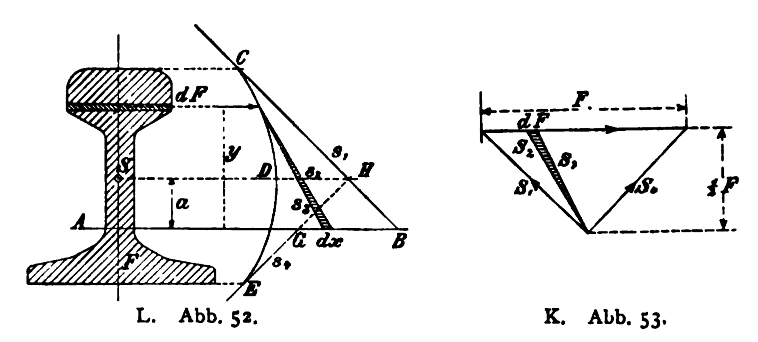
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{k}{H}.$$

Ist beispielsweise die Belastungshöhe k von konstanter Größe, so folgt aus der vorstehenden Gleichung durch Integration:

$$y = a + bx + \frac{k}{2H} x^2.$$

Die Seilkurve ist in diesem Falle also eine Parabel mit lotrechter Achse.

12. **Anwendung der Seilkurve zur Bestimmung des Trägheitsmomentes einer ebenen Fläche in bezug auf eine Achse oder eines Körpers in bezug auf eine Ebene.** Die Abb. 52 zeigt die Querschnittsfläche einer Eisenbahnschiene, deren



L. Abb. 52. K. Abb. 53.

Trägheitsmoment in bezug auf die Achse AB bestimmt werden soll. Man zerlegt zu diesem Zweck die Fläche in Streifen dF parallel zur Achse AB und bildet, wie im Abschnitt 10 beschrieben wurde, die Seilkurve CE der Kräfte dF von der Richtung der Achse AB. Wenn im Kräfteplan (Abb. 53) die Normalkraft gleich $\frac{1}{2}F$, d. h. gleich der Hälfte der ganzen Fläche, gewählt wird, so ist die Fläche

$$F_1 = CDEGBC,$$

welche von der Seilkurve CDE, den beiden äußersten, von den Achsen s_1, s_4 gebildeten Tangenten CB, EG und der Achse GB begrenzt wird, gleich dem Quadrat des Trägheitshalbmessers i der Fläche F in bezug auf die Achse AB. Man bildet also das Trägheitsmoment J durch das Produkt der beiden Flächen F und F_1

$$J = FF_1 = Fi^2.$$

Der Kräfteplan (Abb. 53) zeigt die beiden äußersten Seilkräfte S_1, S_4 und die beiden Seilkräfte S_2, S_3, zwischen welchen die Last dF liegt, so daß

$$S_3 \equiv S_2 \ddagger dF$$

ist. Im Lageplan (Abb. 52) ist die unendlich kleine Strecke, die

auf der Achse AB von den beiden Achsen s_2, s_3 abgeschnitten wird, mit dx bezeichnet. Das von dx, s_2, s_3 gebildete Dreieck ist dem im Kräfteplan von den Strecken dF, S_2, S_3 gebildeten Dreieck geometrisch ähnlich, weil die Seiten der beiden Dreiecke paarweise parallel gerichtet sind. Daher ist, wenn mit y der Abstand des Flächenstreifens dF von der Achse AB bezeichnet wird:

$$dx : y = dF : \frac{1}{2} F$$

oder

$$y^2\, dF = F \frac{y\, dx}{2}.$$

Durch $\frac{y\, dx}{2}$ wird die Fläche des im Lageplan schraffierten Dreiecks von der Basis dx und der Höhe y bestimmt. Bildet man für *jede* Last dF das entsprechende Dreieck, so bedecken alle diese Dreiecke die Fläche F_1, während die Summe der Größen $y^2\, dF$ das Trägheitsmoment J bestimmt. Demnach ist, wie oben angegeben wurde:

$$J = F F_1.$$

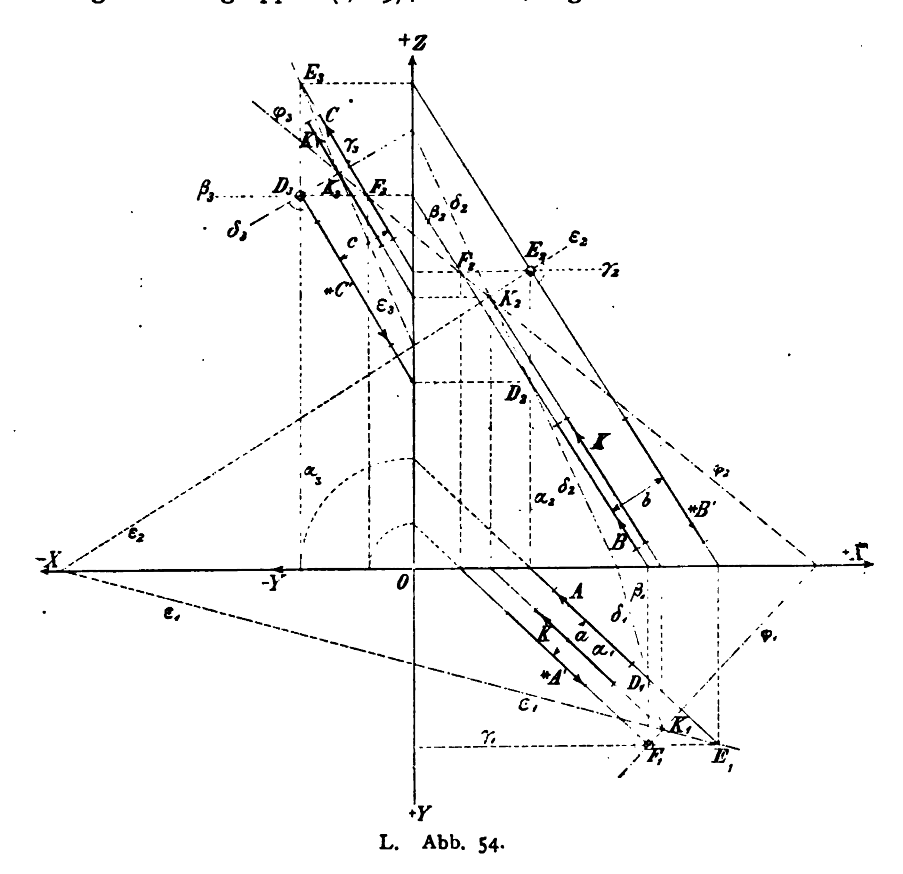
Bezeichnet F die Projektion eines Körpers und AB die Spur einer zur Bildebene senkrecht gestellten Ebene, so wird das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Ebene AB in genau derselben Weise bestimmt, wie oben beschrieben wurde. An die Stelle der Flächenstreifen dF treten die Massen der Körperschichten, in die man den Körper durch Ebenen parallel zu AB zerlegen kann.

B. Kräftegruppen im Raume.

13. Die graphische Zusammensetzung einer gegebenen Kräftegruppe zu einer möglichst einfachen gleichwertigen Gruppe. In den Abschnitten 24 bis 29 der Abhandlung I ist die Zusammensetzung gegebener Kräftegruppen, die auf einen starren Körper wirken, und deren Achsen weder in *einer* Ebene liegen, noch in *einem* Punkte sich schneiden, auf dem Wege der Rechnung ausgeführt worden. Wir verweisen auf jene Abschnitte und benutzen die dort eingeführten Bezeichnungen. Insbesondere erinnern wir daran, daß eine solche Kräftegruppe im allgemeinen nicht durch *eine* Kraft, dagegen durch unendlich viele, aus je *zwei* Kräften bestehende Gruppen ersetzt werden kann. In den folgenden Abschnitten be-

schreiben wir die *graphischen* Lösungen der wichtigsten Fälle, in denen die Aufgabe *bestimmt* ist.

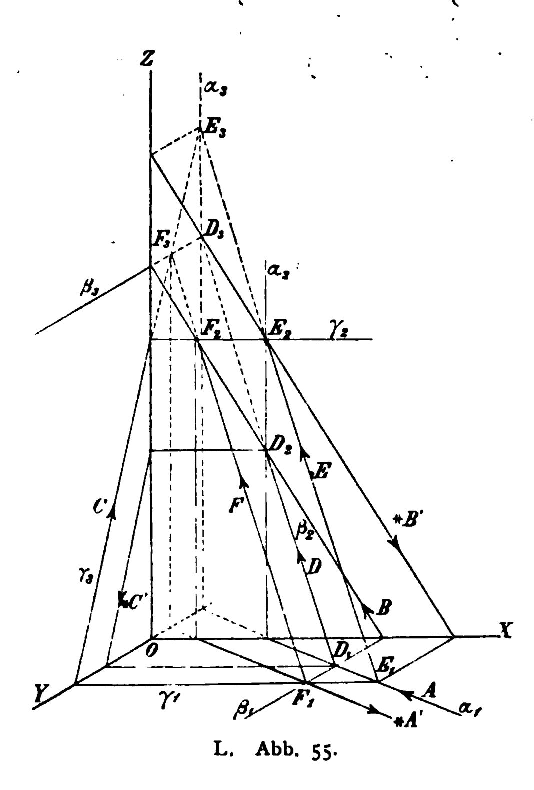
14. Eine gegebene Kräftegruppe *(P)* zu ersetzen durch eine Kraft K in Verbindung mit einem Kräftepaar U, dessen Ebene senkrecht zu K gestellt ist. Die Achse k der Kraft K heißt die *Schraubenachse* oder die *Zentralachse* der mit *(P)* gleichwertigen Kräftegruppen (I, 29). Die Lösung zerfällt in zwei Teile.



L. Abb. 54.

Die Bestimmung der Kraft K. Man projiziere die gegebenen Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . der Gruppe *(P)* auf die Ebenen xy, xz, yz eines rechtwinkligen Koordinatensystems und bestimme die Resultanten A, B, C dieser drei Projektionsgruppen. In Abb. 54 sind nur diese drei Kräfte: A in der xy-Ebene, B in der xz-Ebene und C in der yz-Ebene dargestellt; um die Zeichnung nicht zu überladen, wurden die Kräfte P fortgelassen. Die Kräfte A, B, C

stimmen nach Größe, Richtung und Sinn, nicht aber der Lage nach mit den Projektionen der Kraft K überein; denn K bildet die geometrische Summe der Kräfte P, während A, B, C die geometrischen Summen ihrer Projektionen angeben. Die durch je zwei Projektionen A und B, A und C, B und C bestimmten Kräfte D, E, F haben demnach Größe, Richtung und Sinn der Kraft K und liegen in den Kanten eines dreiseitigen Prismas, durch welches die Lage der Kraft K in folgender Weise bestimmt wird: *die drei Ebenen, welche durch die Kanten D, E, F senkrecht zu den gegenüberliegenden Seitenflächen des Prismas gelegt werden, schneiden sich in der Achse k der Kraft K.* Um diese Behauptung zu beweisen, haben wir folgende Betrachtung anzustellen, wobei wir auf die Abb. 54 und 55 bezug nehmen. Abb. 54 gibt die Darstellung in rechtwinkliger Projektion; übersichtlicher ist Abb. 55 in axonometrischer Darstellung, in der aber nur die Lagen der Kräfte, nicht ihre Größen angegeben sind.



L. Abb. 55.

Die Ebenen ADE, BDF, CEF sind mit α, β und γ bezeichnet. Die Spuren der Ebenen und Kräfte tragen in den Projektionsebenen xy, xz, yz die Kennziffern 1, 2, 3. Wir bezeichnen mit A', B', C' die dritten Projektionen der Kräfte D, E, F, so daß D durch die drei Projektionen A, B, C', ferner E durch die Projektionen A, B', C und F durch A', B, C bestimmt wird. Mit diesen Kräften lassen sich die folgenden gleichwertigen Kräftegruppen bilden:

$$(P) \equiv K \ddagger U \equiv D \ddagger C \mathbin{+\!\!+} C' \equiv E \ddagger B \mathbin{+\!\!+} B' \equiv F \ddagger A \mathbin{+\!\!+} A';$$

denn diese Gruppen haben in bezug auf jede der drei Koordinatenachsen x, y, z gleiche Projektionen und gleiche Momente. Es

ist hierbei zu beachten, daß die Momentensummen von D und $\nparallel C'$ für die Achse x, von E und $\nparallel B'$ für die Achse y und von F und $\nparallel A'$ für die Achse z gleich null sind. Aus den vorstehenden gleichwertigen Kräftegruppen ergeben sich die folgenden, aus je drei Kräftepaaren gebildeten Gleichgewichtsgruppen:

$$0 \equiv (K \nparallel D) \ddagger U \ddagger (C' \nparallel C)$$
$$0 \equiv (K \nparallel E) \ddagger U \ddagger (B' \nparallel B)$$
$$0 \equiv (K \nparallel F) \ddagger U \ddagger (A' - A).$$

Die Ebenen (K, D), (K, E), (K, F) sind in Abb. 54 mit δ, ε, φ bezeichnet. Die durch irgend einen Punkt gelegten Ebenen dreier Kräftepaare, die eine Gleichgewichtsgruppe bilden, schneiden sich in *einer* Geraden; denn die Achse, in der zwei dieser Ebenen sich schneiden, ist eine Nullachse der beiden Kräftepaare und muß daher auch in der Ebene des dritten Paares liegen (I, 17). Wir fassen beispielsweise die zweite Gruppe

$$0 \equiv (K \nparallel E) \ddagger U \ddagger (B' \nparallel B)$$

ins Auge und legen die drei Ebenen (K, E), U und (B', B) durch den Punkt E_2. Die Ebene (B', B), d. i. die xz-Ebene, muß also von der Ebene der unendlich fernen Kraft U und von der mit ε bezeichneten Ebene (K, E) in *einer* Geraden, der Spur ε_2 geschnitten werden. Die Ebene U steht rechtwinklig zu den parallelen Kräften K, E; daher steht ε_2 senkrecht zu den Projektionen B', B jener Kräfte. Man beachte ferner, daß die Ebene (D, F) normal zur xz-Ebene gestellt ist, um zu erkennen, daß die Spur ε_2 und folglich auch die Ebene ε von der Ebene (D, F) rechtwinklig geschnitten wird.

Auf demselben Wege erkennt man, daß die beiden Ebenen (K, D), (E, F) und (K, F), (D, E) rechtwinklig sich schneiden.

Zur Bestimmung der Lage der Kraft K genügen die vier Spuren φ_1, ε_1 und φ_2, ε_2 der beiden Ebenen φ, ε: sie ergeben die Schnittpunkte K_1, K_2 der Kraft K mit den Koordinatenebenen xy und xz. Die Spur φ_1 schneidet im Punkte F_1 die Kraft A' rechtwinklig, während φ_2 durch den Punkt F_2 gegeben ist. Ebenso schneidet die Spur ε_2 die Kraft B' im Punkte E_2 rechtwinklig, während ε_1 durch den Punkt E_1 gegeben ist. Bestimmt man alle neun Spuren der drei Ebenen δ, ε, φ, so erhält man eine Reihe von Proben für die Genauigkeit der Zeichnung: in jeder Projektionsebene müssen die Spuren der drei Ebenen in *einem* Punkte sich schneiden.

Die Bestimmung des Hauptmomentes M des Kräftepaares U (Abb. 56). Projiziert man die gleichwertigen Kräftegruppen

$$K \ddagger U \equiv D \ddagger (C \nparallel C') \equiv E \ddagger (B \nparallel B') \equiv F \ddagger (A \nparallel A')$$

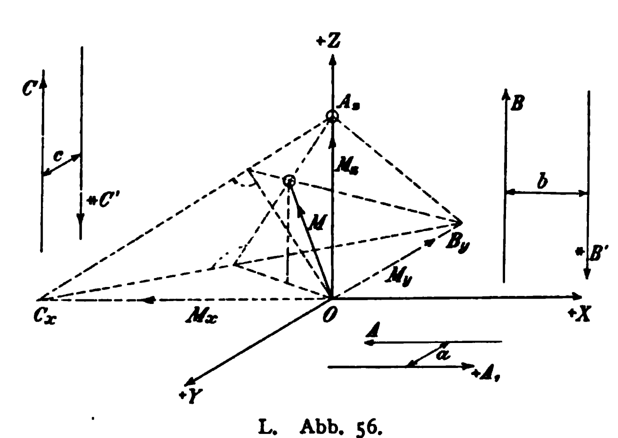
auf die zu K rechtwinklig gestellte Ebene des Kräftepaares U, so entstehen (nach I, 13) vier gleichwertige Kräftepaare, da die Projektionen der Kräfte K, D, E, F verschwinden. *Das Kräftepaar U bildet demnach die gemeinschaftliche Projektion der drei Kräftepaare* $(A \mathbin{+\!\!+} A')$, $(B \mathbin{+\!\!+} B')$, $(C \mathbin{+\!\!+} C')$. Es genügt also, die Hauptmomentenstrecke

$$M_z = Aa$$

des Kräftepaares $(A \mathbin{+\!\!+} A')$ zu bestimmen und diese Strecke auf die zur Kraft K parallel gerichtete Hauptmomentenachse des Kräftepaares U zu projizieren. In der Zeichnung sind zur Probe auch die Hauptmomentenstrecken

$$M_y = Bb,$$
$$M_x = Cc$$

und deren Projektionen auf M gebildet worden. Beim Auftragen der Hauptmomentenstrecken



L. Abb. 56.

M_x, M_y, M_z ist deren *Sinn* zu beachten. Im vorliegenden Beispiel (Abb. 54, 56) ist das Moment von $(C \mathbin{+\!\!+} C')$ für die Achse x negativ, das Moment von $(B \mathbin{+\!\!+} B')$ für die Achse y ebenfalls negativ und das Moment von $(A \mathbin{+\!\!+} A')$ für die Achse z positiv; daher waren M_x und M_y im Sinne der negativen Achsen x, y, die Strecke M_z dagegen im Sinne der positiven Achse z aufzutragen. Werden alle drei Momentenstrecken

$$M_x = OC_x, \quad M_y = OB_y, \quad M_z = OA_z$$

nach einem willkürlich gewählten Maßstabe aufgetragen, so ergibt sich noch eine Probe für die Richtigkeit und Genauigkeit der Zeichnung: da die Hauptmomentenstrecke M des Kräftepaares U die gemeinschaftliche Projektion der drei Strecken M_x, M_y, M_z bildet, *so muß die Ebene $A_z B_y C_x$ rechtwinklig zur Kraft K gestellt sein.*

15. Eine gegebene Kräftegruppe (P) zu ersetzen durch eine Kraft Q, die durch einen gegebenen Punkt N geht in Verbindung mit einem Kräftepaar U_1. (Abb. 57.) Die Kraft Q hat Größe, Richtung und Sinn der geometrischen Summe der ge-

gebenen Kräftegruppe (P), also der Kräfte D, E, F, die nach Anleitung des vorigen Abschnittes bestimmt werden. Durch den gegebenen Punkt N ist auch die *Lage* der Kraft Q bestimmt.

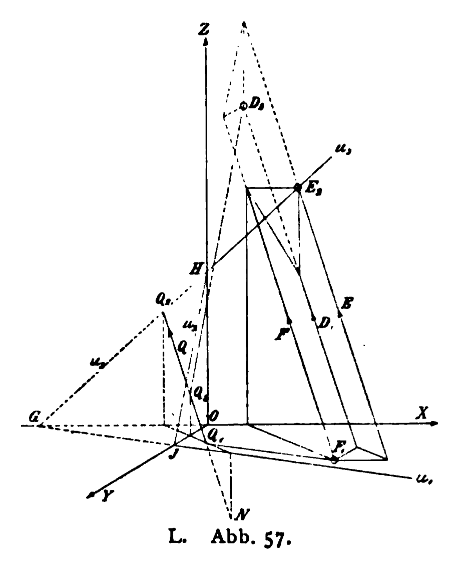
Um ferner das Kräftepaar U_1 zu bestimmen, bildet man aus den gleichwertigen Kräftegruppen:

$$(P) \equiv Q \ddagger U_1 \equiv F \ddagger (A \mathbin{+\!\!+} A') \equiv E \ddagger (B \mathbin{+\!\!+} B') \equiv D \ddagger (C \mathbin{+\!\!+} C')$$

die aus je drei Kräftepaaren zusammengesetzten Gleichgewichtsgruppen:

$$0 \equiv (Q \mathbin{+\!\!+} F) \ddagger U_1 \ddagger (A' \mathbin{+\!\!+} A)$$
$$0 \equiv (Q \mathbin{+\!\!+} E) \ddagger U_1 \ddagger (B' \mathbin{+\!\!+} B)$$
$$0 \equiv (Q \mathbin{+\!\!+} D) \ddagger U_1 \ddagger (C' \mathbin{+\!\!+} C).$$

Die Ebene (Q, F) schneidet die Ebene (A', A), d. i. die xy-Ebene, in der Geraden $Q_1 F_1$, zu der die Spur u_1 der Ebene u des Kräftepaars U_1 parallel gerichtet ist, weil die drei Ebenen der Kräftepaare $(Q \mathbin{+\!\!+} F)$, U_1 und $(A' \mathbin{+\!\!+} A)$ in parallelen Geraden sich schneiden müssen. Ebenso ist die Richtung der Spur u_2 durch die Gerade $Q_2 E_2$ und die Richtung der Spur u_3 durch die Gerade $Q_3 D_3$ bestimmt. In der Zeichnung ist die Ebene u durch den Punkt E_2 gelegt.



L. Abb. 57.

Die zur Ebene u senkrecht gerichtete Hauptmomentenstrecke M_1 des Kräftepaars U_1 wird bestimmt durch die Bedingung, daß in Abb. 56 die Momentenstrecke M die rechtwinklige Projektion der Strecke M_1 bildet. Auf der durch den Punkt O (Abb. 56) senkrecht zur Ebene u gelegten Geraden wird also von der Ebene $A_z B_y C_x$ die Strecke U_1 abgeschnitten; denn projiziert man die beiden gleichwertigen Kräftegruppen

$$Q \ddagger U_1 \equiv K \ddagger U$$

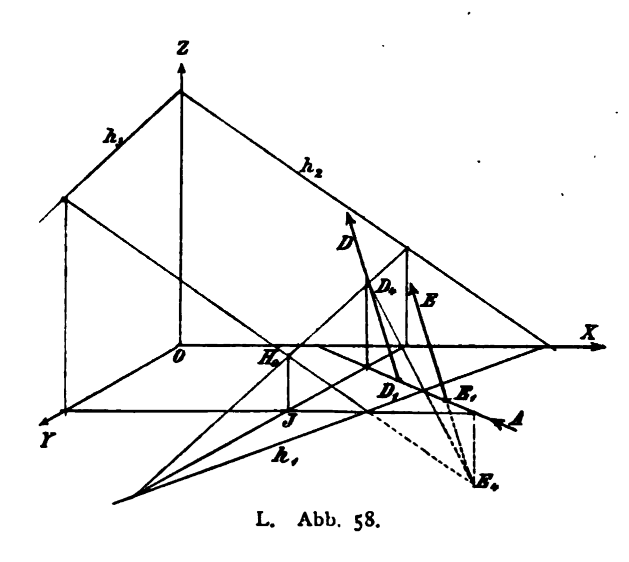
auf die Ebene von U, so müssen sich, da die Projektionen von Q und K verschwinden, als Projektionen zwei gleichwertige Kräftepaare ergeben. Die beschriebene Bestimmung von M_1 ist in Abb. 56 nicht ausgeführt worden, um die Zeichnung nicht zu überladen.

16. Eine gegebene Kräftegruppe (P) zu ersetzen durch ein in einer gegebenen Ebene u_1 liegendes Kräftepaar U_1 in Verbindung mit einer Kraft Q (Abb. 57). Nach dem vorigen Abschnitt ist die Ebene (Q, F) parallel gestellt zur gegebenen Spur u_1, ferner die Ebene (Q, E) parallel zur Spur u_2 und die Ebene (Q, D) parallel zur Spur u_3. Hierdurch wird die *Lage* der unbekannten Kraft Q bestimmt. Die Größen von Q und U_1 ergeben sich wie im vorigen Abschnitt.

17. Den Nullpunkt H_0 einer gegebenen Ebene h in bezug auf eine gegebene Kräftegruppe (P) zu bestimmen (Abb. 58). Da:

$$(P) \equiv F \ddagger (A \mathbin{+\!\!\!+} A') \equiv E \ddagger (B \mathbin{+\!\!\!+} B') \equiv D \ddagger (C \mathbin{+\!\!\!+} C')$$

ist, so liegen die Nullpunkte aller zu den Koordinatenebenen xy, xz, yz parallel gestellten Ebenen auf den Achsen der Kräfte F, E, D. Beispielsweise ist F_1 (Abb. 54) der Nullpunkt der Ebene xy; denn jede durch diesen Punkt gelegte Gerade der xy-Ebene schneidet nicht nur die Kraft F, sondern auch die unendlich ferne Resultante des Kräftepaares $(A \mathbin{+\!\!\!+} A')$. In Abb. 58 sind nur die beiden Kräfte D und E eingetragen. Die durch ihre Spuren h_1, h_2, h_3 gegebene Ebene h wird von den Kräften D und E in den Punkten D_4 und E_4 geschnitten. D_4 ist der Nullpunkt der zu yz parallel gestellten Ebene $D_4 H_0 J$; denn jede in dieser Ebene durch den Punkt D_4 gelegte Gerade schneidet nicht nur die Kraft D, sondern auch die unendlich ferne Resultante des Kräftepaares $(C \mathbin{+\!\!\!+} C')$. Ebenso ist E_4 der Nullpunkt der zu xz parallel gestellten Ebene $E_4 H_0 J$. Der gesuchte Nullpunkt H_0 der gegebenen Ebene h ist der Schnittpunkt



L. Abb. 58.

der drei Ebenen h, $D_4 H_0 J$ und $E_4 H_0 J$, weil die in der Ebene h liegenden zwei Achsen $D_4 H_0$ und $E_4 H_0$ Nullachsen der Kräftegruppe (P) sind (I, 9).

18. Die Nullebene h eines gegebenen Punktes H_0 in bezug auf eine gegebene Kräftegruppe (P) zu bestimmen (Abb. 58). Man legt durch den gegebenen Punkt H_0 drei Ebenen parallel zu den Projektionsebenen yz, xz, xy. Die erste dieser Ebenen schneidet die Kraft D im Punkte D_4, die zweite E im Punkte E_4 und die dritte F im Punkte F_4. Nach dem vorigen Abschnitt sind die Achsen $H_0 D_4$, $H_0 E_4$ und $H_0 F_4$ Nullachsen der gesuchten Ebene h und zu den Spuren h_3, h_2, h_1 parallel gerichtet. Es genügt, wie in Abb. 58 geschehen ist, nur *zwei* Nullachsen $H_0 D_4$ und $H_0 E_4$ aufzutragen.

19. Eine gegebene Kräftegruppe (P) durch zwei Kräfte G, H zu ersetzen; die Kraft H soll in einer gegebenen Ebene h liegen, während die Kraft G durch einen gegebenen Punkt G_0 gehen soll, der nicht in der Ebene h liegt. Wir entnehmen aus dem Abschnitt 26 der Abhandlung I die Bedingungen, daß die Kraft G durch den Nullpunkt H_0 der gegebenen Ebene h gehen muß, und daß die Kraft H in der Nullebene g des gegebenen Punktes G_0 liegen muß. G fällt also mit der Geraden $G_0 H_0$ und H mit dem Schnitt der beiden Ebenen g und h zusammen. Nachdem die Lagen der beiden Kräfte nach Anleitung der Abschnitte 17 und 18 bestimmt worden sind, ergeben sich Größe und Sinn derselben aus der Bedingung, daß ihre geometrische Summe mit einer jeden der drei bekannten Kräfte K, D, E, F übereinstimmen muß:

$$G \ddagger H \equiv K.$$

Demnach müssen die drei Kräfte G, H und K zu *einer* Ebene parallel gerichtet sein, was für die Richtigkeit der Zeichnung zur Probe dienen kann.

20. Eine gegebene Kräftegruppe (P) durch zwei Kräfte G, H zu ersetzen; die Kraft G soll mit einer gegebenen Achse g zusammenfallen. Die Lage der Kraft H wird bestimmt durch die Schnittachse h der Nullebenen aller auf der Achse g liegenden Punkte (I, 26). Nachdem die Achse h durch *zwei* der bezeichneten Nullebenen bestimmt worden ist, ergeben sich Größe und Sinn der beiden Kräfte G, H wie im Abschnitt 19 aus der Bedingung:

$$G \ddagger H \equiv K.$$

21. Literarische Notizen. Bei Abfassung der vorstehenden Abhandlung wurden die folgenden Aufsätze benutzt:

1. *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger;* Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1874, S. 230. Dieser Aufsatz behandelt u. a. die im Abschnitt 4 und in den Abb. 8 bis 13 dargestellten Aufgaben.

2. *Eine Aufgabe der graphischen Statik;* Zivilingenieur 1886, S. 535; bezieht sich auf die Aufgabe des Abschnittes 6: Ein Seilpolygon durch drei Punkte zu legen.

3. *Technische Mechanik;* nach den Vorlesungen von Mohr bearbeitet und 1877 herausgegeben vom Ingenieur-Verein am Polytechnikum in Stuttgart; behandelt auf Seite 205 die im Abschnitt 9 beschriebene erste Aufgabe (Abb. 30—32).

4. *Beitrag zur Theorie der Träger;* Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1899, S. 586; enthält die im Abschnitt 9 beschriebene und in den Abb. 36 bis 46 dargestellte Aufgabe.

5. *Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen;* Hannoversche Zeitschrift 1870, S. 41; behandelt die Aufgabe des Abschnittes 12, Abb. 52 und 53.

6. *Ueber die Zusammensetzung der Kräfte im Raume;* Zivilingenieur 1876, S. 121; behandelt ausführlicher den Gegenstand der Abschnitte 13 bis 20 und der Abb. 54 bis 58.

Varignon, Nouvelle mécanique ou statique, Paris 1725, war der erste, der das Seilpolygon für die Zusammensetzung der Kräfte in der Ebene und für die Darstellung der Gleichgewichtsbedingungen benutzte.

Culmann, Graphische Statik, Zürich 1866, erkannte zuerst die allgemeine Anwendbarkeit des Kräftepolygons und des Seilpolygons für die Lösung statischer Aufgaben. Er wurde hierdurch zum Begründer der graphischen Statik. Von ihm stammt die in den Abschnitten 7 und 8 beschriebene Darstellung der statischen Momente und der Biegungsmomente vermittels des Seilpolygons. Sein Buch gibt zahlreiche *Anwendungen* auf die Aufgaben des Ingenieurwesens, die in der vorliegenden Abhandlung nicht in Betracht kommen und daher hier übergangen werden. Culmanns Bestreben, die *Geometrie der Lage* zur Grundlage der graphischen Statik zu machen, fand wenig Anklang. Die Ansichten, die ich hierüber in meinem Aufsatze: *Die graphische Statik und das graphische Rechnen,*

Zivilingenieur 1875, S. 232, äußerte, scheinen von der Erfahrung bestätigt zu werden: „Wohl aber sprechen gewichtige Gründe dafür, den Vorrat von wissenschaftlichen Hilfsmitteln, die jeder Techniker *notwendig* sich anzueignen hat, auf das zulässige Minimum zu beschränken. Der obligatorische Untericht hat an den meisten polytechnischen Schulen einen Umfang erreicht, bei dem ein gründliches und selbständiges Studium kaum noch bestehen kann. Man wird daher gut daran tun, nicht ohne zwingende Gründe den obligatorischen Unterricht noch mehr zu erweitern. Wir wollen hiermit den Nutzen des Studiums der neueren Geometrie selbstverständlich nicht in Abrede stellen. Die Studierenden, welche Fähigkeit und Neigung zum Studium der Mathematik besitzen, müssen Gelegenheit erhalten, auch in der neueren Geometrie sich auszubilden; es erscheint uns aber nicht allein unnütz, sondern sogar schädlich, die große Mehrzahl der Minderbefähigten zu einer unnötigen Erweiterung ihrer theoretischen Studien zu zwingen."

Ausführliche Literaturangaben über die graphische Statik und ihre Anwendungen finden sich in dem von *Henneberg* bearbeiteten Abschnitt IV, 5 der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften: *Die graphische Statik der starren Körper.*

Abhandlung III.

Die Geometrie der Massen.

A. Die Momente ersten Grades einer Gruppe von materiellen Punkten.

1. Der Schwerpunkt einer Punktgruppe. Wir bezeichnen mit A_1, A_2, A_3 ... eine Gruppe von starr miteinander verbundenen Punkten, deren Massen die Größen m_1, m_2, m_3 ... haben. Der Begriff *Masse* braucht hier nicht näher erläutert zu werden; es genügt die Angabe, daß man unter Massen *unveränderliche positive* Werte versteht, die den Punkten beigelegt werden. Mit M wird die Summe der Massen aller Punkte, also die Gesamtmasse der Punktgruppe, bezeichnet. Es sei u irgend eine Achse und (u) eine zur Achse u rechtwinklig gestellte Ebene, in bezug auf welche die Ordinaten der Massenpunkte A_1, A_2, A_3 .. die algebraischen Werte u_1, u_2, u_3 ... haben. Die Ordinaten sind positiv, wenn sie den Sinn der Achse u haben. Unter dem *Moment ersten Grades der Punktgruppe in bezug auf die Ebene* (u) versteht man die *algebraische* Summe der Produkte aus der Masse m eines jeden Punktes und seiner Ordinate u:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 + m_3 u_3 + \ldots = \Sigma m u.$$

Der Punkt S von der Masse M, dessen Moment in bezug auf *jede* Ebene gleich dem Moment der Punktgruppe ist, wird der *Schwerpunkt* der Gruppe genannt. Daß ein solcher Punkt, und zwar nur *ein* Punkt von dieser Beschaffenheit, vorhanden ist, erkennt man auf folgendem Wege. Werden in bezug auf irgend ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Koordinaten der Punkte S, A_1, A_2 ... mit

(x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ... bezeichnet, so ist nach der obigen Erklärung der Punkt S bestimmt durch die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} Mx_0 &= m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots = \Sigma mx \\ My_0 &= m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots = \Sigma my \\ Mz_0 &= m_1 z_1 + m_2 z_2 + \ldots = \Sigma mz \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Zwischen den Koordinaten x, y, z eines Punktes und seiner Ordinate u in bezug auf irgend eine gegebene Ebene (u) besteht eine algebraische Beziehung von der Form

$$u = a + bx + cy + dz,$$

in der a, b, c, d unveränderliche Größen bezeichnen. Das Moment ersten Grades der Punktgruppe in bezug auf die Ebene (u) hat also den Wert:

$$\Sigma mu = a\Sigma m + b\Sigma mx + c\Sigma my + d\Sigma mz$$

oder nach den Gleichungen 1):

$$\Sigma mu = M(a + bx_0 + cy_0 + dz_0) = Mu_0, \qquad (2)$$

wenn mit u_0 die Ordinate des Punktes S in bezug auf die Ebene (u) bezeichnet wird.

Unter dem *Schwerpunkt eines Körpers* versteht man den Schwerpunkt einer Punktgruppe, welche entsteht, wenn man den Körper in unendlich kleine Teile zerlegt und jeden Teil durch einen Punkt ersetzt, dem die Masse des Teiles beigelegt wird. Der Körper heißt *gleichartig*, wenn die Masse des Punktes dem *Rauminhalt* des Körperteiles proportional ist. In ähnlicher Weise spricht man von den Schwerpunkten gleichartiger und nicht gleichartiger Flächen und Linien. Im folgenden ist nur von gleichartigen Gebilden die Rede.

2. Der Schwerpunkt der Projektion einer Punktgruppe. Wenn man den rechtwinkligen Projektionen der Punkte A_1, A_2, A_3 .. auf irgend eine Ebene, z. B. die xy-Ebene, oder auf irgend eine Achse x die Massen m_1, m_2, m_3 ... jener Punkte beilegt, so fällt der Schwerpunkt S' der Projektionen mit der Projektion des Schwerpunktes zusammen. Denn die Koordinaten x', y', z' des Schwerpunktes S' sind den Gleichungen 1) zufolge im ersten Falle:

$$x' = \frac{\Sigma mx}{M} = x_0, \quad y' = \frac{\Sigma my}{M} = y_0, \quad z' = 0$$

und im zweiten Falle

$$x' = \frac{\Sigma mx}{M} = x_0, \quad y' = 0, \quad z' = 0.$$

3. Graphische Bestimmung des Schwerpunktes einer Punktgruppe.

Erstes Verfahren. Um die Ordinate x_0 des Schwerpunktes einer gegebenen Punktgruppe zu bestimmen, projiziert man jeden Punkt A_1 auf die x-Achse und legt durch die Projektion des Punktes eine Kraft von der Richtung und dem Sinne der y-Achse und von einer Größe, die ebensoviele Krafteinheiten enthält, wie die Masse m_1 des Punktes Masseneinheiten hat. Die durch ein Seilpolygon zu bestimmende Resultante der Parallelkräfte geht durch die Projektion des Schwerpunktes S auf die x-Achse. Denn die Gleichung

$$Mx_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots = \Sigma m x$$

kann aufgefaßt werden als die Momentengleichung in bezug auf den Anfangspunkt der Koordinaten, welche ausdrückt, daß das statische Moment der Resultanten M der Summe der statischen Momente der Parallelkräfte m_1, m_2 ... gleich ist.

Der Schwerpunkt einer räumlichen Punktgruppe wird demnach durch *drei* und der einer ebenen Gruppe durch *zwei* Seilpolygone bestimmt.

Zweites Verfahren. Wir bezeichnen mit a_1, a_2, a_3 .. die Strecken AA_1, AA_2, AA_3 ... vom Anfangspunkt A der Koordinaten nach den Punkten A_1, A_2, A_3 ... und mit a_0 die Strecke AS. Die drei Gleichungen:

$$x_0 = \frac{m_1}{M} x_1 + \frac{m_2}{M} x_2 + \ldots.$$

$$y_0 = \frac{m_1}{M} y_1 + \frac{m_2}{M} y_2 + \ldots$$

$$z_0 = \frac{m_1}{M} z_1 + \frac{m_2}{M} z_2 + \ldots$$

sind gleichbedeutend mit dem Ausdruck:

$$a_0 \equiv \frac{m_1}{M} a_1 \ddagger \frac{m_2}{M} a_2 \ddagger \ldots$$

welcher angibt, daß die Strecke a_0 die *geometrische Summe* der Strecken $\frac{m_1}{M} a_1$, $\frac{m_2}{M} a_2$ ... bildet; denn es ist zu beachten, daß in bezug auf die Koordinatenachsen x_0, y_0, z_0 die Projektionen der Strecke a_0, ferner x_1, y_1, z_1 die Projektionen der Strecke a_1 usf. bezeichnen. Der Schwerpunkt einer *ebenen* Punktgruppe wird so-

nach durch *ein* Summierungspolygon bestimmt. Für eine räumliche Punktgruppe sind *zwei* Projektionen dieses Polygons aufzutragen. Die Abb. 1 zeigt ein Beispiel. Die Punkte A_1, A_2, A_3, A_4, S haben die Massen 3, 2, 6, 5, 16 und liegen in der Bildebene. Das Summierungspolygon $ACDES$ zur Bestimmung des Schwerpunktes S besteht also aus den Strecken: AC, CD, DE, ES, welche Richtung und Sinn der Strecken AA_1, AA_2, AA_3, AA_4 und die Größen:

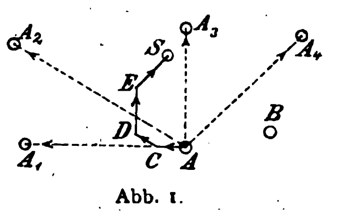


Abb. 1.

$$AC = \frac{3}{16} AA_1, \quad CD = \frac{2}{16} AA_2, \quad DE = \frac{6}{16} AA_3$$

$$ES = \frac{5}{16} AA_4$$

haben.

Daß die Wahl des Anfangspunktes A des Summierungspolygons ohne Einfluß ist auf die Lage des Endpunktes S, ergibt sich auch auf geometrischem Wege aus folgender Ueberlegung. Wählt man als Anfangspunkt anstatt A irgend einen anderen Punkt B und bezeichnet die Strecken BA, BS, BA_1, BA_2 ... mit b, b_0, b_1, b_2 .., so ist:

$$b \equiv \frac{m_1}{M} b \ddagger \frac{m_2}{M} b \ddagger \ldots = \frac{M}{M} b,$$

folglich:

$$a_0 \ddagger b \equiv \frac{m_1}{M} (a_1 \ddagger b) \ddagger \frac{m_2}{M} (a_2 \ddagger b) \ddagger \ldots$$

oder:

$$b_0 \equiv \frac{m_1}{M} b_1 \ddagger \frac{m_2}{M} b_2 \ddagger \ldots .$$

4. Zerlegung einer Punktgruppe in Teilgruppen. Zerlegt man eine gegebene Punktgruppe in Teilgruppen 1, 2, 3 ... mit den Schwerpunkten S_1, S_2, S_3 ..., so fällt der Schwerpunkt der Punkte S_1, S_2, S_3 ... mit den Massen M_1, M_2, M_3 .. zusammen mit dem Schwerpunkt S der ganzen Gruppe, wie aus den Gleichungen 1) ohne weiteres folgt. Liegen die Punkte S_1, S_2, S_3 ... in einer Ebene oder auf einer Achse, so liegt auch S in dieser Ebene oder auf dieser Achse. Solche Ebenen und Achsen werden *Schwerebenen* und *Schwerachsen* der Punktgruppe genannt.

Beispiele: Die Achse AD, welche die Ecke A einer gleichartigen Dreiecksfläche ABC mit dem Halbierungspunkt D der

Seite BC verbindet, ist eine Schwerachse des Dreiecks, weil die Schwerpunkte der unendlich dünnen Streifen von der Richtung BC, in die man die Dreiecksfläche zerlegen kann, auf AD liegen.

Die Achse AS_1, welche die Spitze einer gleichartigen Pyramide mit dem Schwerpunkt S_1 ihrer Grundfläche verbindet, ist eine Schwerachse, weil die Schwerpunkte der zur Grundfläche parallel gestellten unendlich dünnen Schichten, in die man die Pyramide zerlegen kann, auf jener Achse liegen.

Jede Symmetrieebene eines gleichartigen Körpers ist eine Schwerebene, jede Symmetrieachse eine Schwerachse. Der Schwerpunkt wird also durch zwei Symmetrieachsen bestimmt.

5. Gleichwertige Punktgruppen. Man nennt bei Schwerpunktsbestimmungen zwei Punktgruppen *gleichwertig*, wenn ihre Schwerpunkte zusammenfallen und gleiche Massen haben. Eine gerade Linie AB von der Masse M ist gleichwertig den zwei Punkten A, B, wenn jedem die Masse $\frac{M}{2}$ beigelegt wird. Eine Dreiecksfläche ABC von der Masse M ist gleichwertig den drei Punkten A, B, C von den Massen $\frac{M}{3}$. Ein Tetraeder $ABCD$ von der Masse M ist gleichwertig den vier Punkten A, B, C, D von den Massen $\frac{M}{4}$.

Als Beispiel der Anwendung wählen wir die Bestimmung des Schwerpunktes einer Trapezfläche $ABCD$ (Abb. 2). Wir zerlegen diese Fläche erstens durch die Diagonale AC in die beiden

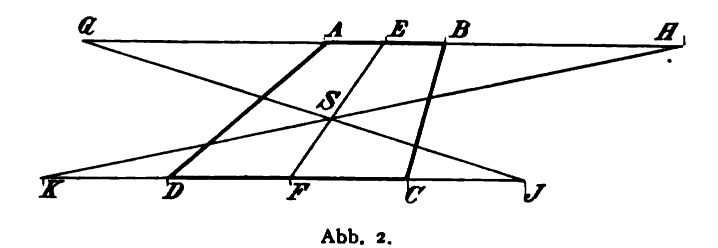


Abb. 2.

Dreiecke ABC, ADC von den Massen M_1, M_2, zweitens durch die Diagonale BD in die Dreiecke ABD, BCD von den ebenso großen Massen M_1, M_2. Bei der ersten Zerlegung ist die Trapezfläche gleichwertig den vier Punkten A, B, C, D, deren Massen in

dieser Reihenfolge die Größen $\frac{M_1 + M_2}{3}$, $\frac{M_1}{3}$, $\frac{M_1 + M_2}{3}$, $\frac{M_2}{3}$ haben. Bei der zweiten Zerlegung erhalten die vier dem Trapez gleichwertigen Punkte A, B, C, D die Massen $\frac{M_1}{3}$, $\frac{M_1 + M_2}{3}$, $\frac{M_2}{3}$, $\frac{M_1 + M_2}{3}$. Legt man die beiden Gruppen aufeinander und halbiert ihre Massen, so entsteht eine dritte dem Trapez gleichwertige Punktgruppe A, B, C, D von den Massen $\frac{2M_1 + M_2}{6}$, $\frac{2M_1 + M_2}{6}$, $\frac{M_1 + 2M_2}{6}$, $\frac{M_1 + 2M_2}{6}$. Die beiden Punkte A, B dieser Gruppe haben gleiche Massen und können also durch den Halbierungspunkt E der Strecke AB ersetzt werden, wenn diesem Punkte die Masse $\frac{2M_1 + M_2}{3}$ beigelegt wird. Ebenso ersetzt man die Punkte C, D durch den Halbierungspunkt F der Strecke CD von der Masse $\frac{M_1 + 2M_2}{3}$. Der Schwerpunkt S der Trapezfläche $ABCD$ liegt also auf der Schwerachse EF und muß der Bedingung:

$$ES : SF = (2M_2 + M_1) : (2M_1 + M_2) = (2CD + AB) : (2AB + CD)$$

entsprechen. Demgemäß trägt man:

$$AG = BH = CD \quad \text{und} \quad CJ = DK = AB$$

auf und bestimmt den Schwerpunkt S durch den Schnitt der drei Geraden EF, GJ, HK.

B. Die Momente zweiten Grades einer ebenen Punktgruppe oder einer ebenen Fläche.

6. Trägheitsmomente einer ebenen Punktgruppe in bezug auf alle Achsen der Ebene, die einer gegebenen Achse AB parallel gerichtet sind. In dem Abschnitt 12 der Abhandlung II wurde beschrieben, wie das Trägheitsmoment

$$J = Fi^2 = \Sigma y^2 dF$$

einer ebenen Fläche F in bezug auf eine Achse AB vermittels einer Seilkurve CDE (Abb. 3) bestimmt werden kann. Es wurde dort bewiesen, daß die mit F_1 bezeichnete Fläche $CDEGBC$, die

von der Seilkurve CDE, ihren Tangenten CB, EG und der Achse AB begrenzt wird, dem Quadrat des Trägheitshalbmessers i der Fläche F in bezug auf die Achse AB gleich ist:

$$F_1 = i^2. \tag{3}$$

Ist die Fläche F nicht gleichartig, so treten an Stelle der Flächenteile dF ihre gegebenen Massen dM. Sind die Massen über

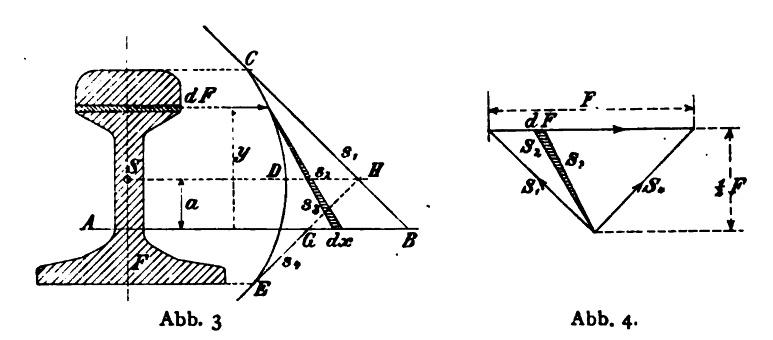


Abb. 3 Abb. 4.

die Fläche F nicht stetig verteilt und bestehen aus endlichen Punktmassen, so tritt an die Stelle der Seilkurve ein Seilpolygon. Man kann ferner die ebene Punktgruppe ansehen als die Projektion einer räumlichen Punktgruppe und das Trägheitsmoment dieser Gruppe beziehen auf die Ebene, welche die Bildfläche in der Achse AB rechtwinklig schneidet. In allen diesen Fällen bleiben die in den folgenden Abschnitten abzuleitenden Beziehungen unverändert.

Die Fläche F_1 kann in die Fläche $CDEHC$ und das Dreieck GHB zerlegt werden. Die zuerst genannte Fläche bestimmt das Quadrat des Trägheitshalbmessers i_s in bezug auf die parallel zu AB durch den Schwerpunkt S der Fläche F gelegte Achse SH:

$$CDEHC = i_s^2.$$

Die Dreiecksfläche GHB ist gleich dem Quadrat des Abstandes a zwischen den beiden Achsen SH, AB:

$$GHB = a^2,$$

weil wegen Aehnlichkeit dieses Dreiecks mit dem Dreieck S_1, S_4, F im Kräfteplan (Abb. 4) BG gleich $2\,a$ ist. Zwischen den Trägheitshalbmessern i_s und i besteht demnach die Beziehung:

$$i^2 = i_s^2 + a^2. \tag{4}$$

Dieselbe Beziehung besteht zwischen den Trägheitshalbmessern einer räumlichen Punktgruppe in bezug auf zwei Parallelebenen, von denen eine durch den Schwerpunkt der Gruppe geht.

7. **Die Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente einer ebenen Fläche F in bezug auf alle Achsen der Ebene, die durch den Schwerpunkt gehen.** Wir bezeichnen in Abb. 5 mit z die Strecke SC vom Schwerpunkt S der Fläche F nach irgend einem unendlich kleinen Flächenteil dF und mit φ_1, φ_2 die Winkel, die ein Zeiger im Sinne der Uhrzeigerdrehung von den zwei gegebenen Achsen SA, SB nach SC zu durchlaufen hat. Wir setzen ferner das über die ganze Fläche F sich erstreckende Integral:

$$\int z^2\, dF = F p^2$$

und bezeichnen also mit p den Halbmesser des *polaren* Trägheitsmomentes in bezug auf den Schwerpunkt S. Der Umriß der Fläche F kommt hier nicht in Betracht und ist daher in die Zeichnung nicht eingetragen worden.

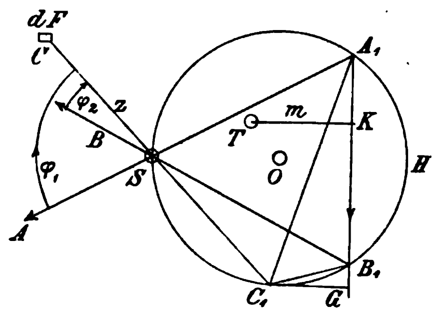


Abb. 5.

Die Ordinaten des Flächenelements dF in bezug auf die beiden Achsen SA, SB haben die algebraischen Werte $z \sin\varphi_1$ und $z \sin\varphi_2$; sie sind den Sinuswerten entsprechend *positiv* oder *negativ*, je nachdem dF *rechts* oder *links* von der betreffenden Achse liegt. Das *Zentrifugalmoment* von dF in bezug auf die beiden Achsen SA, SB hat demnach den Wert $z^2\, dF \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$. Um diese Größe graphisch darzustellen, ziehen wir durch S einen Kreis vom Durchmesser p und im übrigen von beliebiger Lage, der von den Achsen SA, SB, SC in den Punkten A_1, B_1, C_1 geschnitten wird. Da:

$$C_1 A_1 = p \sin\varphi_1 \quad \text{und} \quad C_1 B_1 = p \sin\varphi_2 \ .$$

ist, so hat die Ordinate $C_1 G$ des Kreispunktes C_1 in bezug auf die Sehne $A_1 B_1$ die Länge:

$$C_1 G = p \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 .$$

Legt man nun dem Kreispunkte C_1 die Masse $\frac{z^2\, dF}{p}$ bei, *so erhält das Moment ersten Grades des Massenpunktes C_1 in bezug auf die Sehne $A_1 B_1$:*

$$\frac{z^2\, dF}{p}\, p \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = z^2\, dF \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

die Größe des Zentrifugalmomentes von dF *in bezug auf das Achsenpaar* SA, SB. Man beachte, daß die Punkte der beiden zur Sehne $A_1 B_1$ gehörigen Kreisbogen $A_1 SB_1$ und $A_1 HB_1$ Zentrifugalmomente von entgegengesetzten Vorzeichen haben; im vorliegenden Beispiel ist das Vorzeichen für die Punkte des Bogens $A_1 SB_1$ *positiv*, weil diese Punkte entweder links oder rechts von *beiden* Achsen SA, SB liegen. Wählt man den Sinn der Achse $A_1 B_1$ so, daß dieser Bogen $A_1 SB_1$ *rechts* von der Achse liegt, so stimmen nicht nur die Größen, sondern auch die Vorzeichen der beiden Momente miteinander überein. Man denke sich nun, was in Wirklichkeit nicht ausgeführt zu werden braucht, es sei ermittelt worden: für *jeden* Flächenteil dF der zugehörige Kreispunkt C_1 und dessen positive Masse $\frac{z^2 dF}{p}$, ferner die Lage des Schwerpunktes T aller dieser auf dem Kreise liegenden Massen und die Masse M des Punktes T, den wir zur Unterscheidung von dem Schwerpunkt S den *Trägheitsschwerpunkt* der Fläche F in bezug auf den *Trägheitskreis* SH nennen:

$$M = \frac{1}{p} \int z^2 dF = \frac{1}{p} Fp^2 = Fp; \qquad (5)$$

dann ergeben sich ohne weiteres die folgenden Beziehungen:

1. Für jedes Paar Schwerpunktsachsen SA, SB ist das Zentrifugalmoment der Fläche F gleich dem Moment ersten Grades Fpm des Punktes T von der Masse Fp in bezug auf die Achse $A_1 B_1$, wenn der Sinn dieser Achse so gewählt wird, wie oben angegeben ist. Das Zentrifugalmoment ist positiv oder negativ, je nachdem T rechts oder links von der Achse $A_1 B_1$ liegt.

2. Das Zentrifugalmoment der Fläche F ist gleich null für jedes Achsenpaar SL_1, SN_1 (Abb. 6), dessen Kreissehne $L_1 N_1$ *durch den Trägheitsschwerpunkt* T geht. Zwei solche Achsen werden *konjugierte* Schwerpunktsachsen genannt, weil die Lage der einen Achse durch die der anderen bestimmt wird.

3. Das *Trägheitsmoment* J der Fläche F für jede Schwerpunktsachse SA (Abb. 7) ist gleich dem Moment ersten Grades des Punktes T von der Masse Fp in bezug auf die zugehörige *Kreistangente* AK:

$$J = Fi^2 = Fpt, \qquad (6)$$

wenn mit t der Abstand TK oder LA des Punktes T von der Kreistangente AK bezeichnet wird; denn läßt man die Achse SB, auch dem Sinne nach, mit SA zusammenfallen, so verwandelt sich

die Sehne AB in die Tangente AK und das Zentrifugalmoment in das Trägheitsmoment, dessen Vorzeichen selbstverständlich stets positiv ist.

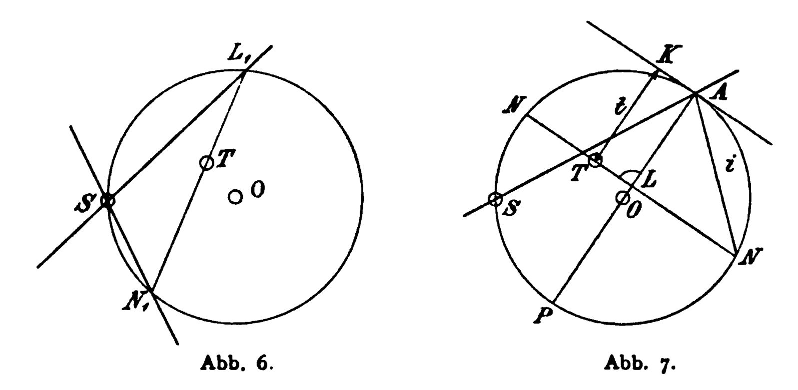


Abb. 6. Abb. 7.

4. Um auf graphischem Wege für eine Schwerpunktsachse SA den *Trägheitshalbmesser* i zu bestimmen, zieht man (Abb. 7) durch T die Kreissehne $NTLN$ senkrecht zum Halbmesser OA. Da

$$\overline{AN}^2 = AP \cdot AL = pt$$

ist, so folgt:

$$AN = i.$$

5. Für je zwei Schwerpunktsachsen, die rechtwinklig sich schneiden, hat die Summe der beiden Trägheitsmomente den unveränderlichen Wert Fp^2.

6. Fällt der Trägheitsschwerpunkt T nicht mit dem Kreismittelpunkt O zusammen, so gibt es nur *ein* Paar konjugierter Schwerpunktsachsen, die unter einem *rechten* Winkel sich schneiden. Diese beiden *Schwerpunktshauptachsen* SH_1, SH_2 (Abb. 8) werden durch den Kreisdurchmesser H_1OTH_2 bestimmt. Im Vergleich mit allen anderen Schwerpunktsachsen erreicht das Trägheitsmoment für die eine Hauptachse SH_1 seinen *größten*, für die andere SH_2 seinen *kleinsten* Wert. Wir nennen SH_1 die *erste*, SH_2 die *zweite* Schwerpunktshauptachse.

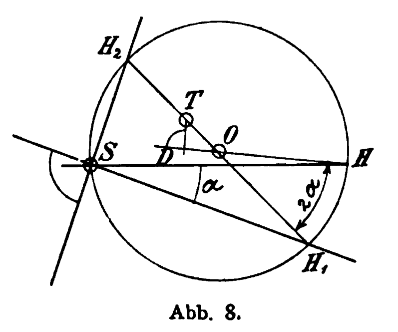


Abb. 8.

Fallen die Punkte T und O zusammen, so sind die Trägheitsmomente für alle Schwerpunktsachsen von gleicher Größe $\frac{1}{2}Fp^2$,

und je zwei unter einem rechten Winkel sich schneidende Schwerpunktsachsen bilden zwei Hauptachsen.

7. In Abb. 8 bezeichnen i_1, i_2, i die Trägheitshalbmesser der Fläche F für die beiden Schwerpunktshauptachsen SH_1, SH_2 und für die Achse SH, welche mit der *ersten* Hauptachse den Winkel

$$HSH_1 = \alpha$$

einschließt; ferner bezeichnen t_1, t_2, t die Abstände H_1T, H_2T, HD des Trägheitsschwerpunktes T von den Kreistangenten der Punkte H_1, H_2, H. Es ist also:

$$i_1^2 = pt_1, \quad i_2^2 = pt_2, \quad i^2 = pt,$$

$$OH_1 = OH_2 = \frac{p}{2} = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{i_1^2 + i_2^2}{2p},$$

$$OT = \frac{t_1 - t_2}{2} = \frac{i_1^2 - i_2^2}{2p},$$

$$HD = HO + OD$$

oder:

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} + \frac{t_1 - t_2}{2}\cos(2\alpha)$$

oder:

$$i^2 = \frac{i_1^2 + i_2^2}{2} + \frac{i_1^2 - i_2^2}{2}\cos(2\alpha) \tag{7}$$

oder:

$$i^2 = i_1^2\cos^2\alpha + i_2^2\sin^2\alpha. \tag{8}$$

Die vorstehenden Beziehungen ergeben sich in gleicher Weise für jeden anderen Achsenbüschel der Ebene, also für Achsen, die nicht im Schwerpunkt, sondern in irgend einem anderen Punkt der Ebene sich schneiden. Die Beziehungen gelten ferner auch für räumliche Punktgruppen und Körper in bezug auf Ebenen, die in einer Achse sich schneiden, wie schon oben hervorgehoben wurde.

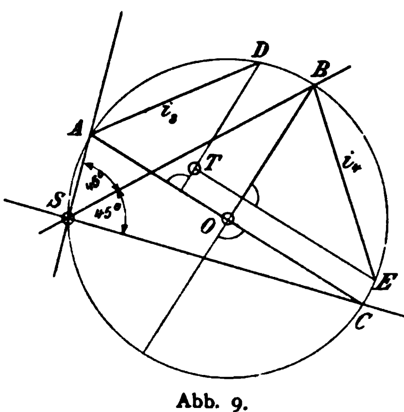


Abb. 9.

8. Die Ausführung der graphischen Darstellung. Um die im vorigen Abschnitt beschriebene Darstellung zu bilden, bestimmt man für *drei*

Schwerpunktsachsen SA, SB, SC (Abb. 9), welche zwei Winkel von 45°:

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = 45^\circ$$

einschließen, die Trägheitsmomente Fi_3^2, Fi_4^2, Fi_5^2 der Fläche F. Da der Winkel ASC gleich 90° ist, so wird durch die Gleichung

$$p^2 = i_3^2 + i_5^2$$

der Durchmesser

$$AC = p$$

des durch den Schwerpunkt S zu ziehenden Trägheitskreises $SABC$ bestimmt. Man trägt darauf die Sehnen

$$AD = i_3, \quad BE = i_4$$

auf und bestimmt nach Abschnitt (7, 4) den Trägheitsschwerpunkt T durch die beiden Geraden:

$$DT \perp OA \text{ und } ET \perp OB.$$

Hat die Fläche F eine Symmetrieachse, so ist diese eine der Schwerpunktshauptachsen und es genügt dann die Bestimmung der Trägheitshalbmesser i_1, i_2 für die Hauptachsen.

9. Andere Darstellungen. Die im vorstehenden beschriebene graphische Darstellung ist für die meisten Anwendungen am bequemsten; wir fügen jedoch noch einige andere Darstellungen hinzu, weil dieselben in einzelnen Fällen mit Nutzen verwendet werden können.

1. Von *Cauchy* und *Poinsot* rührt folgende Darstellung her. Trägt man auf jeder Schwerpunktsachse SH (Abb. 10), für die der Trägheitshalbmesser mit i bezeichnet wird, die Strecken

$$SH = SH = \frac{i_1 i_2}{i}$$

auf, so entsteht als geometrischer Ort der Punkte H eine Ellipse, deren *große* Achse mit der *zweiten* und deren *kleine* Achse mit der *ersten* Schwerpunktshauptachse zusammenfällt; denn bezeichnet man die Koordinaten des Punktes H in bezug auf die Achsen SH_1 und SH_2 mit x und y, so ist

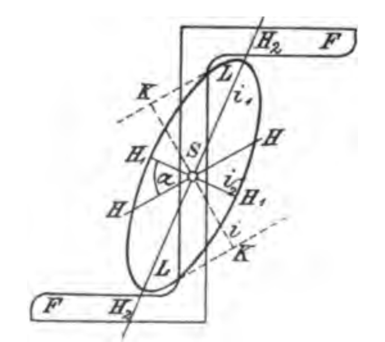


Abb. 10.

$$x = \frac{i_1 i_2}{i} \sin \alpha \text{ und } y = \frac{i_1 i_2}{i} \cos \alpha,$$

und da nach Gleichung 8)

$$i^2 = i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha$$

ist, so folgt als Gleichung des geometrischen Ortes von H:

$$\frac{x^2}{i_1^2} + \frac{y^2}{i_2^2} = 1.$$

Die Länge i kann auch unmittelbar aus der Zeichnung entnommen werden, indem man die zu SH parallel gerichtete Tangente KL zieht und ihren Abstand SK vom Mittelpunkt S bestimmt. Da

$$SH \cdot SK = i_1 \cdot i_2$$

ist, so folgt:

$$SK = \frac{i_1 \, i_2}{SH} = i.$$

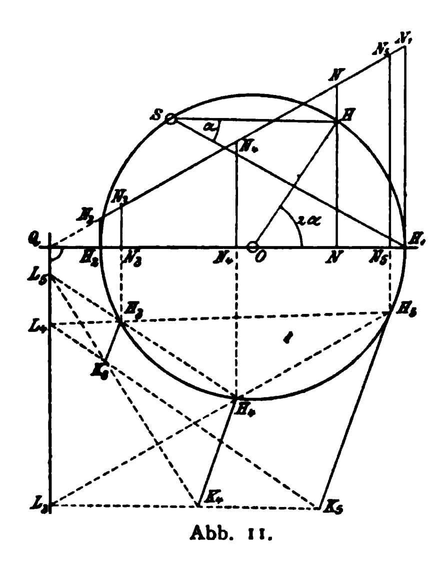


Abb. 11.

2. In Abb. 11 ist SH_1H_2 ein durch den Schwerpunkt S gezogener Kreis von übrigens beliebiger Lage und Größe. Rechtwinklig zum Durchmesser H_1H_2 sind die Ordinaten

$$H_1N_1 = \frac{i_1^2}{p} \text{ und } H_2N_2 = \frac{i_2^2}{p}$$

aufgetragen. Für jede Schwerpunktsachse SH bestimmt die durch den Kreispunkt H gezogene Ordinate NN die Größe

$$NN = \frac{i^2}{p};$$

denn aus dem Verhältnis:

$$QH_2 : QO : ON : QH_1 = i_2^2 : \frac{i_1^2 + i_2^2}{2} : \frac{i_1^2 - i_2^2}{2} \cos (2\alpha) : i_1^2$$

folgt:

$$NN = \frac{i_1^2 + i_2^2}{2p} + \frac{i_1^2 - i_2^2}{2p} \cos (2\alpha) = \frac{i^2}{p}.$$

In der Regel sind die Hauptachsen und die zugehörigen Trägheitshalbmesser nicht gegeben, sondern zu ermitteln. Man bestimmt dann für drei *beliebige* Schwerpunktsachsen SH_3, SH_4, SH_5 die Trägheitshalbmesser i_3, i_4, i_5 und zieht die parallelen Strecken H_3K_3, H_4K_4, H_5K_5, welche der Bedingung:

$$H_3K_3 : H_4K_4 : H_5K_5 = i_3^2 : i_4^2 : i_5^2$$

entsprechen. Die Geradenpaare $(H_3 H_4, K_3 K_4)$, $(H_3 H_5, K_3 K_5)$, $(H_4 H_5, K_4 K_5)$ schneiden sich in drei Punkten L_5, L_4, L_3 der Achse QL_3, die zur Achse $QH_2\, OH_1$ rechtwinklig steht, und also die Hauptachsen bestimmt.

3. In Abb. 12 ist der Durchmesser $H_1 H_2$ des Kreises $SH_1 H_2$ gleich $i_1 + i_2$ und durch den Punkt P in die Strecken

$$PH_1 = i_1, \quad PH_2 = i_2$$

zerlegt. Auf jeder Schwerpunktsachse SH bestimmt der Kreispunkt H den Trägheitshalbmesser i durch die Länge

$$PH = i;$$

denn in Abb. 12 ist:

$$PL_1 = i_1 \cos \alpha, \quad PL_2 = i_2 \sin \alpha,$$

folglich in Uebereinstimmung mit Gleichung 8):

$$\overline{PH}^2 = i^2 = i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha.$$

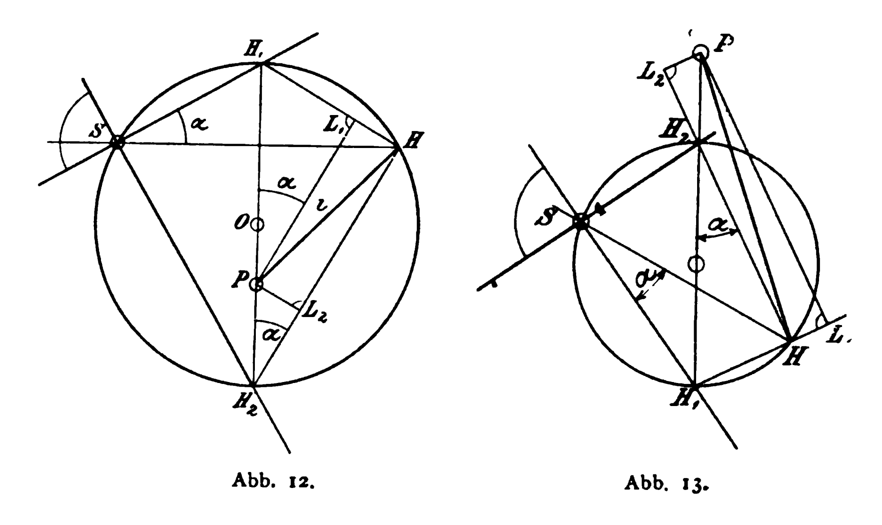


Abb. 12.   Abb. 13.

4. In Abb. 13 ist der Durchmesser des Kreises $SH_1 H_2$:

$$H_1 H_2 = i_1 - i_2,$$

und der Punkt P auf der Geraden $H_1 H_2$ entspricht den Bedingungen:

$$PH_1 = i_1, \quad PH_2 = i_2.$$

Für jede Schwerpunktsachse SH bestimmt der Kreispunkt H den Trägheitshalbmesser i durch die Länge

$$PH = i;$$

denn in Abb. 13 ist:

$$PL_1 = i_1 \cos\alpha, \quad PL_2 = i_2 \sin\alpha,$$

folglich in Uebereinstimmung mit Gleichung 8):

$$\overline{PH}^2 = i^2 = i_1^2 \cos^2\alpha + i_2^2 \sin^2\alpha.$$

5. In Abb. 14 schneidet der Kreis $H_1 H H_2$ auf den beiden Hauptachsen SH_1, SH_2 die Längen

$$H_1 H_1 = i_1, \quad H_2 H_2 = i_2$$

ab. $H_1 H_1$ ist der Durchmesser des Kreises. Auf jeder Schwer punktsachse SH schneidet dieser Kreis die Sehne

$$HH = i$$

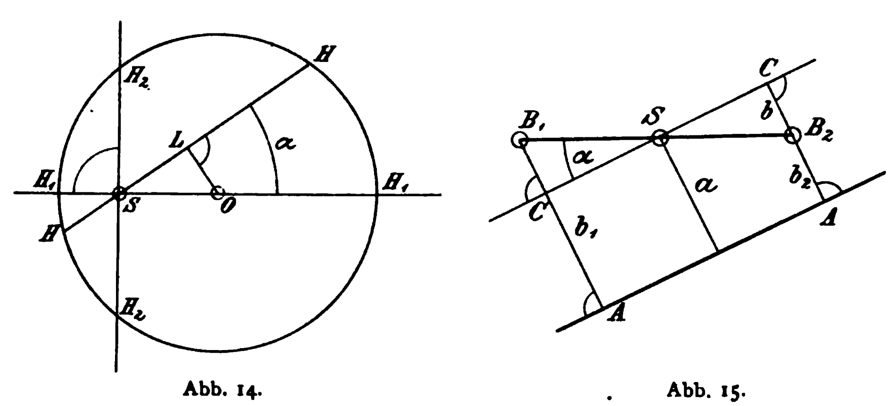


Abb. 14. Abb. 15.

ab. Man beachte, daß:

$$\overline{SO}^2 = \frac{i_1^2 - i_2^2}{4}, \quad \overline{OL}^2 = \frac{i_1^2 - i_2^2}{4} \sin^2\alpha,$$

folglich:

$$\overline{HH}^2 = 4\,\overline{LH}^2 = i_1^2 - (i_1^2 - i_2^2)\sin^2\alpha = i_1^2\cos^2\alpha + i_2^2\sin^2\alpha = i^2$$

ist.

6. In Abb. 15 liegen die beiden Punkte B_1, B_2, die *Brennpunkte* der Fläche F, auf der ersten Schwerpunktshauptachse um die Länge:

$$SB_1 = SB_2 = \sqrt{i_1^2 - i_2^2}$$

vom Schwerpunkt entfernt. Für *jede* Achse AA der Ebene, *also nicht nur für die Schwerpunktsachsen,* wird der Trägheitshalbmesser i der Fläche F bestimmt durch die Gleichung:

$$i^2 = i_1^2 + b_1 b_2, \tag{9}$$

wenn mit b_1, b_2 die Ordinaten der Brennpunkte B_1, B_2 in bezug auf die Achse AA bezeichnet werden. Hierbei ist zu beachten, daß das Produkt $b_1 b_2$ negativ ist, wenn die Brennpunkte durch die Achse AA voneinander getrennt werden.

Für die zu AA parallel gerichtete Schwerpunktsachse CC hat das Quadrat des Trägheitshalbmessers nach Gleichung 8) die Größe

$$i_1^2 \cos^2 \alpha + i_2^2 \sin^2 \alpha = i_1^2 - (i_1^2 - i_2^2) \sin^2 \alpha = i_1^2 - b^2.$$

Folglich ist:

$$i^2 = i_1^2 - b^2 + a^2 = i_1^2 + (a - b)(a + b) = i_1^2 + b_1 b_2.$$

Die vorstehende Darstellung gestattet die Lösung der folgenden zwei Aufgaben:

Für einen gegebenen Punkt U der Ebene die Lage der Hauptachsen UH_1, UH_2 zu bestimmen (Abb. 16). Nach Gleichung 8), die auch für den Achsenbüschel U gilt, halbieren die Hauptachsen die Winkel zwischen je zwei Achsen, für welche die Trägheitsmomente

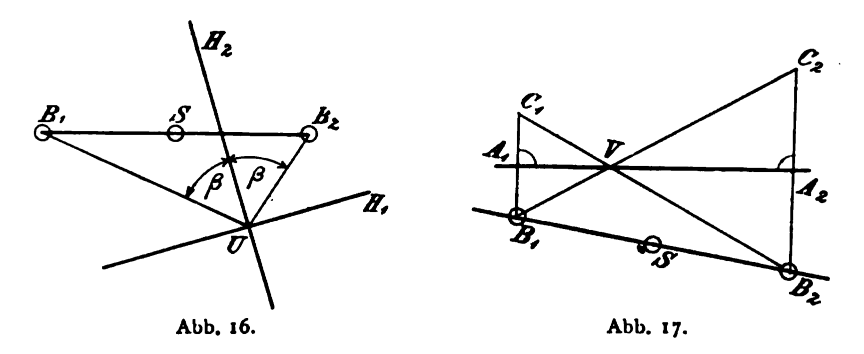


Abb. 16. Abb. 17.

der Fläche F *gleiche* Werte haben. UB_1, UB_2 sind zwei solche Achsen, weil die Trägheitsmomente für alle Achsen, die durch einen der beiden Brennpunkte gehen, nach Gleichung 9) die Größe Fi_1^2 haben.

Auf einer gegebenen Achse A_1A_2 (Abb. 17) *den Punkt V zu bestimmen, für den A_1A_2 eine der beiden Hauptachsen ist.* Man fällt von den Brennpunkten auf die Achse die beiden Lote B_1A_1, B_2A_2, verlängert dieselben um

$$A_1C_1 = B_1A_1, \quad A_2C_2 = B_2A_2$$

und bestimmt den Punkt V durch den Schnitt der drei Geraden A_1A_2, B_1C_2, B_2C_1.

C. Die Momente zweiten Grades von räumlichen Punktgruppen oder Körpern.

10. Beziehungen zwischen den Zentrifugalmomenten eines Körpers oder einer räumlichen Punktgruppe in bezug auf alle Paare von Ebenen, die durch einen Punkt gehen.

Wir bezeichnen mit r, s, u, v, w die Ordinaten eines Massenpunktes m in bezug auf Ebenen (r), (s), (u), (v), (w), die in einem Punkte A des Raumes sich schneiden. Die durch diesen Punkt gehenden und zu den Ebenen rechtwinklig gerichteten Achsen r, s, u, v, w geben durch ihren Sinn an, auf welcher Seite einer jeden der genannten Ebenen die *positiven* Ordinaten liegen. Die drei Koordinatenebenen (u), (v), (w) und also auch die Koordinatenachsen u, v, w sind *rechtwinklig* zueinander gestellt. Die Lage des Massenpunktes m ist demnach durch seine rechtwinkligen Koordinaten u, v, w bestimmt, und seine Ordinaten r, s in bezug auf die Ebenen (r), (s) ergeben sich hieraus durch die Gleichungen:

$$r = u \cos(ru) + v \cos(rv) + w \cos(rw) \qquad (10)$$

$$s = u \cos(su) + v \cos(sv) + w \cos(sw), \qquad (11)$$

wenn in gebräuchlicher Weise z. B. mit (ru) der Winkel bezeichnet wird, welcher von den beiden Achsen r und u eingeschlossen wird.

Das Hilfsmittel, welches zur Darstellung der Beziehungen im folgenden benutzt wird, besteht darin, daß einer jeden durch den Punkt A gelegten Ebene (r) eine *Strecke*

$$R = AR$$

zugeordnet wird, deren Anfangspunkt mit A zusammenfällt, während ihr Endpunkt R durch die drei Koordinaten:

$$\left.\begin{aligned} R_u &= R\cos(Ru) = \frac{\Sigma rum}{lM} = \Sigma rum \\ R_v &= R\cos(Rv) = \frac{\Sigma rvm}{lM} = \Sigma rvm \\ R_w &= R\cos(Rw) = \frac{\Sigma rwm}{lM} = \Sigma rwm \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

bestimmt wird. Die positive Länge l ist so zu wählen, daß ihr Produkt mit der Masse M des ganzen Körpers in den gewählten Einheiten die Größe *eins* erhält.

Für je zwei durch den Punkt A gehende Ebenen (r), (s) hat das Produkt der beiden Ordinaten eines Massenpunktes m den Gleichungen 10) und 11) zufolge die beiden gleichen Werte:

$$\left.\begin{aligned} rs &= ru \cos(su) + rv \cos(sv) + rw \cos(sw) \\ rs &= su \cos(ru) + sv \cos(rv) + sw \cos(rw) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Das Zentrifugalmoment des Körpers in bezug auf die beiden Ebenen (r), (s) wird demnach bestimmt durch jede der beiden folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma rsm &= R_u \cos(su) + R_v \cos(sv) + R_w \cos(sw) \\ \Sigma rsm &= S_u \cos(ru) + S_v \cos(rv) + S_w \cos(rw) \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Das bezeichnete Zentrifugalmoment wird also nach Größe und Vorzeichen dargestellt sowohl durch die Projektion R_s der Strecke R auf die Achse s, als auch durch die Projektion S_r der Strecke S auf die Achse r:

$$\Sigma rsm = R_s = S_r. \quad (15)$$

Das Moment ist *positiv*, wenn der Sinn der Projektion R_s mit dem Sinn der Achse s, und folglich auch der Sinn von S_r mit dem Sinn von r übereinstimmt. Die Gleichung 15) darf als die Fundamentalbeziehung der Geometrie der Massen bezeichnet werden, da alle anderen Beziehungen aus ihr abgeleitet werden können.

11. Die Momentenkugeln. Projiziert man die Strecke R auf alle durch den Punkt A gehende Achsen, so bilden die Endpunkte der Projektionen die Kugel vom Durchmesser R, welche kurz die Momentenkugel (R) genannt werden soll. Auf jeder durch den Punkt A gelegten Achse s schneidet diese Kugel die Strecke

$$R_s = S_r$$

ab, die nach Größe und Vorzeichen das Zentrifugalmoment des Körpers M in bezug auf die beiden Ebenen (r), (s) darstellt. Alle diese Momentenkugeln werden bestimmt durch die drei Momentenkugeln (U), (V), (W) der Koordinatenebenen (u), (v), (w) im Punkte A. Die Momentenkugel (U) schneidet auf den drei Koordinatenachsen u, v, w die Strecken:

$$U_u = \Sigma u^2 m, \quad U_v = \Sigma uvm, \quad U_w = \Sigma uwm$$

ab. Ebenso werden die beiden anderen Kugeln durch die Abschnitte:

$$V_u = \Sigma vum, \quad V_v = \Sigma v^2 m, \quad V_w = \Sigma vwm$$

und

$$W_u = \Sigma wum, \quad W_v = \Sigma wvm, \quad W_w = \Sigma w^2 m$$

bestimmt. Von diesen neun Größen sind nur sechs unabhängig voneinander, nämlich die drei Trägheitsmomente U_u, V_v, W_w und die drei Zentrifugalmomente U_v, V_w, W_u. Die übrigen drei Größen ergeben sich aus den Bedingungen der Gleichung 15):

$$U_w = W_u, \quad V_u = U_v, \quad W_v = V_w.$$

Auf jeder durch den Punkt A gelegten Achse r schneiden die Momentenkugeln (U), (V), (W) die drei Strecken

$$U_r = R_u, \quad V_r = R_v, \quad W_r = R_w$$

ab, durch welche die Momentenkugel (R) der Ebene (r) für den Punkt A bestimmt wird.

Die Momentenkugel (R), Abb. 18, schneidet auf der Achse r die Strecke

$$R_r = \Sigma r^2 m$$

ab, welche das Trägheitsmoment des Körpers M für die Ebene (r) darstellt. Da diese Größe

$$R_r = R \cos (Rr)$$

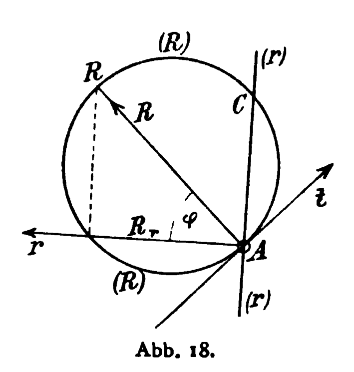


Abb. 18.

einen *positiven* Wert hat, so schließt die Strecke R mit der Achse r stets einen *spitzen* Winkel (Rr) ein.

Für jede Ebene (t), welche durch die Strecke R gelegt wird, ist das Zentrifugalmoment

$$\Sigma trm = 0;$$

denn die zugehörige Achse t berührt die Momentenkugel (R) im Punkte A. Die Ebenen (t) und die zugehörigen Achsen t bilden sonach je einen Büschel. Die Momentenkugel (R) wird von der Ebene (r) in einem Kreise vom Durchmesser

$$A\,C = \sqrt{R^2 - R_r^2} = R'$$

geschnitten.

12. Die Hauptebenen und Hauptachsen des Punktes A. Man nennt eine durch den Punkt A gehende Ebene (x) eine *Hauptebene* und die zugehörige Achse x eine *Hauptachse* dieses Punktes, wenn die zugeordnete Strecke X mit der Achse x zusammenfällt, oder was dasselbe sagt, wenn die Strecke X_x den Durchmesser der Momentenkugel (X) bildet.

Das Zentrifugalmoment des Körpers Σmxt in bezug auf eine Hauptebene (x) in Verbindung mit jeder durch die Achse x gelegten Ebene (t) ist gleich null, weil die Achse t die Momentenkugel (X) im Punkte A berührt. Wenn also für *zwei* Ebenen (t_1), (t_2), welche in der Achse x sich schneiden, die Bedingungen

$$\Sigma mxt_1 = \Sigma mxt_2 = 0$$

erfüllt sind, so ist die Achse x eine Hauptachse des Punktes A.

Zwei Hauptebenen (x), (y), deren zugeordnete Strecken X, Y nicht gleich groß sind, schneiden sich rechtwinklig; denn die Bedingung

$$X_y = Y_x = X \cos(xy) = Y \cos(xy)$$

fordert, daß

$$\cos(xy) = 0$$

sei.

Die zu zwei Hauptebenen (x), (y) rechtwinklig gestellte Ebene (z) ist auch eine Hauptebene; denn da die Strecken

$$X_z = Z_x = 0 \quad \text{und} \quad Y_z = Z_y = 0$$

sind, so fällt die Strecke Z mit der Achse z zusammen.

Ist (x) eine Hauptebene des Punktes A, so sind mindestens noch zwei zueinander und zu (x) rechtwinklig gestellte Hauptebenen (y), (z) vorhanden, die man nach Anleitung des Abschnittes 7 bestimmen kann. In dem besonderen Falle, wenn die Strecken

$$Y_y = \Sigma my^2, \quad Z_z = \Sigma mz^2$$

von *gleicher* Größe sind, ist *jede* durch die Hauptachse x gelegte Ebene eine Hauptebene des Punktes A.

13. **Die Größen der Trägheitsmomente für die Hauptebenen des Punktes A.** Wir nehmen an, daß für die Ebenen (u), (v), (w) des willkürlich gewählten Koordinatensystems die Strecken U_u, V_v, W_w, U_v, V_w, W_u bestimmt worden sind. Ist (s) eine *Hauptebene* des Punktes A, so ist:

$$S_u = S \cos(s\,u), \quad S_v = S \cos(s\,v), \quad S_w = S \cos(s\,w).$$

Die drei Bedingungen:

$$S_u = U_s, \quad S_v = V_s, \quad S_w = W_s$$

führen also zu den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} S\cos(su) &= U_u \cos(su) + U_v \cos(sv) + U_w \cos(sw) \\ S\cos(sv) &= V_u \cos(su) + V_v \cos(sv) + V_w \cos(sw) \\ S\cos(sw) &= W_u \cos(su) + W_v \cos(sv) + W_w \cos(sw) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Zwischen den unbekannten Winkeln (su), (sv), (sw) besteht ferner die Beziehung:

$$\cos^2 (s\,u) + \cos^2 (s\,v) + \cos^2 (s\,w) = 1. \tag{17}$$

Beseitigt man aus diesen vier Gleichungen die drei unbekannten Winkel, so bleibt *eine* Bedingung, die von dem Trägheitsmoment S zu erfüllen ist:

$$\left.\begin{aligned} 0 = S^3 - S^2 (U_u + V_v + W_w) + S\,(U_u V_v + U_u W_w + V_v W_w \\ - U_v^2 - V_w^2 - W_u^2) - (U_u V_v W_w + 2\, U_v V_w W_u - U_u V_w^2 \\ - V_v W_u^2 - W_w U_v^2). \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Die vorstehende Gleichung dritten Grades hat nicht nur *eine*, sondern, wie aus dem vorigen Abschnitt hervorgeht, stets *drei* reelle und zwar *positive* Wurzeln X, Y, Z, weil diese Strecken *Trägheitsmomente* darstellen. Sie stimmt überein mit der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} 0 = (S - X)(S - Y)(S - Z) = S^3 - S^2 (X + Y + Z) \\ + S\,(X\,Y + X\,Z + Y\,Z) - X\,Y\,Z, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

und man ersieht hieraus, daß die drei Größen:

$$\left.\begin{aligned} 3\,A &= U_u + V_v + W_w = X + Y + Z \\ 3\,B^2 &= U_u V_v + U_u W_w + V_v W_w - U_v^2 - V_w^2 - W_u^2 = X\,Y + X\,Z + Y\,Z \\ C^3 &= U_u V_v W_w + 2\,U_v V_w W_u - U_u V_w^2 - V_v W_u^2 - W_w U_v^2 = X\,Y\,Z \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

positiv und unabhängig von der Wahl der Koordinatenebenen (u), (v), (w) sind.

Da Gleichung 18) reelle Wurzeln hat, so kann man ihrer Auflösung die bekannte trigonometrische Form geben. Man setzt:

$$S = T \sin \varphi + A \tag{21}$$

und bringt hierdurch die Gleichung:

$$0 = S^3 - 3\,A\,S^2 + 3\,B^2\,S - C^3$$

in die Form:

$$0 = \sin^3 \varphi - \frac{3\,(A^2 - B^2)}{T^2} \sin \varphi + \frac{3\,A\,B^2 - 2\,A^3 - C^3}{T^3},$$

die mit der trigonometrischen Formel:

$$0 = \sin^3 \varphi - \frac{3}{4} \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin (3\,\varphi)$$

übereinstimmt, wenn gesetzt wird:

$$\frac{3\,(A^2 - B^2)}{T^2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3\,A\,B^2 - 2\,A^3 - C^3}{T^3} = \frac{\sin (3\,\varphi)}{4}$$

oder:

$$\left.\begin{aligned} T &= 2\,(A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}} \\ \sin(3\,\varphi) &= \frac{3\,A\,B^2 - 2\,A^3 - C^3}{2\,(A^2 - B^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Der letzten Gleichung entsprechen unendlich viele Werte von $3\,\varphi$, nämlich ein Winkel $3\,\varphi_1$, welcher zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, ferner der Winkel $(\pi - 3\,\varphi_1)$ und alle Winkel, die von diesen beiden Größen um $2\,\pi$ oder um ein vielfaches von $2\,\pi$ abweichen. Allen diesen Winkeln entsprechen jedoch nur *drei* voneinander verschiedene Werte von $\sin\varphi$, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\varphi_1 \\ &\sin\varphi_2 = \sin\left(\varphi_1 + \frac{2}{3}\,\pi\right) \\ &\sin\varphi_3 = \sin\left(\varphi_1 + \frac{4}{3}\,\pi\right). \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Die Trägheitsmomente X, Y, Z in bezug auf die Hauptebenen (x), (y), (z) haben nach Gleichung 21) also die Werte:

$$\left.\begin{aligned} X &= 2\,(A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi_1 + A \\ Y &= 2\,(A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi_2 + A \\ Z &= 2\,(A^2 - B^2)^{\frac{1}{2}} \sin\varphi_3 + A. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Zwei dieser Trägheitsmomente sind gleich groß, wenn:

$$\sin(3\,\varphi) = \pm 1$$

ist, und alle drei erhalten gleiche Größen in dem Falle:

$$A = B = C.$$

Die Trägheitsmomente des Körpers in bezug auf die *Hauptachsen* x, y, z des Punktes A haben in dieser Reihenfolge die Größen $(Y + Z)$, $(X + Z)$, $(X + Y)$.

14. Die Richtungen der Hauptachsen des Punktes A. Nachdem eine der Wurzeln der Gleichung 18), z. B. X, bestimmt worden ist, ergeben zwei der Gleichungen 16):

$$\left.\begin{aligned} X\cos(xu) &= U_u\cos(xu) + U_v\cos(xv) + U_w\cos(xw) \\ X\cos(xv) &= V_u\cos(xu) + V_v\cos(xv) + V_w\cos(xw) \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

die Proportion:

$$\cos(xu) : \cos(xv) : \cos(xw) = D_u : D_v : D_w, \qquad (26)$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} D_u &= (X - V_v)\, U_w + U_v V_w \\ D_v &= (X - U_u)\, V_w + U_v U_w \\ D_w &= (X - U_u)(X - V_v) - U_v^2. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Setzt man ferner:

$$D = \pm \sqrt{D_u^2 + D_v^2 + D_w^2}, \quad (28)$$

so folgt aus den Gleichungen 17) und 26):

$$\cos(xu) = \frac{D_u}{D}, \quad \cos(xv) = \frac{D_v}{D}, \quad \cos(xw) = \frac{D_w}{D}. \quad (29)$$

Die Unbestimmtheit des Vorzeichens von D deutet an, daß der Sinn der Achse x unbestimmt ist und nach Belieben gewählt werden kann.

Die Richtung der Hauptachse y kann in gleicher Weise bestimmt werden. Dann ergibt sich die Hauptachse z aus der Bedingung, daß sie x und y rechtwinklig schneidet.

15. **Die Beziehungen zwischen den Hauptträgheitsmomenten X, Y, Z und den übrigen Momenten zweiten Grades.** Einer durch den Punkt A gehenden Ebene (r) ist die Strecke

$$AR = R$$

zugeordnet, deren Projektionen auf die Hauptachsen x, y, z des Punktes A die Größen

$$\left.\begin{aligned} R_x &= X_r = X \cos(xr) \\ R_y &= Y_r = Y \cos(yr) \\ R_z &= Z_r = Z \cos(zr) \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

haben. Da hiernach

$$\frac{R_x^2}{X^2} + \frac{R_y^2}{Y^2} + \frac{R_z^2}{Z^2} = 1 \quad (31)$$

ist, so liegen die Endpunkte R der Strecken, die allen durch A gehenden Ebenen zugeordnet sind, auf dem Ellipsoid vom Mittelpunkt A und den Halbachsen X, Y, Z. Sind zwei Halbachsen, z. B. X und Y, gleich groß, so ist jede in der xy-Ebene durch A gelegte Achse eine *Hauptachse* dieses Punktes. Ist das Ellipsoid eine Kugel, so sind alle durch A gehende Achsen Hauptachsen.

Die Länge der Strecke R wird durch die Gleichung:

$$R^2 = X^2 \cos^2(xr) + Y^2 \cos^2(yr) + Z^2 \cos^2(zr) \quad (32)$$

bestimmt.

Das *Zentrifugalmoment* des Körpers in bezug auf je zwei durch A gehende Ebenen (r), (s) hat nach den Gleichungen 14) und 30) die Größe:

$$\left.\begin{aligned} R_s = S_r = X\cos(xr)\cos(xs) + Y\cos(yr)\cos(ys) \\ + Z\cos(zr)\cos(zs). \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Läßt man die Ebene (s) mit der Ebene (r) zusammenfallen, so ergibt sich das Trägheitsmoment in bezug auf die Ebene (r):

$$R_r = X\cos^2(xr) + Y\cos^2(yr) + Z\cos^2(zr). \qquad (34)$$

Die Summe der beiden Trägheitsmomente J_r und R_r für die Achse r und für die Ebene (r) ist gleich der Summe der drei Hauptträgheitsmomente:

$$J_r + R_r = X + Y + Z. \qquad (35)$$

Daher ist

$$J_r = X\sin^2(xr) + Y\sin^2(yr) + Z\sin^2(zr). \qquad (36)$$

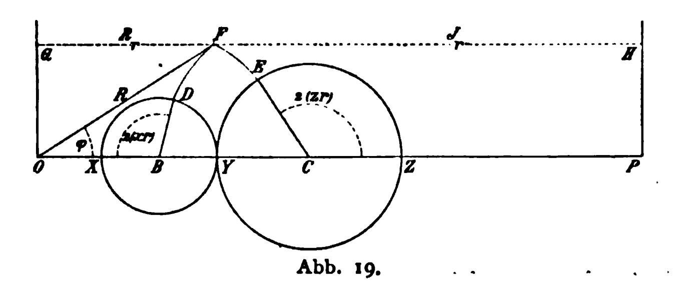


Abb. 19.

16. Graphische Darstellung der vorstehenden Beziehungen. Auf einer Achse OP (Abb. 19) sind die Strecken:

$$OX = X, \quad OY = Y, \quad OZ = Z, \quad OP = X + Y + Z$$

und in den Kreisen XY, YZ die Zentriwinkel

$$XBD = 2(xr), \quad ZCE = 2(zr)$$

aufzutragen. Der Schnittpunkt F, der beiden Kreisbogen DF, EF, welche um die Mittelpunkte B und C mit den Halbmessern BE und CD gezogen sind, bestimmt:

1. durch die Strecke OF den Durchmesser R der Momentenkugel (R),

2. durch FOB den Winkel φ, den die Strecke R mit der Achse r bildet,

3. durch die Abszisse FG das Trägheitsmoment R_r des Körpers in bezug auf die Ebene (r),

4. durch die Abszisse FH das Trägheitsmoment J_r des Körpers in bezug auf die *Achse* r,

5. durch die Ordinate OG den in Abb. 18 mit AC bezeichneten Durchmesser des Kreises, in dem die Momentenkugel (R) von der Ebene (r) geschnitten wird.

Um sich hiervon zu überzeugen, bestimme man die Länge

$$BF = BE$$

aus den Dreiecken OBF, CBE und die Länge

$$CF = CD$$

aus den Dreiecken OCF und BCD:

$$\overline{OF}^2 + \overline{OB}^2 - 2\,OF \cdot OB \cos\varphi = \overline{BC}^2 + \overline{CE}^2 + 2\,BC \cdot CE \cos(2\,(zr)),$$

$$\overline{OF}^2 + \overline{OC}^2 - 2\,OF \cdot OC \cos\varphi = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + 2\,BC \cdot BD \cos(2\,(xr)).$$

Setzt man in diese Gleichungen die bekannten Größen ein:

$$OB = \frac{X+Y}{2}, \quad OC = \frac{Y+Z}{2}, \quad BC = \frac{Z-X}{2},$$

$$BD = \frac{Y-X}{2}, \quad CE = \frac{Z-Y}{2};$$

so erhält man:

$$\overline{OF}^2 = X^2 \cos^2(xr) + Y^2 \cos^2(yr) + Z^2 \cos^2(zr) = R^2,$$

$$OF \cos\varphi = FG = X \cos^2(xr) + Y \cos^2(yr) + Z \cos^2(zr) = R_r,$$

womit die obigen Behauptungen bewiesen sind.

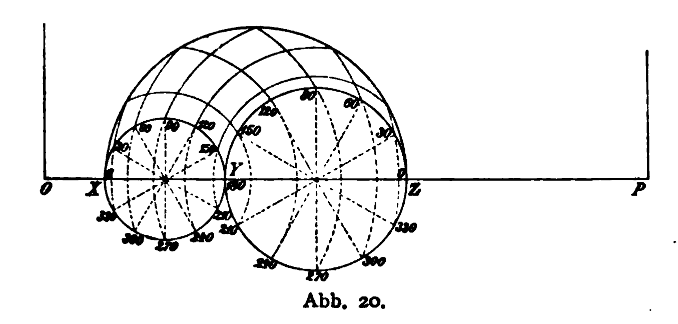


Abb. 20.

Ein Netz von Kreisen (Abb. 20) mit den eingeschriebenen Größen der Winkel $2\,(xr)$ und $2\,(zr)$ gibt ein vollständiges Bild der darzustellenden Beziehungen. Die möglichen Lagen des Punktes F bedecken, wie man leicht erkennt, die Fläche, welche von den drei Halbkreisen XY, XZ, YZ begrenzt wird.

17. **Die Beziehungen zwischen den Hauptachsen des Schwerpunktes S und den Hauptachsen eines anderen gegebenen Punktes A.** In den meisten Fällen der Anwendung empfiehlt es sich, zunächst die Hauptachsen des Schwerpunktes x_s, y_s, z_s und die zugehörigen Trägheitsmomente X_s, Y_s, Z_s nach Anleitung der Abschnitte 13 und 14 zu bestimmen. Die Hauptachsen x, y, z eines anderen gegebenen Punktes A, dessen Ordinaten in bezug auf die Ebenen (x_s), (y_s), (z_s) mit a_x, a_y, a_z bezeichnet werden, ergeben sich dann in folgender Weise. Man legt durch den Punkt A die Koordinatenebenen (u), (v), (w) parallel zu den Hauptschwerpunktsebenen (x_s), (y_s), (z_s), so daß für jeden Massenpunkt

$$u = x_s - a_x, \quad v = y_s - a_y, \quad w = z_s - a_z$$

ist. Beachtet man nun, daß jedes der sechs Momente $\Sigma m x_s$, $\Sigma m y_s$, $\Sigma m z_s$, $\Sigma m x_s y_s$, $\Sigma m x_s z_s$, $\Sigma m y_s z_s$ gleich null ist, so folgt:

$$\left.\begin{aligned}
U_u &= \Sigma m\,(x_s - a_x)^2 = X_s + M a_x^2 \\
V_v &= \Sigma m\,(y_s - a_y)^2 = Y_s + M a_y^2 \\
W_w &= \Sigma m\,(z_s - a_z)^2 = Z_s + M a_z^2 \\
U_v &= \Sigma m\,(x_s - a_x)\,(y_s - a_y) = M a_x a_y \\
V_w &= \Sigma m\,(y_s - a_y)\,(z_s - a_z) = M a_y a_z \\
W_u &= \Sigma m\,(z_s - a_z)\,(x_s - a_x) = M a_x a_z.
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Diese Werte sind in die Gleichungen der Abschnitte 13 und 14 einzusetzen, um die Hauptachsen des Punktes A und die zugehörigen Trägheitsmomente zu ermitteln.

Liegt der Punkt A auf einer Schwerpunktshauptachse, z. B. auf der Achse x_s, ist also

$$a_y = a_z = 0,$$

so werden auch die Zentrifugalmomente

$$U_v = V_w = W_u = 0.$$

Die Hauptachsen des Punktes A fallen also mit den Achsen u, v, w zusammen und sind zu den Hauptschwerpunktsachsen parallel gerichtet.

18. **Literarische Notizen.** Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung wurde folgenden Aufsätzen entnommen:

1. *Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisen-Konstruktionen*, Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1870, S. 41 und 1877, S. 51. In dem ersten Beitrage sind die Darstellungen

der Abb. 3, 4, 14, 15, 16 und in dem zweiten die Darstellungen der Abb. 11, 12, 13 mitgeteilt worden.

2. *Ueber die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen,* Zivilingenieur 1887, S. 43; enthält die von den Abb. 5 bis 9 gezeigten Beziehungen und Darstellungen.

3. *Beitrag zur Geometrie der Massen,* Zivilingenieur 1896, S. 237; behandelt die Momente zweiten Grades von starren Körpern, Abschnitte 10 bis 17.

In betreff der sehr umfangreichen Literatur verweisen wir auf *Jung, Geometrie der Massen,* Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, 4.

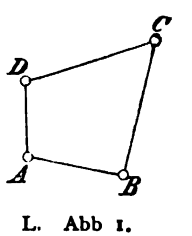
Abhandlung IV.

Die Bewegung der ebenen Getriebe.

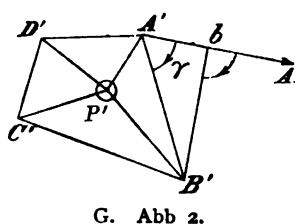
Erster Teil.

Die Geometrie der Bewegung ebener Getriebe.

1. Der Geschwindigkeitsplan einer ebenen Punktgruppe. Wir betrachten während eines unendlich kleinen Zeitabschnittes eine Gruppe von Punkten $A, B, C, D \ldots$, die in einer Ebene sich bewegen und deren augenblickliche Lage durch den *Lageplan* Abb. 1 in dem Maßstabe 1 cm gleich μ cm angegeben wird. Die Geschwindigkeiten der Punkte während jenes Zeitabschnittes sollen in einer besonderen Zeichnung, dem *Geschwindigkeitsplan* Abb. 2, durch die Strecken $P'A'$, $P'B'$, $P'C'$ ... nach Größe, Richtung und Sinn, und zwar in dem Maßstabe 1 cm gleich μ' cm sek^{-1} dargestellt werden.



L. Abb 1.



G. Abb 2.

In den Abbildungen tragen die Lagepläne, die Geschwindigkeitspläne und die Beschleunigungspläne die abgekürzten Bezeichnungen L, G und B. Der gemeinschaftliche Anfangspunkt P' aller Geschwindigkeitsstrecken heißt der *Pol* des Geschwindigkeitsplans. Die Geschwindigkeit $P'B'$ des Punktes B kann zusammengesetzt werden aus der Geschwindigkeit $P'A'$ des Punktes A und der von der Strecke $A'B'$ dargestellten *relativen* Geschwindigkeit des Punktes B gegen den Punkt A. Wir zerlegen ferner diese relative Geschwindigkeit in die beiden zur Strecke AB parallel und normal gerichteten Komponenten $A'b$, bB' und erhalten hierdurch folgendes Bild von der Bewegung der zwei Punkte A, B: Beide Punkte bewegen sich mit der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit $P'A'$, während B gleich-

zeitig noch zwei andere Bewegungen mit den Geschwindigkeiten $A'b$, bB' ausführt. Infolge der Geschwindigkeit $A'b$ ändert sich die *Länge* der Strecke AB, und zwar in positivem oder in negativem Sinne, je nachdem die beiden Strecken AB, $A'b$ dem *Sinne* nach übereinstimmen oder einander entgegengesetzt sind. Die Strecke $A'b$ bestimmt sonach die *relative Dehnungsgeschwindigkeit* des Punktes B gegen den Punkt A. Das Verhältnis der Geschwindigkeit $A'b$ zur Länge AB, also die Größe

$$\delta = \frac{A'b}{AB} \frac{\mu'}{\mu} \text{ sek}^{-1}$$

heißt die *Dehnungsgeschwindigkeit der Strecke* AB. Sie gibt an, um welchen Bruchteil diese Strecke in einer Sekunde ihre Länge verändert. Es empfiehlt sich, das Verhältnis μ' zu μ gleich einer runden Zahl zu wählen. Im folgenden soll, wenn nichts anderes angegeben wird, stets μ' gleich μ angenommen werden, so daß die Geschwindigkeit δ durch die Formel

$$\delta = \frac{A'b}{AB} \text{ sek}^{-1} \qquad (1)$$

bestimmt wird. Infolge der *dritten* von bB' dargestellten Geschwindigkeit des Punktes B ändert sich die *Richtung* der Strecke AB; wir nennen diese Komponente daher die *relative Drehgeschwindigkeit* des Punktes B gegen den Punkt A und das Verhältnis

$$\omega = \frac{bB'}{AB} \text{ sek}^{-1} \qquad (2)$$

die *Drehgeschwindigkeit der Strecke* AB. Um auch den *Sinn* der beiden Geschwindigkeiten δ, ω auf algebraischem Wege angeben zu können, wird es nötig, den von den beiden Strecken AB, $A'B'$ gebildeten Winkel γ in einer bestimmten Weise zu messen und zu bezeichnen: Der Winkel γ, den ein Strahl im Sinne der Uhrzeigerdrehung, dem *positiven* Drehungssinne, zu durchlaufen hat, um von der Richtung AB nach der Richtung $A'B'$ zu gelangen, soll der *Geschwindigkeitswinkel* der Strecke AB genannt und mit $(AB, A'B')$ bezeichnet werden. Bei dieser Bezeichnung kommt nicht allein die Aufeinanderfolge der Buchstaben, durch die der *Streckensinn* angegeben wird, sondern auch die Reihenfolge der Strecken in Betracht; z. B. ist

$$(A'B', AB) = 360^\circ - (AB, A'B')$$
$$(BA, B'A') = (AB, A'B').$$

Mit Benutzung dieser Regel, die bei allen Winkelbezeichnungen an-

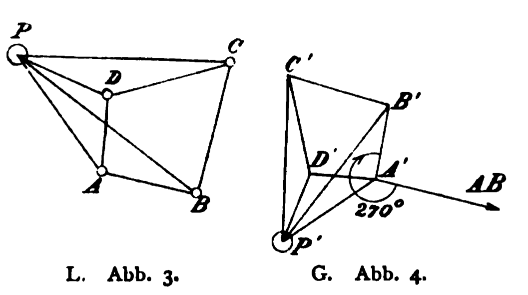
gewandt werden soll, ergeben sich die Geschwindigkeiten δ, ω nicht nur der Größe, sondern auch dem Sinne nach durch die Formeln:

$$\delta = \frac{A'B'}{AB} \cos (AB, A'B') = \frac{A'B'}{AB} \cos \gamma \qquad (3)$$

$$\omega = \frac{A'B'}{AB} \sin (AB, A'B') = \frac{A'B'}{AB} \sin \gamma. \qquad (4)$$

Denn man ersieht ohne weiteres, daß AB sich *verlängert,* wenn $\cos \gamma$ positiv ist, und daß AB im *positiven* Sinne der Uhrzeigerbewegung sich dreht, wenn $\sin \gamma$ das positive Vorzeichen trägt.

2. Der Geschwindigkeitsplan einer starren Punktgruppe, Abb. 3 und 4. Wenn die bewegten Punkte $A, B, C, D \ldots$ starr miteinander verbunden sind, so bleiben die Winkel zwischen den Strecken $AB, BC, CA \ldots$ unverändert. Daher sind die gleichzeitigen Drehgeschwindigkeiten aller Strecken nach Größe und Sinn einander gleich. Die Dehnungsgeschwindigkeit einer jeden Strecke ist ihrer Starrheit wegen gleich null. Folglich sind die Geschwindigkeitswinkel aller Strecken gleich groß, und zwar entweder alle gleich 90° oder gleich 270°. Im ersten Falle hat die gemeinschaftliche Drehgeschwindigkeit den *positiven* Sinn und die Größe



L. Abb. 3. G. Abb. 4.

$$\omega = \frac{A'B'}{AB} \sin 90^\circ = + \frac{A'B'}{AB} = + \frac{B'C'}{BC} = + \frac{A'C'}{AC} = \cdots,$$

während sie im zweiten Falle den *negativen* Wert

$$\omega = \frac{A'B'}{AB} \sin 270^\circ = - \frac{A'B'}{AB} = - \frac{B'C'}{BC} = - \frac{A'C'}{AC} = \cdots$$

hat. Da diese Gleichungen für je zwei einander entsprechende Dreiecke ABC, $A'B'C'$ gelten, so sind die beiden Punktgruppen $ABCD \ldots$, $A'B'C'D' \ldots$ *geometrisch ähnlich und von gleichem Sinne,* was durch das Zeichen:

$$A'B'C'D' \ldots \approx ABCD \ldots \qquad (5)$$

ausgedrückt werden soll. Dasselbe bringt also nicht nur die Aehnlichkeit der beiden Gruppen, sondern auch die Gleichheit der Ge-

schwindigkeitswinkel zur Darstellung. In dem besonderen Falle, wenn die Drehgeschwindigkeit ω gleich null ist, fallen alle Punkte $A', B', C' \ldots$ zusammen. Der Geschwindigkeitsplan besteht dann aus einer einzigen Strecke $P'A'$ und bestimmt eine *Parallelverschiebung* der Punktgruppe.

Der mit der Gruppe starr verbundene und durch die Bedingung:

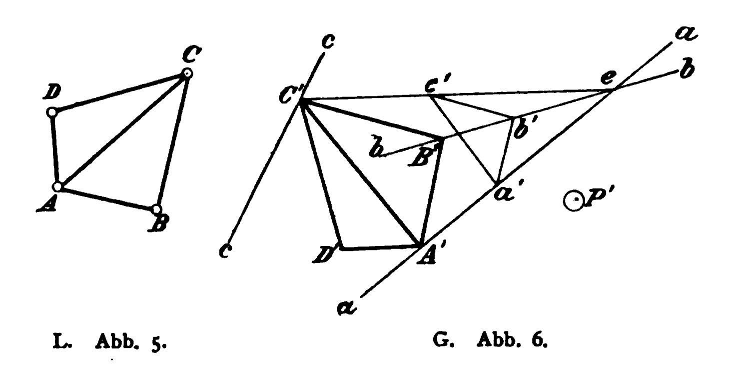
$$PABC \ldots \approxeq P'A'B'C' \ldots$$

bestimmte Punkt P heißt der *Geschwindigkeitspol des Lageplans.* Von allen Punkten der mit der Gruppe starr verbundenen Ebene ABC ist P der einzige, dessen Geschwindigkeit im Zeitpunkt der Betrachtung gleich null ist. Die Bewegung der starren Punktgruppe besteht also aus einer unendlich kleinen Drehung um den Pol P mit der Drehgeschwindigkeit ω.

Die Geschwindigkeit v eines Punktes A der Gruppe wird bestimmt durch die beiden Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} v = \omega\, PA \\ (PA,\, v) = 90^\circ \text{ oder } = 270^\circ, \end{array}\right\} \qquad (6)$$

je nachdem ω positiv oder negativ ist. Der Geschwindigkeitsplan einer starren Punktgruppe wird bestimmt durch die Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'B'$ *zweier* Punkte A, B der Gruppe. Diese beiden Geschwindigkeiten sind voneinander abhängig durch die Bedingung, daß $A'B'$ normal zu AB gerichtet sein muß.



L. Abb. 5. G. Abb. 6.

Der Plan ist ferner bestimmt, wenn außer dem Pol P' *drei* Gerade aa, bb, cc, Abb. 5 und 6, gegeben sind, auf welchen beziehungsweise die Punkte A', B', C' liegen müssen. Läßt man die zwei Ecken a', b' des ähnlich-veränderlichen Dreiecks

$$a'b'c' \approxeq ABC,$$

dessen Seiten $a'b'$, $b'c'$, $c'a'$ zu den Geraden AB, BC, CA normal gerichtet sind, auf den Geraden aa, bb sich bewegen, so beschreibt die dritte Ecke c' die durch den Schnittpunkt e von aa und bb gehende Gerade $c'e$. Man bestimmt also C' durch den Schnitt der Geraden $c'e$, cc, ferner einen zweiten Punkt A', indem man $C'A'$ normal zu CA zieht, und den übrigen Teil des Geschwindigkeitsplans durch die Bedingung

$$A'B'C'D' \ldots \approx ABCD \ldots.$$

In dem besonderen Falle, wenn die beiden Geraden cc, $c'e$ zusammenfallen, wird der Plan unbestimmt.

3. Der Geschwindigkeitsplan einer ähnlich-veränderlichen Punktgruppe, Abb. 7 und 8. Da die Winkel zwischen den Strecken AB, BC, CA ... bei der *ähnlichen* Veränderung der Gruppe unverändert bleiben, so sind die gleichzeitigen Drehgeschwindigkeiten aller Strecken gleich groß:

$$\omega = \frac{A'B'}{AB} \sin \gamma_1 = \frac{B'C'}{BC} \sin \gamma_2 = \frac{C'A'}{CA} \sin \gamma_3 = \cdots.$$

L. Abb. 7.

G. Abb. 8.

Auch die Dehnungsgeschwindigkeiten aller Strecken sind infolge der ähnlichen Veränderung von gleicher Größe:

$$\delta = \frac{A'B'}{AB} \cos \gamma_1 = \frac{B'C'}{BC} \cos \gamma_2 = \frac{C'A'}{CA} \cos \gamma_3 = \cdots.$$

Die Geschwindigkeitswinkel γ_1, γ_2, γ_3 ... sind daher von gleicher Größe γ und durch die Bedingung

$$\frac{\omega}{\sin \gamma} = \frac{\delta}{\cos \gamma} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \cdots \qquad (7)$$

bestimmt. Folglich ist wie bei einer starren Punktgruppe

$$A'B'C'D' \ldots \approx ABCD \ldots \qquad (8)$$

Der gemeinschaftliche Geschwindigkeitswinkel γ kann jede Größe annehmen; er liegt:

im ersten	Quadranten,	wenn	ω positiv	und δ positiv	ist
„ zweiten	„	„	ω positiv	„ δ negativ	„
„ dritten	„	„	ω negativ	„ δ negativ	„
„ vierten	„	„	ω negativ	„ δ positiv	

ist. Zählt man alle Punkte der Ebene ABC zur ähnlich-veränderlichen Gruppe, so enthält dieselbe nur einen einzigen Punkt P, dessen augenblickliche Geschwindigkeit gleich null ist. Dieser *Geschwindigkeitspol des Lageplans* ist wiederum bestimmt durch die Bedingung

$$PABC \ldots \approx P'A'B'C' \ldots \tag{9}$$

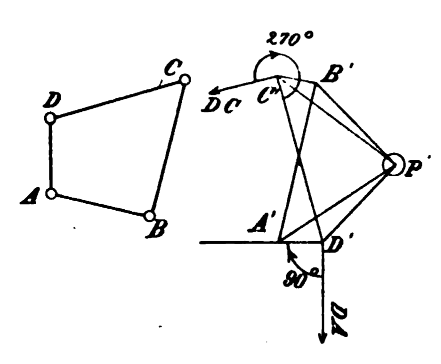
Jede unendlich kleine Bewegung einer ähnlich-veränderlichen Punktgruppe besteht demnach aus dieser Veränderung in Verbindung mit einer gleichzeitigen unendlich kleinen Drehung um einen ruhenden Punkt P. Der gemeinschaftliche Geschwindigkeitswinkel

$$\gamma = (PA,\ P'A') = (PB,\ P'B') = (PC,\ P'C') \ldots$$

wird gleich null oder 180°, wenn ω gleich null ist, er wird gleich 90° oder 270° in dem besonderen Falle, wenn δ gleich null ist.

Der Geschwindigkeitsplan einer ähnlich-veränderlichen Punktgruppe $ABC \ldots$ wird bestimmt durch die *voneinander unabhängigen* Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'B'$ *zweier* Punkte A, B der Gruppe. Bleiben diese beiden Geschwindigkeiten unverändert, so ändern sich auch die Geschwindigkeiten der anderen Punkte nicht. *Wenn also zwei Punkte einer ähnlich-veränderlichen Gruppe mit unveränderlichen Geschwindigkeiten in geraden Linien sich bewegen, so beschreibt auch jeder andere Punkt der Gruppe mit unveränderlicher Geschwindigkeit eine Gerade.*

4. Der Geschwindigkeitsplan eines Stabpolygons, Abb. 9 und 10. AB, BC, CD ... bezeichnen m starre Körper, die parallel zur Bildebene sich bewegen, in den Punkten A, B, C ... durch Gelenke miteinander verbunden sind und eine geschlossene Kette bilden. Durch die Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'B'$, $P'C'$ ... der Gelenke sind die Bewegungen der Körper vollständig bestimmt. Sie können also ersetzt werden durch starre Stäbe AB, BC, CD ..., und



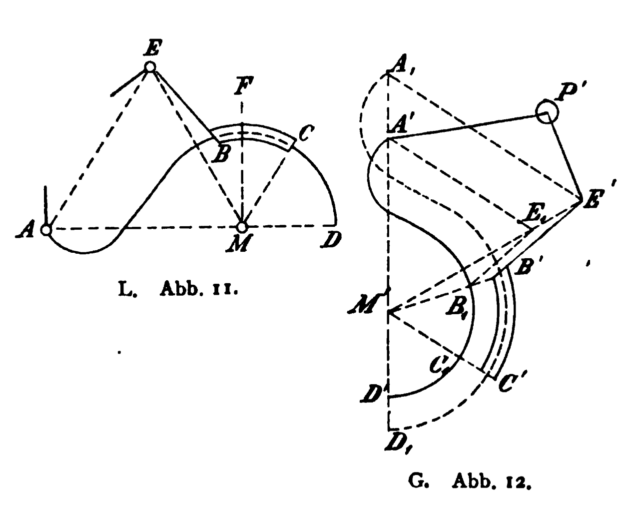
L. Abb. 9. G. Abb. 10.

ein solches Körperpolygon soll daher ein *Stabpolygon* genannt werden. Die geometrische Beziehung des Geschwindigkeitsplans zum Lageplan besteht einfach darin, *daß jede Seite des geschlossenen m-Ecks $A'B'C'D'\ldots$ zu der entsprechenden Seite des m-Ecks $ABCD\ldots$ normal gerichtet sein muß;* denn der Geschwindigkeitswinkel eines jeden starren Stabes ist entweder gleich 90° oder gleich 270°. Für die folgenden Anwendungen dieser Beziehung kommt nur der einfachste Fall in Betracht, in dem alle Ecken des Polygons $A'B'C'D'\ldots$ bis auf eine, z. B. B', gegeben sind. Man zieht $A'B'$ normal zu AB, $C'B'$ normal zu CB und bestimmt hierdurch die Geschwindigkeit $P'B'$ des Gelenkes B sowie die Drehgeschwindigkeiten

$$\frac{A'B'}{AB}\sin(AB,\ A'B') \text{ und } \frac{B'C'}{BC}\sin(BC,\ B'C')$$

der beiden Stäbe AB, BC.

5. Der Geschwindigkeitsplan eines Stabpolygons mit Schieberverbindungen, Abb. 11 und 12. Es seien AD und BCE zwei Glieder eines Stabpolygons, die in den Gelenken A, E mit den benachbarten Gliedern und durch den Schieber BC miteinander verbunden sind. Der den Schieber führende Stabteil BCD bildet einen Kreisbogen vom Mittelpunkt M. Wir nehmen an, daß die voneinander unabhängigen Geschwindigkeiten $P'A'$, $P'E'$ der Gelenke A, E gegeben seien. Die relative Bewegung der beiden Glieder gegeneinander besteht in einer Drehung um den Punkt M;



L. Abb. 11.

G. Abb. 12.

denn diese Bewegung bleibt möglich, wenn ein Gelenk im Punkte M durch einen Stab MD starr mit dem Gliede AD und durch einen zweiten Stab MC starr mit dem Gliede BCE verbunden wird. Da also sowohl die Punkte A und M als auch die Punkte E und M starr miteinander verbunden sind, so bestimmt man die Geschwindig-

keit $P'M'$ des Gelenkes M, indem man $A'M'$ normal zu AM und $E'M'$ normal zu EM zieht. Hierauf sind die Punktgruppen

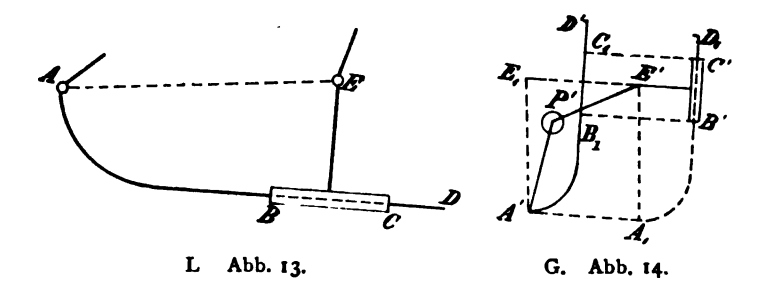
$$A'M'D' \approxeq AMD \text{ und } M'B'C'E' \approxeq MBCE$$

zu bilden.

Zweites Verfahren. Man kann die Bewegung des Gliedes BCE zusammensetzen aus einer Bewegung in starrer Verbindung mit dem Gliede AD und einer gleichzeitigen Drehung um den Punkt M. Die erste Bewegung wird durch den Plan $P'A'D'B_1C_1E_1$, die zweite durch die im Punkte M' sich schneidenden Geschwindigkeitsstrecken B_1B', C_1C', E_1E' dargestellt. Ebenso läßt sich auch die Bewegung des Gliedes AD zusammensetzen aus einer durch den Geschwindigkeitsplan $P'B'C'E'A_1D_1$ dargestellten Bewegung in starrer Verbindung mit dem Gliede BCE und einer gleichzeitigen Drehung um den Punkt M, bei der die Punkte A, D die Geschwindigkeiten A_1A', D_1D' annehmen. Man bestimmt also die Punkte A_1, E_1, indem man $E'A_1$ und $A'E_1$ normal zu AE, ferner $M'A'A_1$ normal zu MA und $M'E_1E'$ normal zu ME zieht. Alsdann können die Punktgruppen

$$A'D'B_1C_1E_1 \approxeq A_1D_1B'C'E' \approxeq ADBCE$$

und hierdurch der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$ gebildet werden.



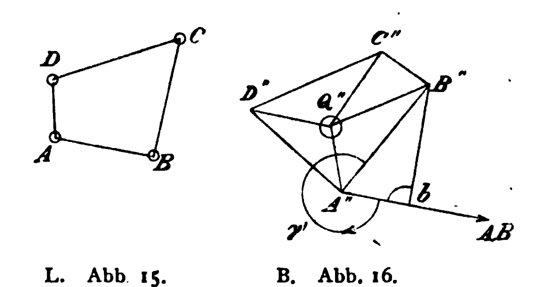
L Abb. 13. G. Abb. 14.

Diese Bildungsweise ist auch in dem Falle anwendbar, wenn der den Schieber führende Stab BCD *gerade* ist, Abb. 13 und 14, wenn also der Punkt M unendlich fern liegt. Um den Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$ zu bilden, zieht man $A'E_1$ und $E'A_1$ normal zu AE, ferner $A'A_1$ und $E'E_1$ parallel zu BD und bildet

$$A'D'B_1C_1E_1 \approxeq A_1D_1B'C'E' \approxeq ADBCE.$$

6. Der Beschleunigungsplan einer Punktgruppe, Abb. 15 und 16. In ähnlicher Weise wie der Geschwindigkeitsplan entsteht

der *Beschleunigungsplan* der ebenen Bewegung einer Punktgruppe, indem man die gleichzeitigen Beschleunigungen der Punkte $A, B, C \dots$ durch Strecken $Q''A''$, $Q''B''$, $Q''C'' \dots$ darstellt, die von einem gemeinschaftlichen Anfangspunkt Q'', dem *Pol* des Beschleunigungsplans, ausgehen. Der Maßstab dieser Darstellung, 1 cm gleich μ'' cm sek^{-2}, ist zweckmäßig so zu wählen, daß er zum Maßstab des Lageplans, 1 cm gleich μ cm, in einem einfachen Verhältnis steht. Für die folgenden Anwendungen wählen wir, wenn nichts anderes bemerkt wird, stets



L. Abb. 15. B. Abb. 16.

$$\mu'' = \mu' = \mu.$$

Auch die Zerlegung der Beschleunigungen kann in derselben Weise ausgeführt und bezeichnet werden wie die der Geschwindigkeiten im Abschnitt 1. Wir zerlegen also z. B. die Beschleunigung $Q''B''$ des Punktes B in die Beschleunigung $Q''A''$ des Punktes A und die relative Beschleunigung $A''B''$ des Punktes B gegen den Punkt A. Der Winkel

$$\gamma' = (AB,\ A''B'')$$

wird der *Beschleunigungswinkel* der Strecke AB genannt. Wir zerlegen ferner die Beschleunigung $A''B''$ in die zu AB parallel und normal gerichteten Komponenten $A''b$, bB'' und bezeichnen erstere als die *relative Dehnungsbeschleunigung*, letztere als die *relative Drehbeschleunigung* des Punktes B gegen den Punkt A. Die Verhältnisse dieser Beschleunigungsstrecken zur Länge AB bilden die *Dehnungsbeschleunigung* δ' und die *Drehbeschleunigung* ω' der Strecke AB:

$$\left.\begin{aligned} \delta' &= \frac{A''b}{AB} = \frac{A''B''}{AB}\cos(AB,\ A''B'') = \frac{A''B''}{AB}\cos\gamma' \\ \omega' &= \frac{bB''}{AB} = \frac{A''B''}{AB}\sin(AB,\ A''B'') = \frac{A''B''}{AB}\sin\gamma'. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

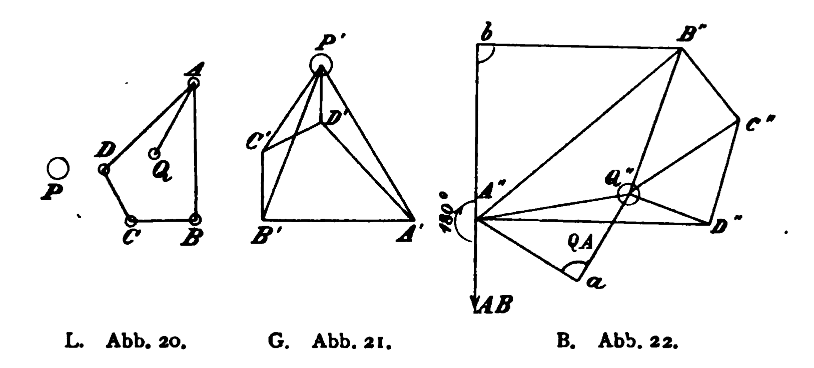
Sinn und Vorzeichen dieser beiden Größen, deren gemeinschaftliche Maßeinheit die sek^{-2} ist, werden durch $\cos\gamma'$ und $\sin\gamma'$ bestimmt.

Läßt man gleichzeitig mit der Bewegung der Punkt-

gruppe $ABC\ldots$, Abb. 17 bis 19, den zugehörigen Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'\ldots$ bei festliegendem Pol P' sich ändern, so bildet der Beschleunigungsplan $Q''A''B''C''\ldots$ der Gruppe $ABC\ldots$ zugleich den Geschwindigkeitsplan der Punktgruppe $A'B'C'\ldots$; denn werden die Geschwindigkeiten der Punkte $A, B, C\ldots$ zur Zeit t durch die Strecken $P'A'$, $P'B'$, $P'C'\ldots$ und zur Zeit $t+dt$ durch die Strecken $P'A_1$, $P'B_1$, $P'C_1\ldots$ dargestellt, so ergeben sich sowohl die Geschwindigkeiten der Punkte $A', B', C'\ldots$ als auch die Beschleunigungen der Punkte $A, B, C\ldots$, indem man die unendlich kleinen Strecken $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1\ldots$ durch die unendlich kleine Zeit dt dividiert. Die Strecken sind im ersten Falle mit dem Längenmaßstabe, in dem zweiten mit dem Geschwindigkeitsmaßstabe zu messen.

L. Abb. 17. G. Abb. 18. B. Abb. 19.

7. Der Beschleunigungsplan einer starren Punktgruppe, Abb. 20 bis 22. Wenn die beiden Punkte A, B, Abb. 20, starr miteinander verbunden sind, so ist zu jeder Zeit die Strecke $A'B'$,



L. Abb. 20. G. Abb. 21. B. Abb. 22.

Abb. 21, normal zur Strecke AB gerichtet. Die gleichzeitigen Drehgeschwindigkeiten dieser beiden Strecken sind daher nach Größe und Sinn einander gleich:

$$\frac{A''b}{A'B'} = \frac{A''B''}{A'B'} \sin(A'B',\, A''B'') = \frac{A'B'}{AB} \sin(AB,\, A'B'). \quad (11)$$

Da demnach die gleich großen Winkel $(AB, A'B')$, $(A'B', A''b)$ beide entweder gleich 90° oder gleich 270° sind, so ist der doppelt so große Winkel

$$(AB, A''b) = (AB, A'B') + (A'B', A''b)$$

entweder gleich 180° oder gleich 540°, d. h. *der Sinn der Strecke $A''b$ ist in jedem Fall dem Sinn der Strecke AB entgegengesetzt.* In Verbindung mit Gleichung 11) folgt hieraus:

$$A''b = A''B'' \cos(AB, A''B'') = -\frac{(A'B')^2}{AB} \tag{12}$$

oder

$$\delta' = -\omega^2, \tag{13}$$

d. h. *die Dehnungsbeschleunigung einer starren Strecke ist in jedem Zeitpunkt gleich dem negativen Quadrat ihrer Drehgeschwindigkeit.* Alle Strecken einer starren Punktgruppe haben dieselbe Drehgeschwindigkeit ω, also nach Gleichung 13) auch dieselbe Dehnungsbeschleunigung δ'. Da in jedem Zeitabschnitt alle Drehgeschwindigkeiten um gleiche Größen sich ändern, so haben alle Strecken auch gleiche Drehbeschleunigungen ω' und nach den Gleichungen 10) gleiche Beschleunigungswinkel γ'. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\delta'}{\cos\gamma'} = \frac{\omega'}{\sin\gamma'} = \frac{A''B''}{AB} = \frac{B''C''}{BC} = \frac{C''A''}{CA} = \ldots, \tag{14}$$

d. h. die beiden Punktgruppen $A''B''C''D''\ldots$, $ABCD\ldots$ sind geometrisch ähnlich und von gleichem Sinn:

$$A''B''C''D''\ldots \approx ABCD\ldots \tag{15}$$

Der mit der Gruppe $ABC\ldots$ starr verbundene und durch die Bedingung

$$QABC\ldots \approx Q''A''B''C''\ldots \tag{16}$$

bestimmte Punkt Q heißt der *Beschleunigungspol des Lageplans.* Von allen Punkten der bewegten Ebene $ABC\ldots$ ist Q der einzige, dessen augenblickliche Beschleunigung null ist, der also in zwei aufeinander folgenden, unendlich kleinen Zeitabschnitten mit unveränderter Geschwindigkeit in gerader Linie sich bewegt.

Der durch die Gleichung

$$\frac{\sin\gamma'}{\cos\gamma'} = \frac{\omega'}{\delta'} = -\frac{\omega'}{\omega^2} \tag{17}$$

bestimmte Beschleunigungswinkel

$$\gamma' = (QA, Q''A'') = (QB, Q''B'') = \ldots$$

liegt, weil δ' stets negativ ist, im zweiten oder im dritten Quadranten, je nachdem ω' positiv oder negativ ist.

Die Beschleunigungsstrecke $Q''A''$ ist proportional der Strecke QA und setzt sich zusammen aus der relativen Dehnungsbeschleunigung des Punktes A gegen den Punkt Q

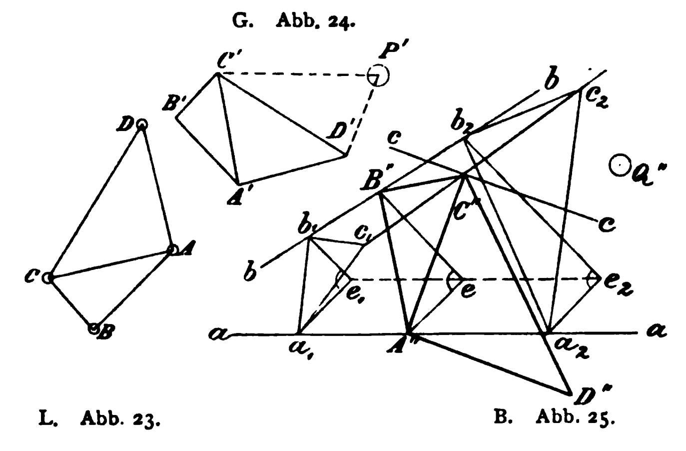
$$Q''a = \delta' \; QA = - \omega^2 \; QA \qquad (18)$$

und der relativen Drehbeschleunigung

$$aA'' = \omega' \; QA. \qquad (19)$$

Der Beschleunigungsplan einer starren Punktgruppe wird zufolge Gleichung 15) bestimmt durch die Beschleunigungen $Q''A''$, $Q''B''$ *zweier* Punkte der Gruppe. Diese beiden Strecken sind voneinander abhängig durch Gleichung 12), nach der die Projektion $A''b$ der Strecke $A''B''$ auf die Gerade AB den Sinn BA und die Größe $\frac{(A'B')^2}{AB}$ haben muß.

Der Plan ist ferner bestimmt, wenn außer dem Pol Q'' drei Gerade aa, bb, cc, Abb. 25, gegeben sind, auf welchen beziehungsweise die Punkte A'', B'', C'' liegen müssen. Man bildet zwei Vier-



ecke $a_1 b_1 c_1 e_1$ und $a_2 b_2 c_2 e_2$, die folgende Bedingungen erfüllen: Die Punkte a_1, a_2 liegen auf aa, b_1, b_2 auf bb; die Strecken $a_1 e_1$, $a_2 e_2$ haben die Richtung und den Sinn BA, Abb. 23—25, und die gemeinschaftliche Größe

$$a_1 e_1 = a_2 e_2 = \frac{(A'B')^2}{AB}.$$

Die Strecken $e_1 b_1$, $e_2 b_2$ sind normal zu AB gerichtet, und endlich ist

$$a_1 b_1 c_1 \approxeq a_2 b_2 c_2 \approxeq ABC.$$

Erteilt man nun den Punkten a_1, b_1, c_1, e_1 gleichzeitig die Geschwindigkeiten $a_1 a_2$, $b_1 b_2$, $c_1 c_2$, $e_1 e_2$, so bleiben bei der Bewegung unverändert:

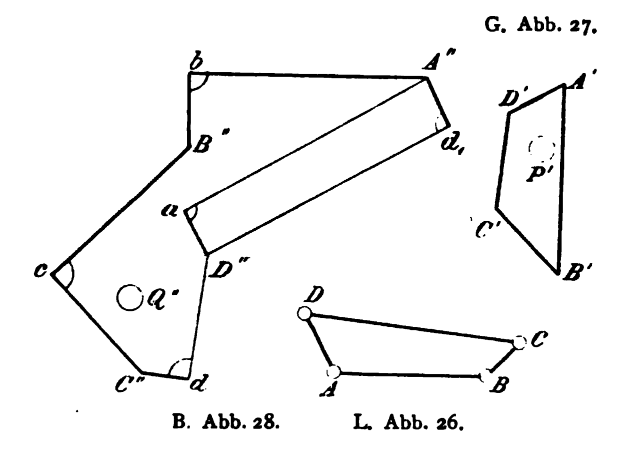
die Richtungen der Strecken $a_1 e_1$, $e_1 b_1$, die Größe der Strecke $a_1 e_1$ und die Winkel des Dreiecks $a_1 b_1 c_1$. Der Punkt C'' des Beschleunigungsplans ist also der Schnittpunkt der beiden Geraden cc und $c_1 c_2$. Man bestimmt ferner einen der Punkte A'', B'' aus der Bedingung:

$$\frac{a_1 A''}{a_1 a_2} = \frac{b_1 B''}{b_1 b_2} = \frac{c_1 C''}{c_1 c_2}$$

und den übrigen Teil des Plans nach der Bedingung:

$$A''B''C''D'' \ldots \approx ABCD \ldots$$

8. Der Beschleunigungsplan eines Stabpolygons mit Gelenkverbindungen, Abb. 26 bis 28. Einem Stabpolygon $ABCD$ von m Seiten entspricht im Beschleunigungsplan ein Polygon



B. Abb. 28. L. Abb. 26.

$A''bB''cC''dD''aA''$ von $2\,m$ Seiten. In dem vorliegenden Beispiel ist, *wie in allen folgenden Fällen,* der Maßstab

des Lageplans: 1 cm = 100 cm,
des Geschwindigkeitsplans: 1 cm = 100 cm sek^{-1},
des Beschleunigungsplans: 1 cm = 100 cm sek^{-2}.

Nachdem der Geschwindigkeitsplan gebildet worden ist, sind von jenen $2\,m$ Seiten nach Größe, Richtung und Sinn m bekannt:

$$\left.\begin{aligned}
A''b &= \frac{(A'B')^2}{AB} = \frac{250^2}{200} = 313 \text{ cm sek}^{-2};\ (AB,\ A''b) = 180^\circ \\
B''c &= \frac{(B'C')^2}{BC} = \frac{120^2}{60} = 240 \text{ cm sek}^{-2};\ (BC,\ B''c) = 180^\circ \\
C''d &= \frac{(C'D')^2}{CD} = \frac{130^2}{290} = 58 \text{ cm sek}^{-2};\ (CD,\ C''d) = 180^\circ \\
D''a &= \frac{(D'A')^2}{DA} = \frac{80^2}{90} = 71 \text{ cm sek}^{-2};\ (DA,\ D''a) = 180^\circ.
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Von den übrigen m Seiten sind die *Richtungen* bekannt:

$$bB'' \perp AB,\ cC'' \perp BC,\ dD'' \perp CD,\ aA'' \perp DA. \qquad (21)$$

Um den Beschleunigungsplan des Stabpolygons bilden zu können, müssen demnach gegeben sein: der Geschwindigkeitsplan, Abb. 27, die Beschleunigung $Q''A''$ eines Gelenkes A und die Drehbeschleunigungen von $(m—2)$ Stäben, z. B:

$$bB'' = +120 \text{ cm sek}^{-2}, \text{ also } (AB,\ bB'') = 90^\circ,$$
$$cC'' = +180 \text{ cm sek}^{-2}, \text{ also } (BC,\ cC'') = 90^\circ.$$

Durch die vorstehenden Angaben sind die Punkte Q'', A'', b, B'', c, C'' bestimmt. Es ist dann aufzutragen:

$$(AD,\ A''d_1) = 180^\circ,\ A''d_1 = D''a = 71 \text{ cm sek}^{-2}$$
$$(CD,\ C''d) = 180^\circ,\ C''d = 58 \text{ cm sek}^{-2}.$$
$$d_1D'' \perp AD,\ dD'' \perp CD.$$

Die gegebenen und die durch Rechnung bestimmten Strecken sind in Abb. 28 wie in den folgenden Abbildungen durch kräftigere Linien gekennzeichnet.

9. Der Beschleunigungsplan eines Stabpolygons mit Schieberverbindungen. Die Abb. 29 und 30 bilden eine Wiederholung der Abb. 11 und 12. AD und BCE sind also, wie im Abschnitt 5, zwei Glieder eines Stabpolygons, die in den Gelenken A, E mit den benachbarten Gliedern und durch den Schieber BC miteinander verbunden sind. Gegeben sind: der Geschwingigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$, Abb. 30, und die voneinander unabhängigen Beschleunigungen $Q''A''$, $Q''E''$ der Gelenke A, E, Abb. 31. Es ist die Aufgabe, den Beschleunigungsplan der beiden Glieder AD, BCE zu bilden.

Erstes Verfahren. (Abb. 31.) Im Abschnitt 5 wurde gezeigt, daß die Schieberverbindung ersetzt werden kann durch das Gelenk M, mit dem die Glieder AD, BCE durch Stäbe MD, MC starr zu verbinden sind. Man bestimmt also nach Abschnitt 8 die Beschleunigung $Q''M''$ des Gelenkes M, indem man aufträgt:

$$(AM,\ A''m) = 180^\circ,\ A''m = \frac{(A'M')^2}{AM} = \frac{228^2}{260} = 200 \text{ cm sek}^{-2},$$

$$(EM,\ E''m_1) = 180^\circ,\ E''m_1 = \frac{(E'M')^2}{EM} = \frac{300^2}{249} = 361 \text{ cm sek}^{-2},$$

$$mM'' \perp A''m,\ \ m_1M'' \perp E''m_1.$$

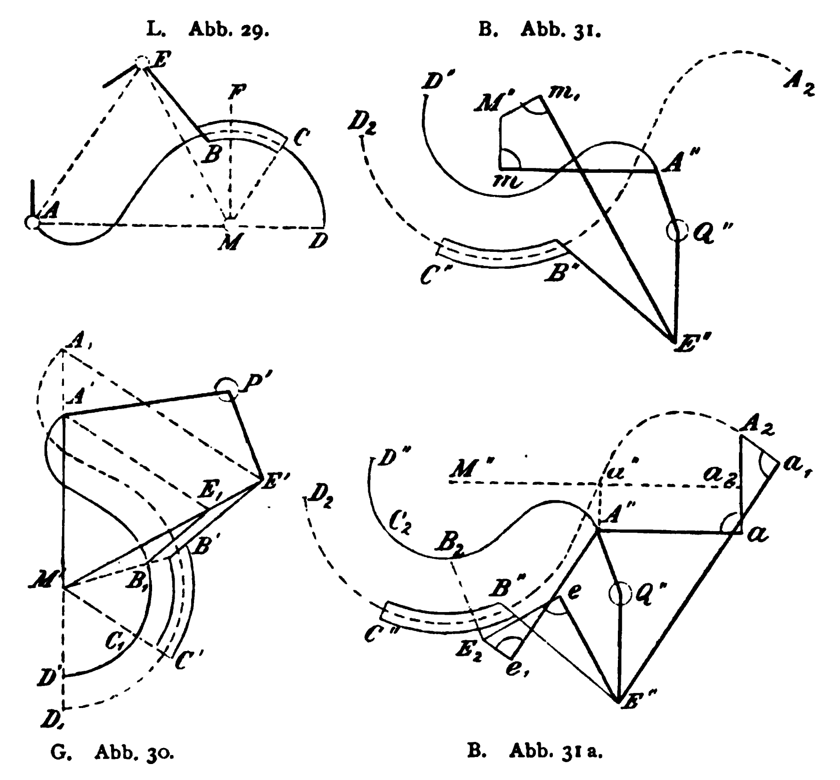
Der Beschleunigungsplan der beiden Glieder wird alsdann durch die Punktgruppen:

$$A''D''M'' \approx ADM, \quad B''C''E''M'' \approx BCEM$$

gebildet.

Zweites Verfahren. (Abb. 31 a.) Man kann, ähnlich wie es im Abschnitt 5 mit den Geschwindigkeiten geschehen ist, die Beschleunigung $Q''A''$ eines jeden Punktes A des einen Gliedes AD zu-

L. Abb. 29. B. Abb. 31.



G. Abb. 30. B. Abb. 31 a.

sammensetzen aus der Beschleunigung $Q''A_2$, die dieser Punkt in starrer Verbindung mit dem anderen Gliede BCE annehmen würde, und einer zweiten Beschleunigung A_2A''. Man kann ferner, wie es am Ende des Abschnittes 6 gezeigt ist, den Beschleunigungsplan $Q''A''A_2B''\ldots$, Abb. 31 a, ansehen als den Geschwindigkeitsplan der in Abb. 30 dargestellten Punktgruppe $A'A_1B'\ldots$ Hiernach ist $Q''A''$ die Geschwindigkeit des Punktes A', $Q''A_2$ die Geschwindigkeit des Punktes A_1 und

$$\omega = \frac{A_2A''}{A_1A'}\sin(A_1A', A_2A'') = \frac{a_2a''}{A_1A'}$$

die Drehgeschwindigkeit der Strecke $A_1 A'$. Diese Größe steht in einer bemerkenswerten Beziehung zu den Drehgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 der beiden Glieder AD und BCE. Es ist nämlich im Sinne der Achse MA:

$$M''a'' = -MA\ \omega_1^2,\quad M''a_2 = -MA\ \omega_2^2,$$

also

$$a_2 a'' = MA\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right).$$

Ferner ist im Sinne einer Achse FM, Abb. 29, die mit MA den Winkel (FM, MA) gleich 90° einschließt:

$$M'A' = -MA\ \omega_1,\quad M'A_1 = -MA\ \omega_2,$$

folglich

$$A_1 A' = MA\,(\omega_2 - \omega_1).$$

Die Drehgeschwindigkeit ω der Strecke $A_1 A'$ hat also den *algebraischen* Wert

$$\omega = \frac{MA\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)}{MA\,(\omega_2 - \omega_1)} = \omega_1 + \omega_2. \tag{22}$$

Da dieser Wert unabhängig ist von der Wahl des Punktes A, so haben *alle Strecken* $A_1 A'$, $B_1 B'$ $C_1 C'$, $D_1 D'$, $E_1 E'$ *eine gemeinschaftliche Drehgeschwindigkeit* ω, *die gleich ist der algebraischen Summe der Drehgeschwindigkeiten* ω_1, ω_2 *der beiden durch den Schieber verbundenen Glieder* AD *und* BCE. Vermittels dieser Beziehung lassen sich die Punkte A_2, E_2 bestimmen, auch wenn die Punkte M, M', M'' nicht auf das Zeichnungsblatt fallen. Für das vorliegende Beispiel ist

$$\omega_1 = \frac{M'A'}{MA}\sin(MA, M'A') = +\frac{228}{260}$$

$$\omega_2 = \frac{M'A_1}{MA}\sin(MA, M'A_1) = +\frac{313}{260}$$

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = +\frac{541}{260}.$$

Da dieser Wert positiv ist, so sind die Winkel

$$(A'A_1, A''a) = (E'E_1, E''e) = 90^\circ.$$

Ferner ist aufzutragen:

$$A''a = a''a_2 = A'A_1\ \omega = 85\frac{541}{260} = 177 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$E''e = E'E_1\ \omega = 80\frac{541}{260} = 166 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$(EA, E''a_1) = (AE, A''e_1) = 180^\circ$$

$$E'' a_1 = \frac{(E' A_1)^2}{EA} = \frac{316^2}{263} = 380 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$A'' e_1 = \frac{(A' E_1)^2}{AE} = \frac{230^2}{263} = 201 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$a A_2 \perp A'' a, \quad e E_2 \perp E'' e, \quad a_1 A_2 \perp E'' a_1, \quad e_1 E_2 \perp A'' e_1.$$

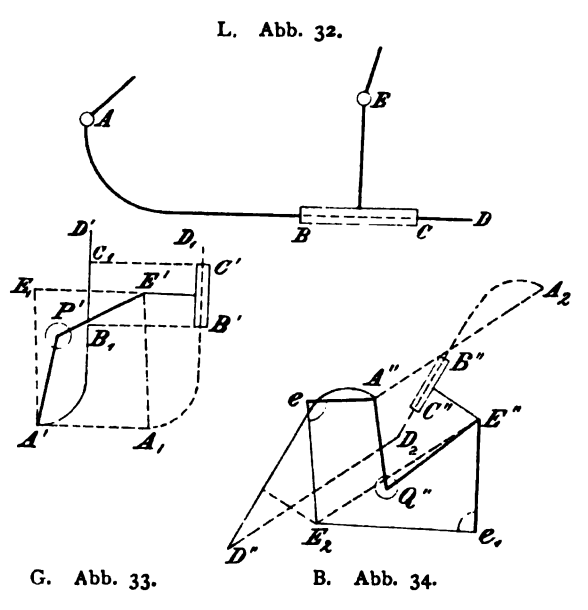
Nachdem hierdurch die Punkte A_2, E_2 bestimmt worden sind, kann der Beschleunigungsplan $Q'' A'' B'' C'' D'' E''$ gebildet werden nach der Bedingung

$$A'' D'' B_2 C_2 E_2 \approxeq A_2 D_2 B'' C'' E'' \approxeq ADBCE.$$

Wenn der den Schieber führende Stabteil BCD, Abb. 32—34, *gerade* ist, so vereinfacht sich das Verfahren, weil die Drehgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 der beiden Glieder AD, BCE gleich groß sind, und also die gemeinschaftliche Drehgeschwindigkeit der Strecken $A_1 A'$, $B_1 B'$, $C_1 C'$, $D_1 D'$, $E_1 E'$

$$\omega = 2\omega_1 = 2\omega_2 \quad (23)$$

wird. Da ferner auch die Drehbeschleunigungen und die Beschleunigungswinkel für beide Glieder gleich groß sind, so sind die *Punktgruppen* $A'' D'' B_2 C_2 E_2$, $A_2 D_2 B'' C'' E''$ *kongruent und können durch Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden.* Die Strecken $A'' A_2$, $D'' D_2$, $B_2 B''$, $C_2 C''$, $E_2 E''$ sind daher gleich groß und gleich gerichtet, und von den beiden Punkten A_2, E_2 braucht nur einer, z. B. E_2, bestimmt zu werden. Im vorliegenden Beispiel ist



L. Abb. 32.

G. Abb. 33.

B. Abb. 34.

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{A' E_1}{AE} \sin(AE, A' E_1) = -\frac{180}{360} = -\frac{1}{2} \text{ sek}^{-1},$$

also

$$\omega = 2\omega_1 = -1 \text{ sek}^{-1}.$$

Folglich ist aufzutragen:

$$(E'E_1, E''e_1) = 270^\circ$$

$$E''e_1 = E'E_1\ \omega = E'E_1 = 150 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$(AE, A''e) = 180^\circ$$

$$A''e = \frac{(A'E_1)^2}{AE} = \frac{180^2}{360} = 90 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$e_1E_2 \perp E''e_1, \quad eE_2 \perp A''e.$$

Man bestimmt dann A_2, indem man der Strecke $A''A_2$ Größe, Richtung und Sinn der Strecke E_2E'' gibt, und bildet endlich die Punktgruppen:

$$A''D''B_2C_2E_2 \approx A_2D_2B''C''E'' \approx ADBCE.$$

10. Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne ebener Getriebe. Eine in der Ebene sich bewegende Stabverbindung, die so gestützt und so geführt wird, daß in jeder Lage ihr Geschwindigkeitsplan bestimmt ist, wird ein *ebenes Getriebe* genannt. In der Regel besteht die Stützung und die Führung des Getriebes darin, daß *ein* Glied festgestellt ist, während ein *zweites* Glied um einen Punkt des festgestellten Gliedes mit gegebener Drehgeschwindigkeit geführt wird.

Die Geschwindigkeiten in zwei unendlich nahe aufeinander folgenden Zeitpunkten sind durch die Drehgeschwindigkeiten des geführten Gliedes bestimmt. Um den *Beschleunigungsplan* des Getriebes für einen Zeitpunkt darstellen zu können, muß also außer den Geschwindigkeiten aller Glieder noch die Drehbeschleunigung des geführten Gliedes gegeben sein.

Bei der Bildung der Geschwindigkeitspläne und der Beschleunigungspläne ebener Getriebe kommen in erster Linie die in den vorstehenden Abschnitten beschriebenen Gesetze zur Anwendung; außerdem noch einige Regeln über die Zusammensetzung mehrerer Bewegungen, für deren Darstellung wir folgende Bezeichnungen anwenden.

Die Glieder des Getriebes werden mit den Nummern 0, 1, 2, 3 . . ., verschiedene Bewegungen des Getriebes mit I, II, III . . . bezeichnet. ω_{mn} und ω'_{mn} bezeichnen die Drehgeschwindigkeit und die Drehbeschleunigung des Gliedes m in der Bewegung n. l_1, l_2, l_3 . . . sind die Längen der Seiten eines Stabpolygons, dem die Glieder 1, 2, 3 . . . angehören. Zur Darstellung einer *geometrischen* Summe benutzen wir das Summierungszeichen $\ddagger$.

Wir erinnern daran, daß der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'$, Abb. 26 und 27, eines Stabpolygons $ABCD$, dem die Glieder 1, 2, 3, 4 angehören, nur die *eine* Bedingung zu erfüllen hat:

$$l_1\omega_1 \ddagger l_2\omega_2 \ddagger l_3\omega_3 \ddagger l_4\omega_4 \equiv 0, \qquad (24)$$

d. h. die Seiten $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ von den Längen $l_1\omega_1$, $l_2\omega_2 \ldots$ und den gegebenen Richtungen

$$A'B' \perp AB,\ B'C' \perp BC \text{ usf.}$$

bilden ein *geschlossenes* Polygon und haben daher eine geometrische Summe gleich null. Ebenso hat der Beschleunigungsplan des Stabpolygons $Q''A''bB''cC''dD''aA''$, Abb. 28, nur *eine* Bedingung zu erfüllen:

$$l_1\omega_1^2 \ddagger l_2\omega_2^2 \ddagger l_3\omega_3^2 \ddagger l_4\omega_4^2 \ddagger l_1\omega_1' \ddagger l_2\omega_2' \ddagger l_3\omega_3' \ddagger l_4\omega_4' \equiv 0, \qquad (25)$$

d. h. die Seiten $A''b$, $B''c$, $C''d$, $D''a$ von den Größen $l_1\omega_1^2$, $l_2\omega_2^2$, $l_3\omega_3^2$, $l_4\omega_4^2$, deren Richtung und Sinn durch BA, CB, DC, AD gegeben sind, müssen in Verbindung mit den Seiten bB'', cC'', dD'', aA'' von den Richtungen

$$bB'' \perp AB,\ cC'' \perp BC \ldots$$

und den Längen

$$bB'' = l_1\omega_1',\ cC'' = l_2\omega_2' \ldots$$

ein *geschlossenes* Polygon bilden. Diese Bedingungen gelten in gleicher Form auch für Stabpolygone mit Schieberverbindungen, wenn man nach den Abschnitten 5 und 9 die Schieber durch Gelenke ersetzt.

1. Bezeichnet $P'A'B'C' \ldots$ den Geschwindigkeitsplan einer Bewegung I der Stabverbindung $ABC \ldots$ und P_1 irgend einen Punkt der Ebene, so ist $P_1A'B'C' \ldots$ der Geschwindigkeitsplan einer *möglichen* Bewegung II, d. h. einer Bewegung, die von der Stabverbindung gestattet wird; denn die Bedingung 24) wird von jedem Stabpolygon für beide Bewegungen in gleicher Weise erfüllt. Die Bewegung II entsteht, indem man die Bewegung I zusammensetzt mit einer gleichzeitigen Parallelverschiebung, die allen Punkten die gemeinschaftliche Geschwindigkeit P_1P' erteilt.

2. Bezeichnet $Q''A''B''C'' \ldots$ den Beschleunigungsplan einer Bewegung I der Stabverbindung $ABC \ldots$ und Q_2 irgend einen Punkt der Ebene, so ist $Q_2A''B''C'' \ldots$ der Bescheunigungsplan einer *möglichen* Bewegung II der Stabverbindung. Die Bewegung II entsteht, indem die Bewegung I zusammengesetzt wird mit einer Parallelverschiebung von beliebiger Geschwindigkeit und der Be-

schleunigung $Q_2 Q''$. Die Bewegung II ist möglich, weil die Bedingungen 25) für beide Bewegungen I und II gleich lauten.

3. (Vergl. Beispiel 5.) Bezeichnen $P'_1 A'_1 B'_1 C'_1 \ldots$ und $P'_2 A'_2 B'_2 C'_2 \ldots$ die Geschwindigkeitspläne zweier Bewegungen I, II der Stabverbindung $ABC\ldots$, also

$$\omega_{01},\ \omega_{11},\ \omega_{21},\ \omega_{31} \ldots$$

und

$$\omega_{02},\ \omega_{12},\ \omega_{22},\ \omega_{32} \ldots$$

die Drehgeschwindigkeiten der Glieder 0, 1, 2, 3 ... in diesen beiden Bewegungen, ferner ζ_1, ζ_2 zwei beliebige positive oder negative Zahlen, so wird der Geschwindigkeitsplan $P'_3 A'_3 B'_3 C'_3 \ldots$ einer möglichen Bewegung III gebildet, indem man

$$P'_3 A'_3 \equiv \zeta_1 . P'_1 A'_1 \ddagger \zeta_2 . P'_2 A'_2$$
$$P'_3 B'_3 \equiv \zeta_1 . P'_1 B'_1 \ddagger \zeta_2 . P'_2 B'_2 \text{ usf.}$$

aufträgt. Die Drehgeschwindigkeiten der Glieder 0, 1, 2 ... erhalten in der Bewegung III die Größen

$$\omega_{03} = \zeta_1 \omega_{01} + \zeta_2 \omega_{02}$$
$$\omega_{13} = \zeta_1 \omega_{11} + \zeta_2 \omega_{12}$$
$$\omega_{23} = \zeta_1 \omega_{21} + \zeta_2 \omega_{22} \text{ usf.}$$

Ist ζ negativ, so ist der Sinn der Drehgeschwindigkeit $\zeta\omega$ dem Sinn von ω entgegengesetzt. Der Beweis der vorstehenden Behauptungen ergibt sich, indem man für jedes Stabpolygon die Bedingung 24) für alle drei Bewegungen bildet und beachtet, daß die Bedingung der Bewegung III unmittelbar aus den Bedingungen I und II zu folgern ist. Sind die Drehgeschwindigkeiten ω_{03}, ω_{13} *zweier Glieder* 0, 1 in der Bewegung III gegeben, so sind die beiden Zahlen ζ_1, ζ_2 durch obige Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{\omega_{03}\omega_{12} - \omega_{13}\omega_{02}}{\omega_{01}\omega_{12} - \omega_{11}\omega_{02}} \\ \zeta_2 &= \frac{\omega_{03}\omega_{11} - \omega_{13}\omega_{01}}{\omega_{02}\omega_{11} - \omega_{12}\omega_{01}}. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Bei Anwendung dieser Zusammensetzung kann man in der Regel als Bewegung II eine Drehung aller Glieder in starrer Verbindung miteinander, und zwar mit der Drehgeschwindigkeit

$$+1 = \omega_{02} = \omega_{12} = \omega_{22} = \ldots$$

wählen; dann wird

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \frac{\omega_{03} - \omega_{13}}{\omega_{01} - \omega_{11}} \\ \zeta_2 &= \frac{\omega_{03}\omega_{11} - \omega_{13}\omega_{01}}{\omega_{11} - \omega_{01}}. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

4. (Vergl. Beispiel 6.) Für eine Stabverbindung sei gegeben die Bewegung I durch ihre Drehgeschwindigkeiten:

$$\omega_{01},\ \omega_{11},\ \omega_{21},\ \omega_{31}\ \ldots$$

und ihre Drehbeschleunigungen:

$$\omega'_{01},\ \omega'_{11},\ \omega'_{21},\ \omega'_{31}\ \ldots;$$

ferner die Bewegung II durch ihre Drehgeschwindigkeiten:

$$0 = \omega_{02} = \omega_{12} = \omega_{22} = \omega_{32} = \ldots$$

und ihre Drehbeschleunigungen:

$$\omega'_{02} = \alpha\omega_{01},\quad \omega'_{12} = \alpha\omega_{11},\quad \omega'_{22} = \alpha\omega_{21}\quad \text{usf.}$$

α bezeichnet eine beliebige positive oder negative Drehgeschwindigkeit. Eine solche Bewegung nennt man eine *Anfangsbewegung*, weil sie an den Ruhezustand sich anschließt. Sie ist möglich, weil der Beschleunigungsplan der Bewegung II dem Geschwindigkeitsplan der Bewegung I geometrisch ähnlich ist, und weil infolgedessen die Bedingung 25) für jedes Stabpolygon erfüllt ist.

Gegeben sei endlich die Bewegung III, ebenfalls eine Anfangsbewegung, durch ihre Drehgeschwindigkeiten:

$$0 = \omega_{03} = \omega_{13} = \omega_{23} = \omega_{33} = \ldots$$

und durch die Drehbeschleunigungen

$$\alpha' = \omega'_{03} = \omega'_{13} = \omega'_{23} = \omega'_{33} = \ldots$$

Der Beschleunigungsplan dieser Bewegung III ist dem *Lageplan* geometrisch ähnlich; es ist also für jedes Stabpolygon die Bedingung 25) erfüllt.

Es soll eine Bewegung IV gebildet werden, die in ihren Drehgeschwindigkeiten mit der Bewegung I übereinstimmt:

$$\omega_{04} = \omega_{01},\quad \omega_{14} = \omega_{11},\quad \omega_{24} = \omega_{21}\quad \text{usf.},$$

während für zwei beliebige Glieder 0 und 1 die Drehbeschleunigungen ω'_{04}, ω'_{14} vorgeschrieben sind. Die Bewegung IV entsteht durch Zusammensetzung der Bewegungen I, II, III. Hierdurch wird:

$$\begin{aligned}\omega'_{04} &= \omega'_{01} + \alpha\omega_{01} + \alpha'\\ \omega'_{14} &= \omega'_{11} + \alpha\omega_{11} + \alpha'\\ \omega'_{24} &= \omega'_{21} + \alpha\omega_{21} + \alpha' \quad \text{usf.}\end{aligned}$$

Die Drehgeschwindigkeit α und die Drehbeschleunigung α' werden durch die ersten beiden Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega'_{04} - \omega'_{01} + \omega'_{11} - \omega'_{14}}{\omega_{01} - \omega_{11}}\\ \alpha' &= \omega'_{04} - \omega'_{01} - \alpha\omega_{01}\,.\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

5. (Vergl. Beispiel 8.) Wenn *einem* Stabe eines Getriebes, z. B. dem Stabe 3, die *Eigenschaft der Dehnbarkeit* beigelegt wird, so erhält die Stabverbindung einen höheren Grad der Beweglichkeit, so daß eine ihrer Bewegungen erst bestimmt wird, wenn die Drehgeschwindigkeiten und Drehbeschleunigungen von *drei* Gliedern, z. B. der Glieder 0, 1, 2, gegeben sind. Es seien die Geschwindigkeiten der Bewegungen I und II bestimmt durch die gegebenen Größen

$$\omega_{01} = 0, \quad \omega_{11} = 0, \quad \omega_{21} = +1 \text{ sek}^{-1}$$

und

$$\omega_{02} = 0, \quad \omega_{12} = +1 \text{ sek}^{-1}, \quad \omega_{22} = 0.$$

Aus den Geschwindigkeitsplänen dieser beiden Bewegungen können die Dehnungsgeschwindigkeiten δ_{31}, δ_{32} des dehnbaren Stabes 3 entnommen werden.

Es sei nun die Aufgabe, die Geschwindigkeiten einer Bewegung III zu bestimmen, für die vorgeschrieben ist: die Drehgeschwindigkeit des Gliedes 0

$$\omega_{03} = 0,$$

ferner die Drehgeschwindigkeit ω_{13} des Gliedes 1 und endlich die Starrheit des Stabes 3:

$$\delta_{33} = 0.$$

Diese Bewegung III kann also von dem *Getriebe* ausgeführt werden. Sie wird gebildet durch Zusammensetzung der ζ_1-fachen Geschwindigkeiten der Bewegung I mit den ζ_2-fachen Geschwindigkeiten der Bewegung II, wenn die beiden Zahlen ζ_1, ζ_2 folgende zwei Bedingungen erfüllen: Die Drehgeschwindigkeit des Gliedes 1 muß die vorgeschriebene Größe ω_{13} erhalten:

$$\omega_{13} = \zeta_1 \omega_{11} + \zeta_2 \omega_{12} = \zeta_2 \text{ sek}^{-1}$$

oder

$$\zeta_2 = \frac{\omega_{13}}{1 \text{ sek}^{-1}}. \tag{29}$$

Ferner muß die Dehnungsgeschwindigkeit des Stabes 3 gleich null werden:

$$\delta_{33} = \zeta_1 \delta_{31} + \zeta_2 \delta_{32} = 0,$$

woraus folgt:

$$\zeta_1 = -\frac{\delta_{32}}{\delta_{31}} \frac{\omega_{13}}{1 \text{ sek}^{-1}}. \tag{30}$$

Die Drehgeschwindigkeiten der Bewegung III haben demnach die Größen:

$$\omega_{03} = \zeta_1 \omega_{01} + \zeta_2 \omega_{02} = 0$$
$$\omega_{13} = \zeta_1 \omega_{11} + \zeta_2 \omega_{12} = \zeta_2$$
$$\omega_{23} = \zeta_1 \omega_{21} + \zeta_2 \omega_{22} \quad \text{usf.}$$

Es sei ferner die Aufgabe, die *Beschleunigungen* der Bewegung III zu bestimmen, wenn vorgeschrieben ist: die Drehbeschleunigung ω'_{13} des Gliedes 1 und diejenige des Gliedes 0

$$\omega'_{03} = 0.$$

Man erteilt wieder einem Stabe 3 die Eigenschaft der Dehnbarkeit und bestimmt durch einen Plan die Beschleunigungen der Bewegung IV, deren Geschwindigkeiten mit denen der Bewegung III übereinstimmen

$$\omega_{04} = \omega_{03} = 0, \quad \omega_{14} = \omega_{13}, \quad \omega_{24} = \omega_{23} \quad \text{usf.},$$

während die Drehbeschleunigungen der *drei* Glieder 0, 1, 2 die Größen

$$\omega'_{04} = 0, \quad \omega'_{14} = \omega'_{13}, \quad \omega'_{24} = 0$$

erhalten. Mit V bezeichnen wir ferner eine Bewegung, deren Geschwindigkeiten alle gleich null sind:

$$0 = \omega_{05} = \omega_{15} = \omega_{25} \ldots$$

und deren Drehbeschleunigungen den *bekannten* Drehgeschwindigkeiten der Bewegung I proportional sind:

$$\begin{aligned} \omega'_{05} &= \alpha\omega_{01} = 0 \\ \omega'_{15} &= \alpha\omega_{11} = 0 \\ \omega'_{25} &= \alpha\omega_{21} = \alpha \\ \omega'_{35} &= \alpha\omega_{31} \quad \text{usf.} \end{aligned}$$

Die Beschleunigungen der vorgeschriebenen Bewegung III entstehen durch Zusammensetzung der beiden Bewegungen IV, V, wenn die unbekannte Drehgeschwindigkeit α so gewählt wird, daß die Dehnungsbeschleunigung des Stabes 3 die einem *starren* Stabe entsprechende Größe erhält. Die Drehgeschwindigkeit dieses Stabes hat die Größe

$$\omega_{33} = \zeta_1 \omega_{31} + \zeta_2 \omega_{32}.$$

Seine Dehnungsbeschleunigung δ'_{34} in der Bewegung IV kann aus dem Beschleunigungsplan dieser Bewegung entnommen werden, während seine Dehnungsbeschleunigung in der Bewegung V durch die Gleichung

$$\delta'_{35} = \alpha\delta_{31}$$

aus dem Geschwindigkeitsplan der Bewegung I ermittelt werden kann. Die Größe α wird demnach bestimmt durch die Gleichung:

$$\delta'_{33} = -\omega_{33}^2 = \delta'_{34} + \delta'_{35} = \delta'_{34} + \alpha\delta_{31}$$

oder

$$\alpha = -\frac{\omega_{33}^2 + \delta'_{34}}{\delta_{31}}. \tag{31}$$

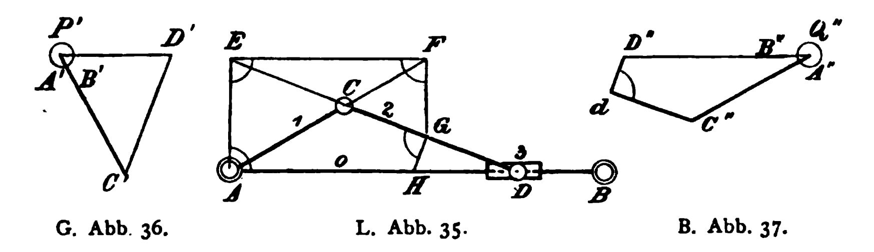
Nachdem α bestimmt worden ist, ergeben sich die Drehbeschleunigungen der Bewegung III durch die Gleichungen:

$$\omega'_{03} = \omega'_{04} + \alpha\omega_{01} = 0$$
$$\omega'_{13} = \omega'_{14} + \alpha\omega_{11} = \omega'_{13}$$
$$\omega'_{23} = \omega'_{24} + \alpha\omega_{21}$$
$$\omega'_{33} = \omega'_{34} + \alpha\omega_{31} \quad \text{usf.}$$

11. Beispiele und Aufgaben. Die vorstehenden Regeln sollen an einer Reihe von Beispielen erläutert werden. Wenn nichts anderes bemerkt wird, ist der Maßstab

des Lageplans L: 1 cm = 100 cm
des Geschwindigkeitsplans G: 1 cm = 100 cm sek^{-1}
des Beschleunigungsplans B: 1 cm = 100 cm sek^{-2}.

In den Lageplänen sind die Gelenke durch kleine Kreise, die ruhenden Gelenke durch Doppelkreise bezeichnet. In den Geschwindigkeitsplänen und den Beschleunigungsplänen sind die Pole P' und Q'' durch Kreise, rechte Winkel durch Viertelkreise,



G. Abb. 36. L. Abb. 35. B. Abb. 37.

die gegebenen und durch Rechnung bestimmten Strecken durch kräftigere Linien bezeichnet.

Beispiel 1. Das Getriebe, Abb. 35, besteht aus vier mit 0, 1, 2, 3 bezeichneten Gliedern, den Stäben AB, AC, CD und dem Schieber D. Das Glied 0 ist festgestellt:

$$\omega_0 = 0, \qquad \omega'_0 = 0;$$

das Glied 1 wird geführt mit der gegebenen Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = +1{,}00 \text{ sek}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega'_1 = 0.$$

Der *Geschwindigkeitsplan*, Abb. 36. Die Punkte A', B' fallen mit dem Pol P' zusammen, weil die Punkte A, B (Abb. 35) ruhen. Die Geschwindigkeit $A'C'$ des Punktes C wird bestimmt durch das

Vorzeichen und die *Größe* der gegebenen Drehgeschwindigkeit ω_1 des Gliedes 1. Da ω_1 positiv ist, so ist der Winkel

$$(AC,\ A'C') = 90^\circ$$

aufzutragen, und die Strecke $A'C'$ wird durch die Gleichung

$$A'C' = AC\,\omega_1 = A_1C$$

gegeben. Von der Geschwindigkeit $P'D'$ des Schiebers ist die Richtung

$$P'D' \parallel AB$$

gegeben; ihre Größe wird bestimmt, indem man

$$C'D' \perp CD$$

aufträgt.

Der *Beschleunigungsplan*, Abb. 37. Die den ruhenden Punkten A, B entsprechenden Punkte A'', B'' fallen mit dem Pol Q'' des Beschleunigungsplanes zusammen. Gegeben sind ferner die Strecken $A''C''$ und $C''d$ durch die Bedingungen:

$$(AC,\ A''C'') = 180^\circ$$

$$A''C'' = AC\,\omega_1^2 = AC$$

$$(CD,\ C''d) = 180^\circ.$$

$$C''d = CD\,\omega_2^2 = CD\left(\frac{C'D'}{CD}\right)^2 = \frac{\overline{C'D'}^2}{CD}.$$

Von der Beschleunigung $Q''D''$ des Schiebers D ist die Richtung bekannt:

$$Q''D'' \parallel AB.$$

Ihre Größe ergibt sich aus der Bedingung, daß die Strecke $C''d$ die Projektion von $C''D''$ auf CD bildet. Daher ist

$$dD'' \perp C''d$$

aufzutragen.

In dem vorliegenden einfachen, aber häufig vorkommenden Falle ist es nicht nötig, Geschwindigkeitsplan und Beschleunigungsplan in besonderen Zeichnungen zu bilden, da zweckmäßig beide Pläne mit dem Lageplan sich verbinden lassen. Zieht man nämlich in Abb. 35:

$$AE \perp AB,\ EF \perp AE,\ FG \perp EF \text{ und } GH \perp CD,$$

so ist das Dreieck ACE kongruent dem Geschwindigkeitsplan $A'C'D'$ und gegen denselben um 90° gedreht. Ferner ist das Viereck $ACGH$ kongruent dem Beschleunigungsplan $A''C''dD''$ und gegen denselben um 180° gedreht. Es ist also

$$AE = P'D' \text{ und } HA = Q''D'',$$

wodurch die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Schiebers D bestimmt sind. Man beachte hierbei, daß wegen Aehnlichkeit der Dreiecke:

$$CEF \sim CDA \text{ und } CFG \sim CAE$$

die folgenden Beziehungen bestehen:

$$\frac{CF}{CE} = \frac{CA}{CD} \text{ und } \frac{CG}{CF} = \frac{CE}{CA}.$$

Da nun

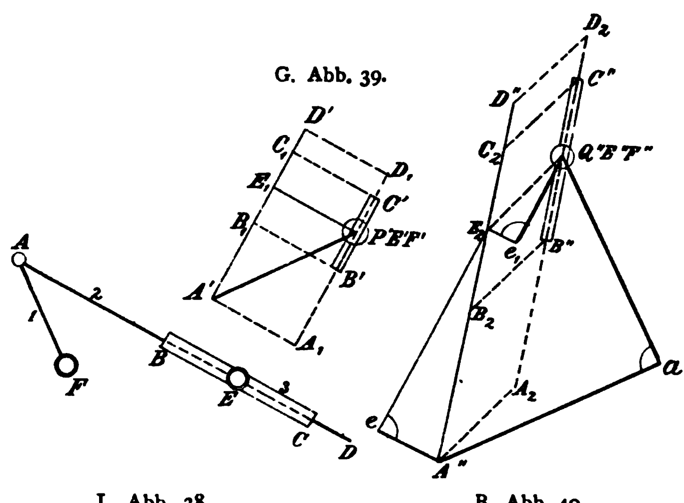
$$CE = C'D'$$

ist, so folgt:

$$CG = \frac{\overline{C'D'}^2}{CD} = C''d$$

und

$$ACGH \cong A''C''dD''.$$



L. Abb. 38. B. Abb. 40.

Beispiel 2, Abb. 38 bis 40. Das Getriebe besteht aus dem ruhenden Gliede EF, dem mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = -1{,}40 \text{ sek}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega'_1 = -2{,}14 \text{ sek}^{-2}$$

geführten Gliede FA, dem Stabe AD und dem um das Gelenk E sich drehenden Schieber BC.

Der Geschwindigkeitsplan, Abb. 39. Da die Gelenke E, F

ruhen, so fallen die Punkte E', F' mit dem Pol P' zusammen. Der Punkt A' wird bestimmt durch die Bedingung:

$$\frac{F'A'}{FA}\sin(FA, F'A') = \omega_1 = -1{,}40 \text{ sek}^{-1};$$

also ist

$$(FA, F'A') = 270^\circ, \quad F'A' = FA\,\omega_1 = 150 \cdot 1{,}40 = 210 \text{ cm sek}^{-1}.$$

Im übrigen ist die Bildung des Geschwindigkeitsplans vollständig im Abschnitt 5 beschrieben. Man bestimmt hiernach die Geschwindigkeit $P'E_1$ des vom ruhenden Gelenke E gedeckten Punktes des Stabes AD, indem man

$$A'E_1 \perp AE, \quad E'E_1 \parallel AD$$

zieht. Dann entsteht der Geschwindigkeitsplan $P'A'B'C'D'E'$, indem man die Punktgruppen

$$A'B_1C_1D'E_1 \approx ABCDE$$

und

$$A_1B'C'D_1E' \cong A'B_1C_1D'E_1$$

bildet. Die relative Geschwindigkeit der Punkte des Stabes AD gegen den Schieber BC wird durch die Strecken

$$A_1A' = D_1D' = 120 \text{ cm sek}^{-1}$$

dargestellt.

Der Beschleunigungsplan, Abb. 40. Die Punkte E'', F'' fallen mit dem Pol Q'' zusammen. Ferner wird der Punkt A'' bestimmt durch die gegebenen Größen ω_1 und ω'_1:

$$(FA, F''a) = 180^\circ$$
$$F''a = FA\,\omega_1^2 = 150 \cdot 1{,}4^2 = 294 \text{ cm sek}^{-2}$$
$$(FA, aA'') = 270^\circ$$
$$aA'' = FA\,\omega'_1 = 150 \cdot 2{,}14 = 321 \text{ cm sek}^{-2}.$$

Der Punkt E_2 wird nach Abschnitt 9 bestimmt:

$$(AE, A''e) = 180^\circ$$

$$A''e = \frac{(A'E_1)^2}{AE} = \frac{170^2}{330} = 88 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$(E'E_1, E''e_1) = (AD, A'D') = 270^\circ$$

$$E''e_1 = 2\,E'E_1\frac{A'E_1}{AE} = 2 \cdot 120\frac{170}{330} = 124 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$eE_2 \perp A''e, \quad e_1E_2 \perp E''e_1.$$

Nachdem die Strecke $A''A_2$ nach Größe, Richtung und Sinn gleich E_2E'' aufgetragen ist, können die Punktgruppen

$$A''D''B_2C_2E_2 \approx A_2D_2B''C''E'' \approx ADBCE$$

und hierdurch der Beschleunigungsplan $Q''A''D''B''C''E''$ gebildet werden.

Beispiel 3, Abb. 41 bis 43. In dem sechsgliedrigen Getriebe $ABCDEFG$, Abb. 41, ist das Glied AB festgestellt, während das Glied BCD mit der Drehgeschwindigkeit

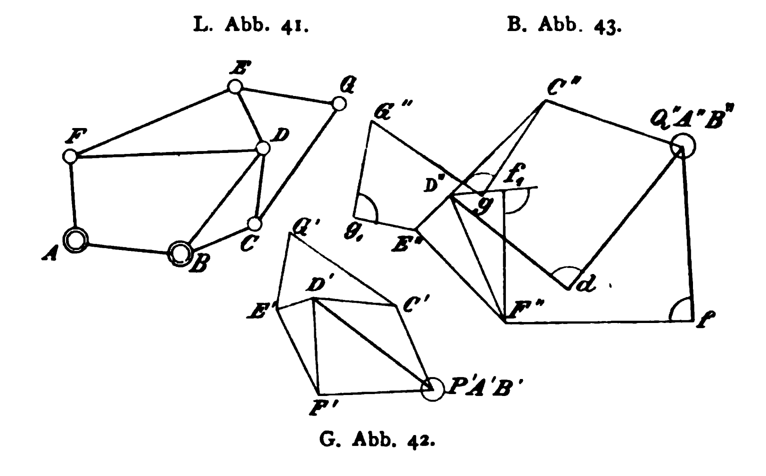
$$\omega_1 = -1{,}17 \text{ sek}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega_1' = -1{,}18 \text{ sek}^{-2}$$

geführt werden soll. Da die Stabvierecke $ABDF$ und $CDEG$ in dieser Reihenfolge nur je zwei Glieder mit unbekannten Dreh-

L. Abb. 41. B. Abb. 43.



G. Abb. 42.

geschwindigkeiten enthalten, so kommen die Regeln der Abschnitte 4 und 8 zur Anwendung, wie folgt:

Der Geschwindigkeitsplan, Abb. 42.

$$(BD, B'D') = 270^\circ$$

$$B'D' = BD\,\omega_1 = 173 \cdot 1{,}17 = 202 \text{ cm sek}^{-1}$$

$$A'F' \perp AF, \; D'F' \perp DF$$

$$B'C'D' \approx BCD, \; D'E'F' \approx DEF$$

$$C'G' \perp CG, \; E'G' \perp EG.$$

Der Beschleunigungsplan, Abb. 43.

$$(BD,\ B''d) = 180^\circ$$
$$B''d = BD\ \omega_1^2 = 173 \cdot 1{,}17^2 = 236 \text{ cm sek}^{-2}$$
$$(BD,\ dD'') = 270^\circ$$
$$dD'' = BD\ \omega' = 173 \cdot 1{,}18 = 204 \text{ cm sek}^{-2}$$
$$(AF,\ A''f) = 180^\circ$$
$$A''f = \frac{(A'F')^2}{AF} = \frac{156^2}{108} = 225 \text{ cm sek}^{-2}$$
$$(DF,\ D''f_1) = 180^\circ$$
$$D''f_1 = \frac{(D'F')^2}{DF} = \frac{132^2}{250} = 70 \text{ cm sek}^{-2}$$
$$fF'' \perp A''f,\quad f_1F'' \perp D''f_1$$
$$B''C''D'' \approxeq BCD,\quad D''F''E'' \approxeq DFE$$
$$(CG,\ C''g) = 180^\circ$$
$$C''g = \frac{(C'G')^2}{CG} = \frac{172^2}{190} = 155 \text{ cm sek}^{-2}$$
$$(EG,\ E''g_1) = 180^\circ$$
$$E''g_1 = \frac{(E'G')^2}{EG} = \frac{106^2}{140} = 80 \text{ cm sek}^{-2}$$
$$gG'' \perp C''g,\quad g_1G'' \perp E''g_1.$$

Beispiel 4. In dem achtgliedrigen Getriebe, Abb. 44, ist das Glied AB festgestellt, während das Glied BCD mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = -\ 0{,}95 \text{ sek}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega'_1 = -\ 0{,}63 \text{ sek}^{-2}$$

geführt werden soll. Das Getriebe enthält nur *ein* Stabviereck $ABDF$, alle übrigen Stabpolygone enthalten, abgesehen von den starren Stabdreiecken, mehr als vier Seiten. Die Pläne für den Teil $ABCDEFG$ des Getriebes werden wie im Beispiel 3 gebildet; die Beschreibung braucht hier nicht wiederholt zu werden.

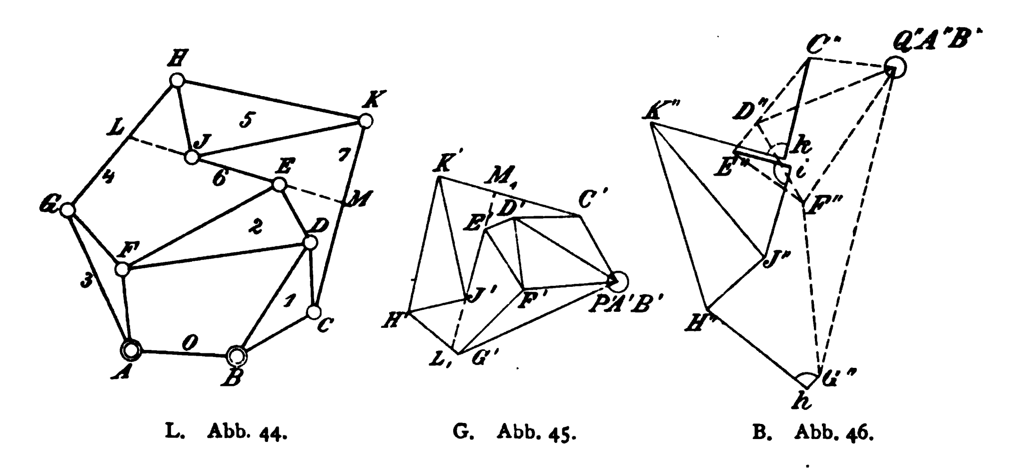
Im *Geschwindigkeitsplan*, Abb. 45, sind darauf die drei Geraden

$$C'M_1K' \perp CMK$$
$$G'L_1H' \perp GLH$$
$$L_1I'E'M_1 \perp LIEM$$

zu ziehen und auf diesen nach Abschnitt 2 die dem starren Dreieck KHI entsprechenden Punkte K', H', I' zu bestimmen. Statt dessen kann man auch die Punktgruppe

$$L_1 I' M_1 K' H' \approx LIMKH$$

bilden, da den Dreiecken LHI, HIK, IKM die ähnlichen Dreiecke $L_1 H' I'$, $H' I' K'$, $I' K' M_1$ entsprechen. Der Geschwindigkeitsplan



L. Abb. 44. G. Abb. 45. B. Abb. 46.

wird *unbestimmt*, wenn die drei Geraden $C'K'$, $G'H'$, $E'I'$ in *einem* Punkte sich schneiden.

Im *Beschleunigungsplan*, Abb. 46, sind die Winkel:

$$(CK, C''k) = (GH, G''h) = (EI, E''i) = 180^\circ,$$

darauf die Strecken:

$$C''k = \frac{(C'K')^2}{CK} = \frac{195^2}{265} = 143 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$G''h = \frac{(G'H')^2}{GH} = \frac{85^2}{228} = 32 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$E''i = \frac{(E'I')^2}{EI} = \frac{100^2}{120} = 83 \text{ cm sek}^{-2}$$

und die Geraden:

$$kK'' \perp C''k, \quad hH'' \perp G''h, \quad iI'' \perp E''i$$

aufzutragen. Die Lage des Dreiecks $K''H''I''$ konnte darauf durch das im Abschnitt 7 und in den Abb. 23 bis 25 beschriebene Verfahren bestimmt werden.

Beispiel 5. In dem Getriebe des vorigen Beispiels, Abb. 44, soll das Glied 4 (GH) festgestellt und das Glied 1 (BCD) mit der Drehgeschwindigkeit $+ 0{,}67 \text{ sek}^{-1}$ geführt werden. Es sind die Geschwindigkeiten dieser Bewegung III zu bestimmen. Man bildet die Bewegung III nach Abschnitt 10, 3 durch Zusammensetzung der ζ_1-fachen Geschwindigkeiten der im vorigen Beispiel bestimmten Bewegung I mit den ζ_2-fachen Geschwindigkeiten der Bewegung II, in der das Getriebe, ohne seine Form zu ändern, mit der Drehgeschwindigkeit $+ 1 \text{ sek}^{-1}$ um irgend einen festen Punkt sich dreht. In der Bewegung I haben die Glieder 1 und 4 die Drehgeschwindigkeiten

$$\omega_{11} = - 0{,}95 \text{ sek}^{-1}$$

und

$$\omega_{41} = \frac{G' H'}{G H} \sin (G H, G' H') = - \frac{85}{228} = - 0{,}37 \text{ sek}^{-1}.$$

Damit

$$\zeta_1 \omega_{11} + \zeta_2 = + 0{,}67$$
$$\zeta_1 \omega_{41} + \zeta_2 = 0$$

werde, ist

$$\zeta_1 = \frac{+ 0{,}67}{- 0{,}95 + 0{,}37} = - 1{,}15$$

und

$$\zeta_2 = - \zeta_1 \omega_{41} = - 1{,}15 \cdot 0{,}37 = - 0{,}42$$

zu wählen. Die folgende Tabelle enthält die aus Abb. 45 entnommenen Drehgeschwindigkeiten ω_1 der Bewegung I und die nach der Formel

$$\omega_3 = - 1{,}15 \, \omega_1 - 0{,}42$$

berechneten Drehgeschwindigkeiten der Bewegung III:

Glied	0	1	2	3	4	5	6	7
ω_1	0	$-0{,}95$	$-0{,}38$	$-1{,}17$	$-0{,}37$	$-0{,}69$	$-0{,}83$	$-0{,}74$
ω_3	$-0{,}42$	$+0{,}67$	$+0{,}02$	$+1{,}35$	0	$+0{,}37$	$+0{,}53$	$+0{,}43$

Will man den Geschwindigkeitsplan der Bewegung III auftragen, so genügt die Berechnung von *zwei* Drehgeschwindigkeiten, z. B.:

$$\omega_{33} = + 1{,}35, \quad \omega_{53} = + 0{,}37.$$

Der Pol des Geschwindigkeitsplans P' fällt selbstverständlich mit den Punkten G', H' zusammen.

Beispiel 6. Das Getriebe, Abb. 44, hat bei der durch die Abb. 45 und 46 dargestellten Bewegung I folgende Drehgeschwindigkeiten ω_1 und Drehbeschleunigungen ω'_1:

Glied	0	1	2	3	4	5	6	7
ω_1	0	— 0,95	— 0,38	— 1,17	— 0,37	— 0,69	— 0,83	— 0,74
ω'_1	0	— 0,63	— 0,45	— 1,33	— 0,75	— 0,88	— 0,98	— 0,70
ω'_4	0	+ 1,27	+ 0,32	+ 1,01	— 0,01	+ 0,50	+ 0,68	+ 0,78

Es soll die Bewegung IV des Getriebes gebildet werden, deren Geschwindigkeiten mit der Bewegung I übereinstimmen, während die Drehbeschleunigung des Gliedes 5 die Größe

$$\omega'_{54} = + 0{,}50 \text{ sek}^{-2}$$

erhalten soll.

Nach Abschnitt 10, 4 entsteht die zu bestimmende Bewegung IV, indem man die Bewegung I zusammensetzt mit einer Bewegung V, in der alle Geschwindigkeiten die Größe null haben:

$$0 = \omega_{05} = \omega_{15} = \omega_{25} = \ldots$$

und deren Beschleunigungen durch die Gleichungen:

$$\omega'_{05} = \alpha\omega_{01}, \quad \omega'_{15} = \alpha\omega_{11}, \quad \omega'_{25} = \alpha\omega_{21} \text{ usf.}$$

bestimmt werden, wenn man die Größe α so wählt, daß die aus der Zusammensetzung der beiden Bewegungen I und V entstehende Drehbeschleunigung des Gliedes 5 die vorgeschriebene Größe erhält:

$$\omega'_{54} = + 0{,}50 = \omega'_{51} + \alpha\omega_{51} = - 0{,}88 - 0{,}69\,\alpha.$$

Im vorliegenden Falle ist also

$$\alpha = - \frac{0{,}50 + 0{,}88}{0{,}69} = - 2{,}00 \text{ sek}^{-1}.$$

Die in der letzten Reihe der vorstehenden Tabelle angegebenen Drehbeschleunigungen der Bewegung IV werden demnach durch die Gleichung

$$\omega'_4 = \omega'_1 - 2{,}00\,\omega_1$$

bestimmt.

Beispiel 7. Das Getriebe, Abb. 47, enthält acht Glieder, nämlich das ruhende Glied, zu dem die Gelenke A, G und der Schieber I gehören, ferner die sechs aus Stäben gebildeten Glieder ABC, BE, CD, DEF, FG, HI und den Schieber H. Das Glied ABC wird mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_1 = + 1{,}75 \text{ sek}^{-1}$$

und der Drehbeschleunigung

$$\omega'_1 = 0$$

geführt.

Der Geschwindigkeitsplan, Abb. 48. Durch die gegebene positive Drehgeschwindigkeit des Gliedes ABC ist vorgeschrieben:

$$(BC, B'C') = 90^\circ$$

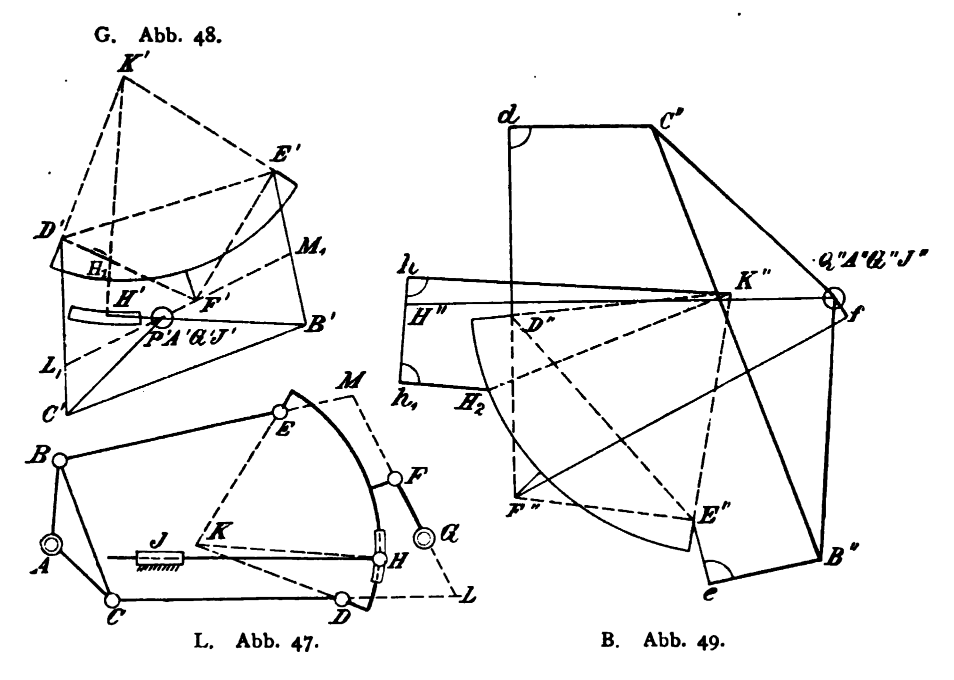
$$B'C' = BC\,\omega_1 = 200 \cdot 1{,}75 = 350 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$B'C'A' \approx BCA.$$

Der Pol P' und die Punkte G', I' fallen mit A' zusammen. Durch die Bedingungen:

$$B'M_1E' \perp BEM, \quad C'L_1D' \perp CDL, \quad L_1G'F'M_1 \perp LGFM$$

sind ferner die drei Geraden $B'M_1E'$, $C'L_1D'$, $L_1G'F'M_1$ gegeben, auf welchen die dem starren Dreieck EDF entsprechenden Punkte



G. Abb. 48.

L. Abb. 47.

B. Abb. 49.

E', D', F' liegen müssen. Man bestimmt ihre Lage entweder nach dem im Abschnitt 2, Abb. 5 und 6, beschriebenen Verfahren oder einfacher durch die Bedingung, daß den Dreiecken DLF, DFE, EFM, DEK die ähnlichen Dreiecke $D'L_1F'$, $D'F'E'$, $E'F'M_1$, $D'E'K'$ entsprechen, und daß folglich:

$$L_1F'M_1E'K'D' \approx LFMEKD$$

ist. Das Gelenk H bewegt sich infolge der Führung durch den festen Schieber I auf den festen Geraden HI:

$$P'H' \parallel IH,$$

und da sein Abstand KH vom Mittelpunkt K des Führungsstabes unveränderlich ist, so ist

$$K'H' \perp KH.$$

Die Strecke H_1H' bezeichnet die relative Geschwindigkeit des Schiebers H gegen den Führungsstab.

Der *Beschleunigungsplan*, Abb. 49. Da die Drehbeschleunigung des geführten Gliedes ABC gleich null gegeben ist, so ist

$$(BC, B''C'') = 180^\circ$$

$$B''C'' = \frac{(B'C')^2}{BC} = \frac{350^2}{200} = 613 \text{ cm sek}^{-2}$$

und

$$B''C''A'' \approx BCA$$

aufzutragen. Mit A'' fallen die Punkte G'', I'' und der Pol Q'' zusammen. Die Dehnungsbeschleunigungen der Stäbe BE, CD, GF bestimmen ferner die drei Geraden eE'', dD'', fF'', auf denen die dem starren Dreieck EDF entsprechenden Punkte E'', D'', F'' liegen müssen:

$$(BE, B''e) = (CD, C''d) = (GF, G''f) = 180^\circ$$

$$B''e = \frac{(B'E')^2}{BE} = \frac{210^2}{300} = 147 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$C''d = \frac{(C'D')^2}{CD} = \frac{240^2}{300} = 192 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$G''f = \frac{(G'F')^2}{GF} = \frac{50^2}{83} = 30 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$eE'' \perp B''e, \quad dD'' \perp C''d, \quad fF'' \perp G''f.$$

Das im Abschnitt 7, Abb. 23 bis 25, beschriebene Verfahren ergab die Lage des Dreiecks $E''D''F''$, und durch die Bedingung:

$$D''E''F''H_2K'' \approx DEFHK$$

wurden darauf die den Punkten H_1, K' entsprechenden Punkte H_2, K'' bestimmt. Die Beschleunigung $Q''H''$ des Gelenkes H hat drei Bedingungen zu erfüllen: Sie ist infolge der Führung des Stabes IH durch den festen Schieber I parallel zu IH gerichtet:

$$Q''H'' \parallel IH;$$

wegen Starrheit der Strecke KH ist ferner:

$$(KH,\ K''h) = 180^\circ$$

$$K''h = \frac{(K'H')^2}{KH} = \frac{320^2}{240} = 427 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$hH'' \perp K''h.$$

Hierdurch ist der Punkt H'' bestimmt. Eine dritte Bedingung, die man als Probe benutzen kann, ergibt sich nach Abschnitt 9 aus der Drehgeschwindigkeit ω der Geschwindigkeitsstrecke H_1H'. Die Drehgeschwindigkeiten der beiden Glieder DEF und H sind:

$$\frac{K'H_1}{KH} \sin(KH,\ K'H_1) = +\frac{270}{240} \text{ sek}^{-1}$$

$$\frac{K'H'}{KH} \sin(KH,\ K'H') = +\frac{320}{240} \text{ sek}^{-1}.$$

Folglich ist

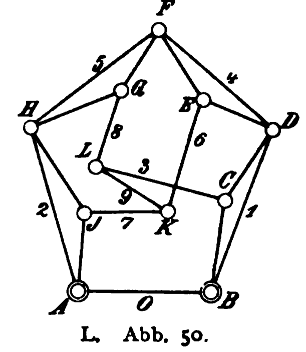
$$(H_1H',\ H_2h_1) = 90^\circ$$

$$H_2h_1 = H_1H'\ \omega = 50\,\frac{270+320}{240} = 123 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$h_1H'' \perp H_2h_1$$

aufzutragen. Die Gerade h_1H'' muß durch den bereits bestimmten Punkt H'' gehen.

Beispiel 8. In dem zehngliedrigen Getriebe, Abb. 50, ruht das Glied 0 (AB), während das Glied 1 (BCD) mit der Drehgeschwindigkeit $+0{,}50$ sek^{-1} und der Drehbeschleunigung $+0{,}20$ sek^{-2} geführt wird. Da das Getriebe kein einziges Stabviereck enthält, so ist das im Abschnitt 10,5 beschriebene Verfahren anzuwenden.



L. Abb. 50.

Die Geschwindigkeiten. Wir erteilen dem Stabe 3 (CL) die Eigenschaft der Dehnbarkeit und bestimmen die Geschwindigkeiten zweier Bewegungen I, II, die gegeben sind durch folgende Annahmen:

Bewegung I: $\omega_{01} = 0, \quad \omega_{11} = 0, \quad \omega_{21} = +1$ sek^{-1}

Bewegung II: $\omega_{02} = 0, \quad \omega_{12} = +0{,}50$ sek^{-1}, $\omega_{22} = 0$.

Die Bildung der hier nicht mitgeteilten Geschwindigkeitspläne, deren Ergebnisse in den ersten beiden Reihen der folgenden Tabelle zu-

sammengestellt sind, bietet keine Schwierigkeit, da in den Stabpolygonen *ABDFH*, *ABDEKI*, *EFGLK* in dieser Reihenfolge nur je *zwei* Glieder mit unbekannten Drehgeschwindigkeiten vorkommen.

	ω_0	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	δ_3
Bewegung I	0	0	+ 1,00	+ 0,98	+ 1,08	− 0,57	− 0,43	− 0,75	+ 0,37	+ 0,68	− 0,61
Bewegung II	0	+ 0,50	0	− 0,32	− 0,33	+ 0,52	+ 0,66	+ 0,36	+ 0,34	− 0,11	+ 0,33
Bewegung III	0	+ 0,50	+ 0,54	+ 0,21	+ 0,25	+ 0,21	+ 0,43	− 0,04	+ 0,54	+ 0,26	0

Die von der Aufgabe geforderte Bewegung III ergibt sich durch Zusammensetzung der Geschwindigkeiten der Bewegung II mit den ζ-fachen Geschwindigkeiten der Bewegung I, wenn man die Zahl ζ so wählt, daß die Dehnungsgeschwindigkeit δ_3 des Stabes 3 in der zusammengesetzten Bewegung III gleich null wird:

$$0 = \zeta\,\delta_{31} + \delta_{32} = -0{,}61\,\zeta + 0{,}33$$

$$\zeta = +\frac{33}{61} = +0{,}54.$$

Die in der letzten Tabellenreihe angegebenen Drehgeschwindigkeiten der Bewegung III konnten demnach durch die Gleichung

$$\omega_3 = \omega_2 + \zeta\,\omega_1 = \omega_2 + 0{,}54\,\omega_1$$

bestimmt werden.

Die Beschleunigungen. Wir erteilen wieder dem Stabe 3 (*CL*) die Eigenschaft der Dehnbarkeit und bestimmen die Beschleunigungen einer Bewegung IV, deren Geschwindigkeiten mit der Bewegung III übereinstimmen:

$$\omega_{04} = \omega_{03}, \quad \omega_{14} = \omega_{13}, \quad \omega_{24} = \omega_{23} \text{ usf.},$$

während die Drehbeschleunigungen durch die Annahme

$$\omega'_{04} = 0, \quad \omega'_{14} = +0{,}20 \text{ sek}^{-2}, \quad \omega'_{24} = 0$$

bestimmt sind. Der betreffende Plan bietet nichts Bemerkenswertes und ist daher hier nicht mitgeteilt. Das Ergebnis desselben, nämlich die Drehbeschleunigungen aller Glieder und die Dehnungsbeschleunigung δ'_{34} des dehnbaren Gliedes 3, ist in der ersten Reihe der nachstehenden Tabelle zusammengestellt. Diese Bewegung IV ist zusammenzusetzen mit einer Anfangsbewegung V, deren Geschwindigkeiten also sämtlich null, und deren Drehbeschleunigungen den Drehgeschwindigkeiten der Bewegung I proportional sind:

$$\omega'_{05} = \omega'_{15} = 0, \quad \omega'_{25} = \alpha\,\omega_{21}, \quad \omega'_{35} = \alpha\,\omega_{31} \text{ usf.}$$

In dieser Bewegung hat die Dehnungsbeschleunigung δ'_{35} des Stabes 3 die Größe:

$$\delta'_{35} = \alpha \delta_{31}.$$

Die Größe α ist so zu wählen, daß die Dehnungsbeschleunigung δ'_{33} der aus IV und V zusammengesetzten Bewegung III dem *starren* Stabe 3 entspricht:

$$\delta'_{33} = -\,\omega_{33}^2 = \delta'_{34} + \alpha \delta_{31}.$$

Mit Benutzung der Tabellenwerte erhält man

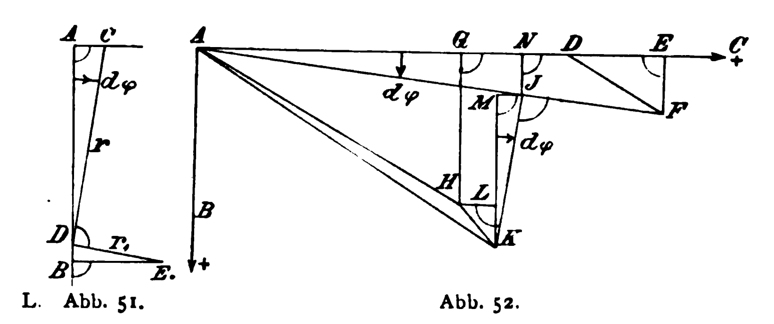
$$\alpha = -\,\frac{\omega_{33}^2 + \delta'_{34}}{\delta_{31}} = +\,\frac{0{,}21^2 + 0{,}08}{0{,}61} = +\,0{,}20.$$

Die in der letzten Tabellenreihe zusammengestellten Drehbeschleunigungen der von der Aufgabe geforderten Bewegung III ergeben sich demnach aus der Gleichung:

$$\omega'_3 = \omega'_4 + \alpha \omega_1 = \omega'_4 + 0{,}20\,\omega\,.$$

	ω'_0	ω'_1	ω'_2	ω'_3	ω'_4	ω'_5	ω'_6	ω'_7	ω'_8	ω'_9	δ'_3
Bewegung IV	0	+ 0,20	0	− 0,05	− 0,06	+ 0,11	+ 0,26	+ 0,08	+ 0,24	+ 0,03	+ 0,08
Bewegung V	0	0	+ 1,00α	+ 0,98α	+ 1,08α	− 0,57α	− 0,43α	− 0,75α	+ 0,37α	+ 0,68α	− 0,61α
Bewegung III	0	+ 0,20	+ 0,20	+ 0,15	+ 0,16	0,00	+ 0,17	− 0,07	+ 0,31	+ 0,17	− 0,044

12. Die Krümmung der Bahn eines Punktes und ihrer Evolute. Der bewegte Punkt befindet sich zur Zeit t in A, Abb. 51,



L. Abb. 51. Abb. 52.

und zur Zeit $t + dt$ in C. Die Bahn AC hat den Krümmungshalbmesser

$$AB = r,$$

ihre Evolute BD hat den Krümmungshalbmesser

$$BE = r_1.$$

Der Strecke r wird der Sinn AB, der Strecke r_1 der Sinn BE beigelegt. Der Punkt A hat zur Zeit t die Geschwindigkeit v, die Beschleunigung erster Ordnung v' und die Beschleunigung zweiter Ordnung v''. Die Beschleunigungen v', v'' haben in den Richtungen der Bahnnormalen und der Bahntangente die Komponenten n', u' und n'', u''. Auf der Bahnnormalen geben wir dem Sinn AB, auf der Tangente dem durch die Bedingung

$$(AC, AB) = 90^\circ$$

bestimmten Sinn AC das positive Vorzeichen. Um allgemein gültige algebraische Beziehungen zu erhalten, betrachten wir einen Fall, in dem alle Größen das positive Vorzeichen tragen. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sind in einer besonderen Abb. 52 dargestellt, ihre unendlich kleinen Aenderungen natürlich in unendlich starker Verzerrung. In dem unendlich kleinen Zeitabschnitt von t bis $t + dt$ ändert sich

$$\begin{aligned} v\ (AD) &\text{ in } v + dv\ (AF) \\ v'\ (AH) &\text{ in } v' + dv'\ (AK) \\ u'\ (AG) &\text{ in } u' + du'\ (AJ) \\ n'\ (GH) &\text{ in } n' + dn'\ (JK). \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeitsstrecke AF $(v + dv)$ bildet die geometrische Summe der zwei Geschwindigkeiten AD (v) und DF $(v'dt)$ oder der drei Geschwindigkeiten AD (v), DE $(u'dt)$ und EF $(n'dt)$. Da

$$AE = AD + DE$$

$$(v + dv) \cos d\varphi = v + u'\,dt$$

ist, so folgt

$$u' = \frac{dv}{dt}\,. \tag{32}$$

Die Richtung der Geschwindigkeit v dreht sich in der Zeit dt in positivem Sinne um den Winkel

$$d\varphi = \frac{n'dt}{v} = \frac{v\,dt}{r}\,. \tag{33}$$

Daher hat der Krümmungshalbmesser der Bahn die Größe:

$$r = \frac{v^2}{n'}, \tag{34}$$

und die Strecke AB hat stets den Sinn von n'.

Aus der Zeichnung ist zu ersehen:

$$AN = AG + HL + MJ$$

oder:

$$(u' + du') \cos d\varphi = u' + u''dt + (n' + dn') \sin d\varphi$$

oder:

$$u'' = \frac{du'}{dt} - n' \frac{d\varphi}{dt} = \frac{du'}{dt} - \frac{n'^2}{v}; \tag{35}$$

ferner:

$$GH + LK = NJ + MK$$

oder:

$$n' + n''dt = (u' + du') \sin d\varphi + (n' + dn') \cos d\varphi$$

oder:

$$n'' = \frac{dn'}{dt} + \frac{n'u'}{v}. \tag{36}$$

Auch der Krümmungshalbmesser r_1 der Evolute durchläuft in der Zeit dt in positivem Sinne den Winkel $d\varphi$, wobei jedoch zu beachten ist, daß die Aenderung dr von r negativ ist, wenn r_1, d. h. die Strecke BE, den positiven Sinn AC hat:

$$d\varphi = -\frac{dr}{r_1} = \frac{v\,dt}{r},$$

woraus folgt

$$\frac{r_1}{r} = -\frac{1}{v}\frac{dr}{dt}.$$

Aus Gleichung 34) ergibt sich durch Differenzieren:

$$\frac{dr}{dt} = 2\frac{v}{n'}\frac{dv}{dt} - \frac{v^2}{n'^2}\frac{dn'}{dt}$$

und nach Gleichung 32) und 36):

$$\frac{dr}{dt} = 3\frac{vu'}{n'} - \frac{v^2 n''}{n'^2}.$$

Daher ist:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{vn''}{n'^2} - \frac{3u'}{n'}. \tag{37}$$

Der Krümmungshalbmesser BE hat den positiven Sinn AC, wenn algebraisch

$$vn'' > 3u'n'$$

ist. Der Punkt A kann seine Bahn mit verschiedenen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen durchlaufen. Bei einer zwangläufigen Bewegung, d. h. bei gegebener Bahn haben aber in jedem Bahnpunkte die Größen

$$\frac{v^2}{n'} \text{ und } \left(\frac{vn''}{n'^2} - \frac{3u'}{n'}\right)$$

unveränderliche Werte.

13. **Die Beschleunigungen zweiter Ordnung der ebenen Bewegung einer starren Punktgruppe.** Wir wählen für die relative Bewegung des Punktes A gegen den starr mit ihm verbundenen Punkt B die Bezeichnungen des vorigen Abschnittes, und da bei dieser Bewegung A den Kreis vom Halbmesser

$$r = AB = a$$

um den ruhenden Punkt B beschreibt, so ist:

$$n' = \frac{v^2}{a} = a\omega^2, \tag{38}$$

wenn wie früher mit

$$\omega = \frac{v}{a}$$

die Drehgeschwindigkeit der Strecke BA im Sinne der Uhrzeigerbewegung bezeichnet wird. Ferner ist nach den Gleichungen 32), 35), 36):

$$u' = \frac{dv}{dt} = a\frac{d\omega}{dt} = a\omega', \tag{39}$$

$$u'' = \frac{du'}{dt} - \frac{n'^2}{v} = a\left(\frac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3\right) = a\left(\frac{d\omega'}{dt} - \omega^3\right) \tag{40}$$

und

$$n'' = \frac{dn'}{dt} + \frac{n'u'}{v} = 2a\omega\frac{d\omega}{dt} + a\omega\omega' = 3a\omega\omega'. \tag{41}$$

Die Tangentialbeschleunigung zweiter Ordnung u'' hat den positiven Sinn AC, wenn algebraisch

$$\frac{d\omega'}{dt} > \omega^3$$

ist, und die Normalbeschleunigung n'' hat den positiven Sinn AB, wenn ω und ω' *gleiche* Vorzeichen haben. Gleichung 41) folgt auch aus Gleichung 37), wenn r_1 gleich null gesetzt wird. In Uebereinstimmung mit den Abschnitten 1 und 6 nennen wir das Verhältnis

$$\omega'' = \frac{u''}{a} = \frac{d\omega'}{dt} - \omega^3 = \frac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3 \tag{42}$$

die *Drehbeschleunigung zweiter Ordnung* und das Verhältnis

$$\delta'' = -\frac{n''}{a} = -3\omega\omega' \tag{43}$$

die *Dehnungsbeschleunigung zweiter Ordnung* der starren Strecke a. Es ist hierbei zu beachten, daß die relative Dehnungsbeschleunigung $a\delta''$ des Punktes A gegen B den positiven Sinn BA hat, wenn n'' negativ ist.

Da die gleichzeitigen Werte der Drehgeschwindigkeit ω für alle Strecken AB, BC, $CA\ldots$ der starren Punktgruppe $ABC\ldots$ gleich groß sind, so haben auch die Größen $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$, ω'', δ'' für alle Strecken gleichzeitig dieselben Werte. Werden von einem Punkte B''' aus die Strecken $B'''A'''$, $B'''C'''$, $B'''D'''\ldots$ aufgetragen, welche die nach Gleichung 40) und 41) bestimmten relativen Beschleunigungen zweiter Ordnung der Punkte A, C, $D\ldots$ gegen den Punkt B darstellen, so entsteht, wie in den Abschnitten 2 und 7, eine Punktgruppe $A'''\,B'''\,C'''\,D'''\ldots$, die der starren Gruppe $ABCD\ldots$ des Lageplanes geometrisch ähnlich ist:

$$A'''B'''C'''D'''\ldots \approx ABCD\ldots \tag{44}$$

Der gemeinschaftliche Beschleunigungswinkel zweiter Ordnung:

$$\gamma'' = (AB,\ A'''B''') = (BC,\ B'''C''') = \ldots$$

wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{\delta''}{\cos\gamma''} = \frac{\omega''}{\sin\gamma''} = \frac{A'''B'''}{AB} = \frac{B'''C'''}{BC} = \ldots \tag{45}$$

Dieser Winkel kann alle Größen annehmen, da die Werte von δ'' und ω'' positiv und negativ sein können. Demgegenüber erinnern wir daran, daß der *Geschwindigkeitswinkel* γ einer starren Strecke gleich 90° oder gleich 270° ist, und daß der Winkel γ' der Beschleunigungen *erster* Ordnung an die Bedingung

$$90^\circ < \gamma' < 270^\circ$$

gebunden ist.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, daß der Plan der Beschleunigungen zweiter Ordnung $R'''A'''B'''C'''\ldots$ für eine starre Punktgruppe $ABC\ldots$ gebildet werden kann, wenn außer den Größen ω, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ noch die Beschleunigung zweiter Ordnung $R'''B'''$ irgend eines Punktes B der Gruppe bekannt ist. Denn die Beschleunigung zweiter Ordnung $R'''C'''$ irgend eines anderen Punktes C bildet die geometrische Summe aus $R'''B'''$ und der relativen Beschleunigung $B'''C'''$ des Punktes C gegen B. R''' ist also der Pol des Beschleunigungsplanes. Der im Lageplan durch die Bedingung

$$RABC\ldots \approx R'''A'''B'''C'''\ldots$$

bestimmte Pol R ist der einzige Punkt der bewegten Ebene ABC, dessen Beschleunigung zweiter Ordnung zur Zeit t gleich null ist.

Für jeden Punkt A ergibt sich die durch die Strecke AA_2 dargestellte Beschleunigung zweiter Ordnung aus den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} AA_2 \sin(RA,\ AA_2) &= \omega''\, RA \\ AA_2 \cos(RA,\ AA_2) &= \delta''\, RA. \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

14. Der Plan der Beschleunigungen zweiter Ordnung eines ebenen Getriebes. Es erscheint zweckmäßig, an dieser Stelle die nahe Verwandtschaft hervorzuheben, die in betreff ihrer Entstehung zwischen dem Geschwindigkeitsplan und den Beschleunigungsplänen eines Getriebes zu bemerken ist.

Der *Geschwindigkeitsplan* kann gebildet werden, wenn außer dem festgestellten Gliede die Drehgeschwindigkeit *eines* Gliedes bekannt ist. Dem Bildungsgesetz liegt die Bedingung zugrunde, daß die Dehnungsgeschwindigkeit eines starren Stabes gleich null ist.

Der Plan der Beschleunigungen *erster* Ordnung kann gebildet werden, wenn außer dem Geschwindigkeitsplan noch die Drehbeschleunigung erster Ordnung für *ein* Glied gegeben ist. Dem Bildungsgesetz liegt eine ähnliche Bedingung zugrunde: Die Dehnungsbeschleunigung eines jeden Stabes im Getriebe ist gleich dem negativen Quadrat seiner Drehgeschwindigkeit; sie ist also bestimmt durch den Geschwindigkeitsplan.

Um endlich die Beschleunigungen *zweiter* Ordnung bilden zu können, muß außer den Geschwindigkeiten und den Beschleunigungen *erster* Ordnung noch die Drehbeschleunigung zweiter Ordnung für *ein* Glied gegeben sein; dann ist für jeden Stab des Getriebes die Dehnungsbeschleunigung zweiter Ordnung bekannt: sie ist gleich dem negativen dreifachen Produkt aus der Drehgeschwindigkeit des Stabes und seiner Drehbeschleunigung erster Ordnung.

Es wird demnach genügen, die Bildung eines solchen Planes an einem Beispiel zu erklären.

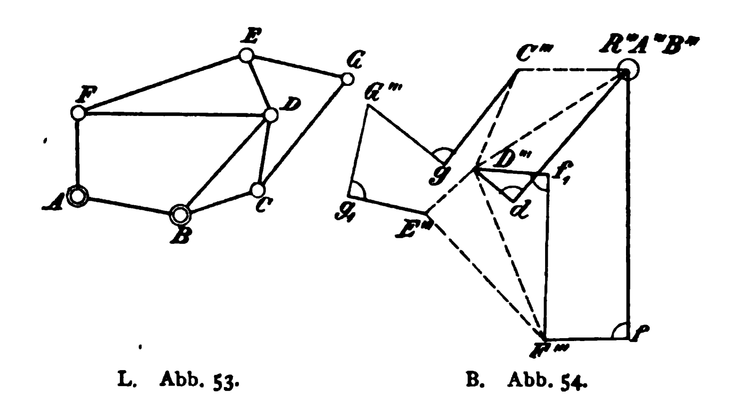
Beispiel 9. Für das geführte Glied BCD des in den Abb. 41 und 53 dargestellten Getriebes möge gegeben sein:

$$\omega = -1{,}17 \text{ sek}^{-1}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega' = -1{,}18 \text{ sek}^{-2}$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = -2{,}64 \text{ sek}^{-3}.$$

In den Abb. 42 und 43 sind die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen erster Ordnung in den normalen Maßstäben dargestellt. Das nachstehende Verzeichnis enthält die aus jenen Abbildungen



L. Abb. 53. B. Abb. 54.

entnommenen Werte der Stablängen a, der Geschwindigkeiten $a\omega$, der Beschleunigungen $a\omega'$ und die hieraus berechneten Werte von

$$a\delta'' = -3\, a\omega\omega'.$$

Stab	a cm	$a\omega$ cm sek^{-1}	$a\omega'$ cm sek^{-2}	$a\delta''$ cm sek^{-3}
BD	173	— 202	— 204	— 715
AF	108	— 156	— 246	— 1066
FD	250	— 132	— 175	— 277
CG	190	— 172	— 180	— 489
EG	140	— 106	— 132	— 300

Der in $\frac{1}{3}$ der normalen Größe, also in dem Maßstabe

$$1 \text{ cm} = 300 \text{ cm sek}^{-3}$$

dargestellte Beschleunigungsplan zweiter Ordnung, Abb. 54, ergibt sich aus den folgenden Bedingungen:

$$B'''d = -715 \text{ cm sek}^{-3},$$

folglich wegen des negativen Vorzeichens:

$$(BD,\ B'''d) = 180^\circ.$$

$$dD''' = a\left(\frac{d\omega'}{dt} - \omega^3\right) = 173\,(-2{,}64 + 1{,}17^3) = -180 \text{ cm sek}^{-3},$$

folglich wegen des negativen Vorzeichens:

$$(BD, dD''') = 270^\circ.$$

$$A'''f = -1066 \text{ cm sek}^{-3},$$

daher

$$(AF, A'''f) = 180^\circ.$$

$$D'''f_1 = -277 \text{ cm sek}^{-3},$$

daher

$$(DF, D'''f_1) = 180^\circ.$$

$$fF''' \perp A'''f, \quad f_1F''' \perp D'''f_1.$$

$$B'''C'''D''' \approxeq BCD, \quad D'''E'''F''' \approxeq DEF.$$

$$C'''g = -489 \text{ cm sek}^{-3},$$

daher

$$(CG, C'''g) = 180^\circ.$$

$$E'''g_1 = -300 \text{ cm sek}^{-3},$$

daher

$$(EG, E'''g_1) = 180^\circ.$$

$$gG''' \perp C'''g, \quad g_1 G''' \perp E'''g_1.$$

15. **Die Krümmung der Bahn und der Bahnevolute eines mit einem Getriebegliede starr verbundenen Punktes.** Nachdem für irgend eine Bewegung des Getriebes, d. h. bei willkürlicher Wahl der Drehgeschwindigkeit und der Drehbeschleunigungen des geführten Gliedes, die Pläne der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen erster und zweiter Ordnung gebildet worden sind, können die Krümmungshalbmesser der Bahn und ihrer Evolute für jeden mit einem Getriebegliede starr verbundenen Punkt nach den Gleichungen 34) und 37) ermittelt werden, indem man die algebraischen Werte der vier Größen v, n', u', n'' aus den Plänen entnimmt. Ein Beispiel möge zur Erläuterung dienen.

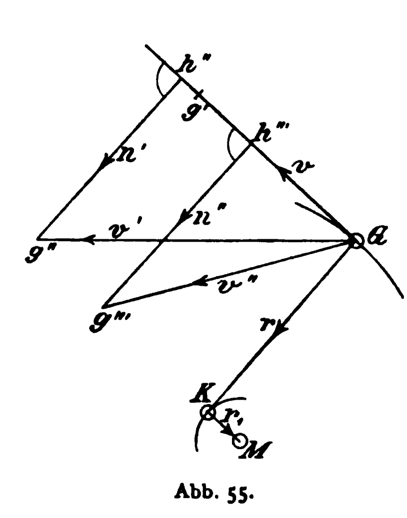


Abb. 55.

Beispiel 10. Das Gelenk G des Getriebes Abb. 41 und 53 hat die durch die Strecken $P'G'$ und Gg' dargestellte Geschwindigkeit

$$v = P'G' \perp\!\!\!\perp Gg', \text{ Abb. 42 und 55,}$$

10*

ferner die Beschleunigung erster Ordnung

$$v' = Q''G'' \perp\!\!\!\perp Gg'', \text{ Abb. 43 und 55,}$$

und die Beschleunigung zweiter Ordnung

$$v'' = R'''G''' \perp\!\!\!\perp Gg''', \text{ Abb. 54 und 55.}$$

v ist in dem Maßstabe 1 cm = 100 cm sek^{-1}
v' „ „ „ „ 1 cm = 100 cm sek^{-2}
v'' „ „ „ „ 1 cm = 300 cm sek^{-3}

dargestellt. Mit Berücksichtigung dieser Maßstäbe entnimmt man aus Abb. 55:

$$Gg' = v = -280 \text{ cm sek}^{-1}$$
$$Gh'' = u' = -310 \text{ cm sek}^{-2}$$
$$h''g'' = n' = +270 \text{ cm sek}^{-2}$$
$$h'''g''' = n'' = +850 \text{ cm sek}^{-3}.$$

v und u' sind negativ, weil die Winkel

$$(v, n') = (u', n') = 270^\circ$$

sind, n'' ist positiv, weil der Sinn von n'' mit dem von n' übereinstimmt. Nach den Gleichungen 34) und 37) ist also

$$GK = r = \frac{280^2}{270} = 290 \text{ cm}$$

und

$$KM = r_1 = 290\left(-\frac{280 \cdot 850}{270^2} + 3\,\frac{310}{270}\right) = +52 \text{ cm}.$$

Da r_1 positiv ist, so ist der Winkel

$$(KM, GK) = (r_1, r) = 90^\circ.$$

16. Die geometrische Bewegung einer Ebene. Die Krümmungen der Bahnen und der Bahnevoluten aller Punkte einer bewegten Ebene werden für einen gegebenen Zeitpunkt bestimmt durch die Lage der drei Pole P, Q, R und durch die drei Größen $\omega, \frac{d\omega}{dt}, \frac{d^2\omega}{dt^2}$. Für eine *zwangläufige* Bewegung, die z. B. von einem Getriebegliede und von der starr mit ihm verbundenen Ebene ausgeführt wird, sind die Bahnen der Punkte bestimmt und unabhängig von den genannten drei Größen. Zu jeder Gruppe von willkürlich gewählten Werten $\omega, \frac{d\omega}{dt}, \frac{d^2\omega}{dt^2}$ gehört eine bestimmte Gruppe von drei Polen P, Q, R. Die hier in Betracht kommenden Beziehungen

nehmen ihre einfachste Form an, wenn man ω gleich der positiven Zahleneinheit und $\frac{d\omega}{dt}$ sowie $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ gleich null wählt. Wir nennen diese Bewegung die *geometrische* Bewegung, weil die Zeit aus ihrer Betrachtung beseitigt wird. Nicht nur die Geschwindigkeiten, sondern auch alle Beschleunigungen werden lediglich durch die Längeneinheit gemessen und können im Maßstab des Lageplans dargestellt werden. Für die geometrische Bewegung ist also

$$\left.\begin{aligned}
\omega &= +1 \\
\gamma &= 90^\circ \\
\delta' &= -\omega^2 = -1 \\
\omega' &= \frac{d\omega}{dt} = 0 \\
\gamma' &= 180^\circ \\
\delta'' &= -3\omega\omega' = 0 \\
\omega'' &= \frac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3 = -1 \\
\gamma'' &= 270^\circ.
\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Wenn die drei Pole P_0, Q_0, R_0 der geometrischen Bewegung bekannt sind, so bestimmt man für jeden Punkt A der Ebene die

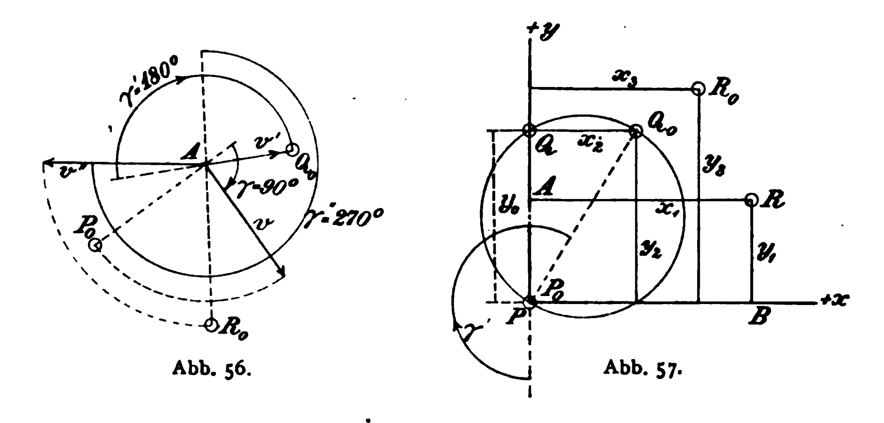


Abb. 56. Abb. 57.

Geschwindigkeit v, die Beschleunigung erster Ordnung v' und die Beschleunigung zweiter Ordnung v'' durch folgende Bedingungen, Abb. 56:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma &= (P_0A,\ v) = 90^\circ, & v &= P_0A \\
\gamma' &= (Q_0A,\ v') = 180^\circ, & v' &= Q_0A \\
\gamma'' &= (R_0A,\ v'') = 270^\circ, & v'' &= R_0A.
\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Durch den Geschwindigkeitsplan und die beiden Beschleunigungspläne eines Getriebes sind für den Zeitpunkt der Betrachtung und für jedes Glied gegeben: die Lage der Pole P, Q, R und die algebraischen Werte der Größen ω, ϑ', ω', ϑ'', ω''. Es ergibt sich also die Aufgabe, hieraus die Pole P_0, Q_0, R_0 der geometrischen Bewegung zu bestimmen. Wir benutzen zu diesem Zweck ein rechtwinkliges Koordinatensystem, Abb. 57, dessen Anfangspunkt mit P, dessen y-Achse auch dem Sinne nach mit PQ zusammenfällt, und dessen x-Achse durch die Bedingung:

$$(y, x) = 90^\circ$$

bestimmt ist. Der Geschwindigkeitspol P_0 fällt auf den ruhenden Punkt der Ebene, also auf den Pol P. Wir bezeichnen die bekannten Koordinaten der Punkte Q und R mit x_0, y_0 und x_1, y_1, ferner die unbekannten Koordinaten der Punkte Q_0 und R_0 mit x_2, y_2 und x_3, y_3. Die Gleichungen zur Bestimmung dieser vier unbekannten Größen ergeben sich, indem man für zwei beliebige Punkte A, B der Ebene nach Abschnitt 12 die Bedingungen bildet, daß jede der beiden Größen $\frac{v^2}{n'}$ und $\left(\frac{vn''}{n'^2} - 3\frac{u'}{n'}\right)$ in der geometrischen Bewegung denselben Wert haben muß wie in der gegebenen Bewegung. Um diese Bedingungen tunlichst einfach zu gestalten, wählen wir für den Punkt A die Koordinaten

$$x = 0, \quad y = y_1$$

und für den Punkt B:

$$x = x_1, \quad y = 0.$$

Die Komponenten der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen dieser beiden Punkte haben die in dem nachstehenden Verzeichnis zusammengestellten Werte, deren Vorzeichen den Vorschriften des Abschnittes 12 entsprechen.

	Punkt A in der		Punkt B in der	
	gegebenen Bewegung	geometrischen Bewegung	gegebenen Bewegung	geometrischen Bewegung
v	$+y_1\omega$	$+y_1$	$+x_1\omega$	$+x_1$
n'	$(y_1 - y_0)\omega^2$	$y_1 - y_2$	$x_1\omega^2 + y_0\omega'$	$x_1 - x_2$
u'	$(y_1 - y_0)\omega'$	$+x_2$	$x_1\omega' - y_0\omega^2$	$-y_2$
n''	$-x_1\omega''$	$+x_3$	$+y_1\omega''$	$-y_3$

Die bezeichneten Bedingungen lauten also für den Punkt A:

$$\frac{y_1^2 \omega^2}{(y_1 - y_0)\,\omega^2} = \frac{y_1^2}{y_1 - y_2}$$

$$-\frac{x_1 y_1\, \omega\omega''}{(y_1 - y_0)^2\, \omega^4} - \frac{3\,\omega'}{\omega^2} = \frac{y_1\, x_3}{(y_1 - y_2)^2} - \frac{3\,x_2}{y_1 - y_2}$$

und für den Punkt B:

$$\frac{x_1^2\, \omega^2}{x_1 \omega^2 + y_0 \omega'} = \frac{x_1^2}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{x_1 y_1\, \omega\omega''}{(x_1 \omega^2 + y_0 \omega')^2} - 3\,\frac{x_1 \omega' - y_0 \omega^2}{x_1 \omega^2 + y_0 \omega'} = -\frac{x_1 y_3}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{3\,y_2}{x_1 - x_2}.$$

Beachtet man, daß nach den Gleichungen 17), 43), 45):

$$\omega' = -\,\omega^2 \operatorname{tg} \gamma'$$
$$\omega'' = -\,3\,\omega\omega' \operatorname{tg} \gamma'' = +\,3\,\omega^3 \operatorname{tg} \gamma' \operatorname{tg} \gamma''$$

ist, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= y_0 \operatorname{tg} \gamma' \\ y_2 &= y_0 \\ x_3 &= 3 \operatorname{tg} \gamma' \,(y_1 - y_0 - x_1 \operatorname{tg} \gamma'') \\ y_3 &= 3 \operatorname{tg} \gamma' \,(y_0 \operatorname{tg} \gamma' - x_1 - y_1 \operatorname{tg} \gamma''). \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ersieht man, daß der Beschleunigungspol Q bei jeder Geschwindigkeit und Beschleunigung der Bewegung auf dem festen Kreise vom Durchmesser $P_0 Q_0$ liegt, und daß der Winkel $(QP_0,\ P_0 Q_0)$ gleich dem Beschleunigungswinkel γ' der gegebenen Bewegung ist.

Für die folgende Darstellung der geometrischen Bewegung einer Ebene empfiehlt es sich, ein Polarkoordinatensystem, Abb. 58, anzuwenden, dessen Anfangspunkt mit dem Pol P_0, und dessen feste Achse auch dem Sinne nach mit $P_0 Q_0$ zusammenfällt. Wir bestimmen die Lage des Poles Q_0 durch den Vektor

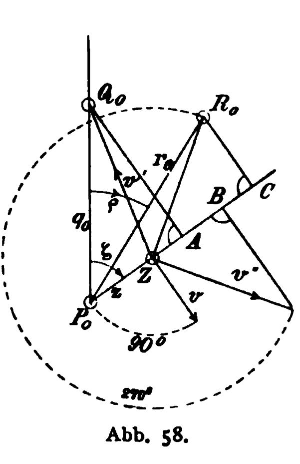


Abb. 58.

$$P_0 Q_0 = q_0,$$

ferner die Lage des Poles R_0 durch den Winkel

$$(P_0 Q_0,\ P_0 R_0) = \varrho$$

und den Vektor

$$P_0 R_0 = r_0,$$

endlich die Lage eines beliebigen Punktes Z der Ebene durch den Winkel

$$(P_0 Q_0, P_0 Z) = \zeta$$

und den Vektor

$$P_0 Z = z.$$

Die Geschwindigkeit des Punktes Z hat, da ω gleich $+1$ ist, die Größe

$$v = + z, \tag{50}$$

während Richtung und Sinn durch den Winkel

$$(z, v) = 90^\circ$$

bestimmt sind. Die Beschleunigung erster Ordnung des Punktes Z hat Größe, Richtung und Sinn der Strecke ZQ_0, weil

$$\omega' = \frac{d\omega}{dt} = 0$$

und daher der Beschleunigungswinkel

$$\gamma' = 180^\circ$$

ist. Folglich ist:

$$\left.\begin{aligned} n' &= ZA = P_0 A - P_0 Z = q_0 \cos \zeta - z \\ u' &= A Q_0 = - q_0 \sin \zeta. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Hierbei ist zu beachten, daß auf der Bahnnormalen der Sinn des Vektors $P_0 Z$ und auf der Bahntangente der Sinn von v das positive Vorzeichen trägt. Die Beschleunigung *zweiter* Ordnung des Punktes Z hat, weil

$$\delta'' = -3\omega\omega' = 0$$
$$\omega'' = \frac{d^2\omega}{dt^2} - \omega^3 = -1$$
$$\gamma'' = 270^\circ$$

ist, die Größe

$$v'' = R_0 Z,$$

während Richtung und Sinn durch den Winkel

$$(R_0 Z, v'') = 270^\circ$$

bestimmt sind. Demnach ist

$$n'' = ZB = CR_0 = r_0 \sin(\zeta - \varrho). \tag{52}$$

Nach den Gleichungen 34) und 37) ergeben sich die Krümmungshalbmesser r, r_1 der Bahnkurve und deren Evolute für den Punkt Z:

$$r = \frac{z^2}{q_0 \cos \zeta - z} \tag{53}$$

$$r_1 = r\left(\frac{z r_0 \sin(\zeta - \varrho)}{(q_0 \cos \zeta - z)^2} + \frac{3 q_0 \sin \zeta}{q_0 \cos \zeta - z}\right). \tag{54}$$

Diese Formeln werden durch Abb. 59 geometrisch dargestellt. Man zieht im Kreise vom Durchmesser $P_0 Q_0$ die Sehne $Q_0 X$ parallel zur Sehne $P_0 ZA$, ferner die Gerade $ZCEG$ normal zu $P_0 Z$. Die Gerade XC schneidet dann die Gerade $P_0 Z$ im Krümmungsmittelpunkt K der Bahnkurve des Punktes Z; denn wegen Aehnlichkeit der Punktgruppen

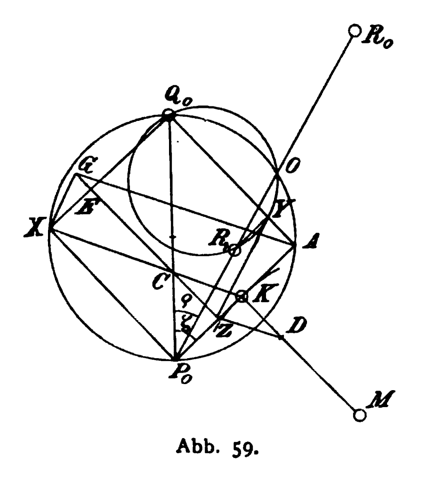


Abb. 59.

$$CP_0ZK \sim CQ_0EX$$

ist

$$\frac{ZK}{P_0Z} = \frac{XE}{EQ_0} = \frac{ZK}{z} = \frac{z}{q_0 \cos\zeta - z},$$

also

$$ZK = r.$$

Man macht ferner

$$P_0R_1 = \frac{1}{3} P_0R_0,$$

zieht im Kreise vom Durchmesser $Q_0 R_1$ die Sehne $R_1 Y$ parallel zu $P_0 Z$, dann XG parallel zu YZ, ZD parallel zu GA und macht KM gleich $3KD$; dann ist M der Krümmungsmittelpunkt der Bahnevolute des Punktes Z; denn es ist:

$$AY = \frac{1}{3} r_0 \sin(\zeta - \varrho), \quad ZA = q_0 \cos\zeta - z$$

$$ZG = ZE + XE\frac{AY}{ZA} = q_0 \sin\zeta + z\frac{r_0 \sin(\zeta - \varrho)}{3(q_0 \cos\zeta - z)}$$

$$\frac{1}{3} KM = KD = ZK\frac{ZG}{ZA} = r\left(\frac{zr_0 \sin(\zeta - \varrho)}{3(q_0 \cos\zeta - z)^2} + \frac{q_0 \sin\zeta}{q_0 \cos\zeta - z}\right)$$

$$KM = r_1.$$

Wir entnehmen aus den Gleichungen 53) und 54) die folgenden Sätze, wobei wir absehen von den Grenzfällen, in denen z. B. einer der drei Pole P_0, Q_0, R_0 unendlich fern liegt, oder zwei von ihnen zusammenfallen.

1. Der Pol P_0 ist der einzige Punkt der Ebene, dessen Bahn einen Krümmungshalbmesser von der Größe null hat.

2. Der Krümmungshalbmesser r der Bahn hat für alle Punkte innerhalb des Kreises $P_0 Q_0$ einen positiven, für alle Punkte außerhalb dieses Kreises einen negativen Wert. Im ersten Falle hat also die Strecke ZK den Sinn $P_0 Z$, im zweiten den Sinn ZP_0. Für alle

Punkte des Kreises $P_0 Q_0$ ist r unendlich groß; die Richtungen der Geschwindigkeiten aller dieser Punkte gehen durch den Pol Q_0. Man hat den Kreis $P_0 Q_0$ den *Wendekreis* des Bewegungszustandes und den Punkt Q_0 den *Wendepol* genannt.

3. Für alle Punkte der zu $P_0 Q_0$ normal gerichteten Geraden $P_0 F$, Abb. 61, fällt der Krümmungsmittelpunkt der Bahn mit dem Pol P_0 zusammen.

4. Bezeichnet K, Abb. 60, den Krümmungsmittelpunkt der Bahn eines auf der Achse $P_0 Q_0$ liegenden Punktes Z, und sind KK_1, $Q_0 Q_1$, ZZ_1 die von den Punkten K, Q_0, Z auf eine durch P_0 gehende Gerade gefällten Lote, so ist K_1 der Krümmungsmittelpunkt der Bahn des Punktes Z_1; denn es ist

$$ZK = \frac{\overline{P_0 Z}^2}{ZQ_0},$$

$$Z_1 K_1 : P_0 Z_1 : Z_1 Q_1 = ZK : P_0 Z : ZQ_0,$$

folglich

$$Z_1 K_1 = \frac{\overline{P_0 Z_1}^2}{Z_1 Q_1}.$$

Abb. 60.

Die Bahnen aller Punkte des Kreises vom Durchmesser $P_0 Z$ haben ihre Krümmungsmittelpunkte also auf dem Kreise vom Durchmesser $P_0 K$.

5. Für alle Punkte des Wendekreises $P_0 Q_0$ mit Ausnahme des Punktes P_0 und des auf dem Kreise $Q_0 R_1$ liegenden Punktes O, Abb. 59, ist der Krümmungshalbmesser r_1 der Bahnevolute unendlich groß (Gleichung 54).

6. Die Punkte, deren Bahnevoluten einen Krümmungshalbmesser von der Größe null haben, liegen auf einer Kurve dritter Ordnung $P_0 OZ$, Abb. 61, von der Gleichung:

$$z = \frac{3 q_0^2 \sin \zeta \cos \zeta}{3 q_0 \sin \zeta - r_0 \sin (\zeta - \varrho)} \qquad (55)$$

(vergl. Gleichung 54). Jede durch P_0 gelegte Gerade schneidet diese Kurve zweimal im Punkte P_0; den dritten Schnittpunkt Z,

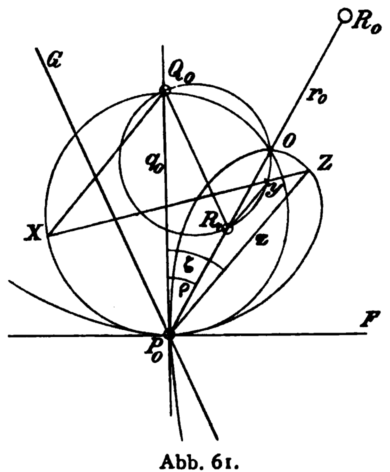


Abb. 61.

Abb. 64, bestimmt man durch die Gerade XYZ, indem man in den Kreisen P_0Q_0, Q_0R_1 die Sehnen Q_0X, R_1Y parallel zu P_0Z zieht; denn wegen Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke P_0ZX, Q_0XY ist:

$$P_0Z : P_0X = Q_0X : Q_0Y$$

oder:

$$z : q_0 \sin\zeta = q_0 \cos\zeta : q_0 \sin\zeta - \frac{r_0 \sin(\zeta - \varrho)}{3}.$$

Die zu Q_0R_1 parallel gerichtete Gerade P_0G schneidet die Kurve in ihrem unendlich fernen Punkte.

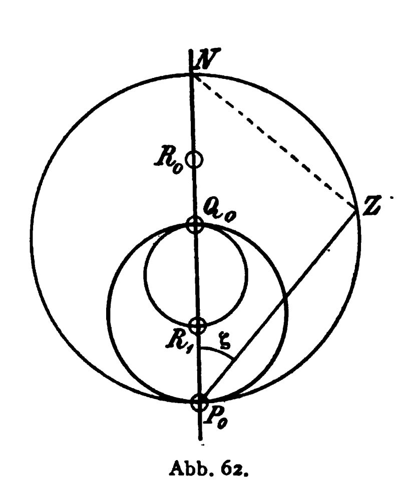


Abb. 62.

Liegt der Punkt R_0 auf der Geraden P_0Q_0 (Abb. 62), ist also der Winkel ϱ gleich null, so nimmt die Gleichung der Kurve die Form an:

$$z = \frac{3q_0^2}{3q_0 - r_0} \cos\zeta \, \frac{\sin\zeta}{\sin\zeta}. \quad (56)$$

Die Kurve zerfällt also in den Kreis P_0ZN vom Durchmesser

$$P_0N = \frac{3q_0^2}{3q_0 - r_0}$$

und die unbegrenzte Gerade P_0N, weil für ζ gleich null

$$z = \frac{0}{0},$$

also unbestimmt wird.

7. Der Fußpunkt O des von Q_0 auf die Gerade P_0R_0 gefällten Lotes Q_0O, also der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise P_0Q_0, Q_0R_1 (Abb. 59 und 61) ist der einzige Punkt der Ebene, dessen Geschwindigkeit v mit seinen beiden Beschleunigungen v', v'' in einer Geraden, der Geraden OQ_0 zusammenfällt, der also in drei aufeinanderfolgenden unendlich kleinen Zeitabschnitten in einer Geraden sich bewegt. Für diesen Punkt O ergibt Gleichung 54), ebenso wie für P_0, einen unbestimmten Wert von $\frac{r_1}{r}$.

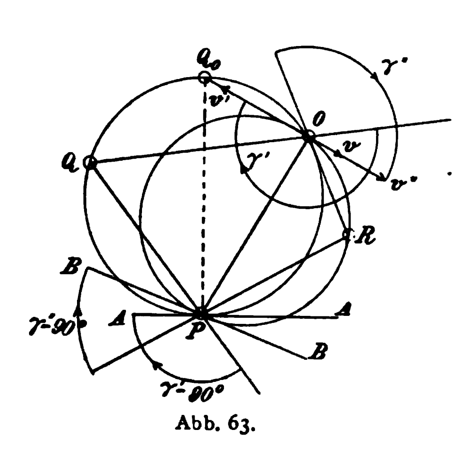


Abb. 63.

Wenn nicht die Pole der *geometrischen* Bewegung, sondern für irgend eine andere Wertgruppe ω, $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ die Pole P, Q, R und also die zugehörigen Beschleunigungswinkel γ', γ'' bekannt sind, so bestimmt man den Punkt O in folgender Weise (Abb. 63): Man zieht die beiden Geraden PA, PB, die durch die Bedingungen:

$$(QP, PA) = \gamma' \pm 90^\circ, \quad (RP, PB) = \gamma'' \pm 90^\circ$$

bestimmt sind; ferner den Kreis PQ, der die Gerade PA berührt, und den Kreis PR, der PB berührt. Der zweite Schnittpunkt der beiden Kreise ist der Punkt O; denn die Geschwindigkeit v dieses Punktes ist, ebenso wie seine beiden Beschleunigungen v', v'', normal zur Geraden PO gerichtet. Da der Pol R_0 auf der Geraden PP_0O liegt, so kann man zur Bestimmung dieses Pols die vorstehende Konstruktion in Verbindung mit *einer* der beiden nach Gleichung 49) zu berechnenden Koordinaten x_3, y_3 anwenden.

8. Im Kurbelgetriebe (Abb. 64) bewegen sich zwei Punkte Z_1 und Z_2 auf Kreisen um die Mittelpunkte K_1, K_2 und liegen also auf der Kurve P_0OZ der bewegten Ebene (Abb. 61). Daher ergeben sich die Pole P_0, Q_0, R_0 der geometrischen Bewegung in diesem Falle wie folgt. Der Pol P_0 ist der Schnitt der beiden Geraden K_1Z_1, K_2Z_2. Ferner wird der Pol Q_0 bestimmt durch die Bedingungen, daß die Projektionen Z_1A_1, Z_2A_2 der Strecken Z_1Q_0, Z_2Q_0 auf die Geraden Z_1K_1, Z_2K_2 den Sinn dieser Strecken und die Größen:

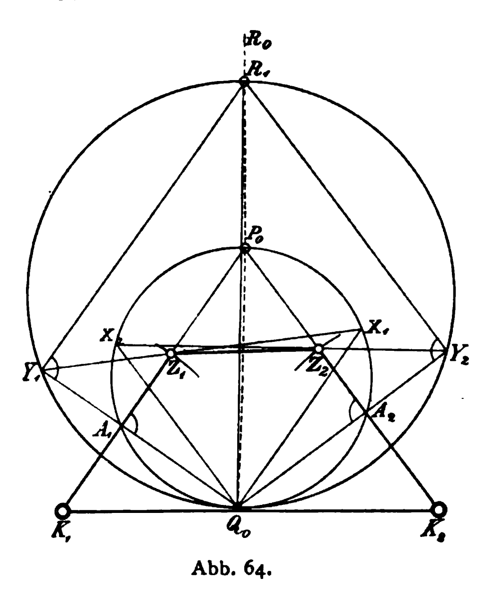


Abb. 64.

$$Z_1A_1 = \frac{\overline{P_0Z_1}^2}{Z_1K_1}, \qquad Z_2A_2 = \frac{\overline{P_0Z_2}^2}{Z_2K_2}$$

haben müssen.

Um darauf den Punkt R_1 zu bestimmen, zieht man in dem Kreise vom Durchmesser P_0Q_0 die Sehnen:

$$Q_0X_1 \parallel P_0Z_1, \quad Q_0X_2 \parallel P_0Z_2.$$

Die Punkte Y_1 und Y_2 sind die Schnitte der Geraden $Q_0 A_1$, $X_1 Z_1$ und $Q_0 A_2$, $X_2 Z_2$, und $Q_0 R_1$ ist der Durchmesser des Kreises $Q_0 Y_1 Y_2$. Endlich wird der Pol R_0 bestimmt durch die Bedingung

$$P_0 R_0 = 3\ P_0 R_1$$

(vergl. Abb. 59 und 61).

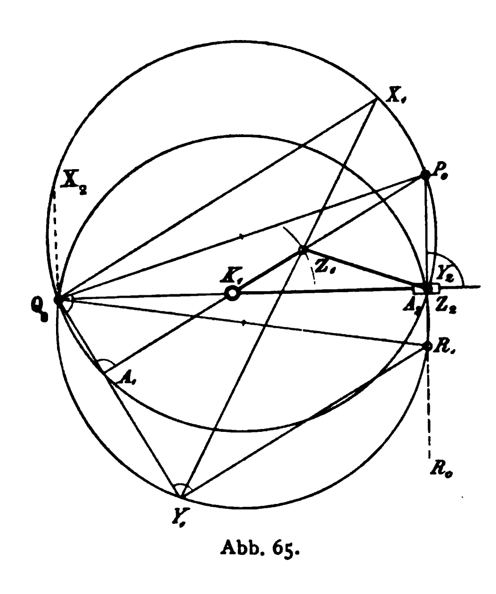


Abb. 65.

Im Falle des *Schubkurbelgetriebes* (Abb. 65) vereinfacht sich die Konstruktion dadurch, daß die Punkte A_2 und Y_2 mit Z_2 zusammenfallen.

17. Die Krümmung der Bahnen des Geschwindigkeitspols. Zur Zeit t möge der Geschwindigkeitspol der mit einem Getriebegliede starr verbundenen Ebene die Lage P_0 haben. Dieser Pol beschreibt in der ruhenden Ebene die ruhende Polbahn CP_0P_1D (Abb. 66) und zugleich in der bewegten Ebene die bewegte Polbahn EAA_1G. Zur Zeit t fällt der Punkt A der bewegten Ebene mit dem ruhenden Punkte P_0 zusammen; die unendlich kleine Strecke AA_1 dreht sich also um A. Zur Zeit $t + dt$ fällt der Punkt A_1 der bewegten Ebene mit dem festen Punkt P_1 zusammen, und AA_1 dreht sich in diesem Zeitpunkt um A_1. Man ersieht hieraus, daß die mit der bewegten Ebene EG starr verbundene Polbahn EAA_1G auf der festen Polbahn CP_0P_1D *rollt*. In den Lehrbüchern werden diese Polbahnen benutzt, um die Bewegung darzustellen und insbesondere die Krümmungen der Bahnkurven zu bestimmen. Es kommt daher in Frage, welche Beziehungen zwischen den Bahnen des Geschwindigkeitspols und den im vorigen Abschnitt benutzten Polen P_0, Q_0, R_0 der geometrischen Bewegung bestehen. Wir nehmen an, es sei gegeben: der Geschwindigkeitspol P_0, der Krümmungsmittelpunkt F der festen Polbahn und der Krümmungsmittelpunkt B der bewegten Polbahn. Das positive Vorzeichen trägt auf der Polbahnnormalen BFP_0 der Sinn BP_0, auf der Polbahntangente der durch die Bedingung

$$(BP_0, P_0H) = 90^\circ$$

bestimmte Sinn $P_0 H$. Der Krümmungshalbmesser der bewegten Polbahn

$$BP_0 = b$$

hat demnach stets einen positiven Wert, während der Krümmungshalbmesser

$$FP_0 = f$$

positiv oder negativ ist, je nachdem die beiden Polbahnen gleich oder entgegengesetzt gekrümmt sind. In der geometrischen Bewegung durchläuft die Ebene in der Zeit dt den Winkel

$$BA_1B_1 = dt.$$

Die Drehgeschwindigkeit τ des Halbmessers FP_0 der *festen* Polbahn ergibt sich demnach aus der Gleichung

$$\frac{P_0 P_1}{FP_0} = \tau\, dt =$$

$$\frac{BB_1}{FB} = \frac{b\, dt}{b - f}$$

$$\tau = \frac{b}{b - f}. \qquad (57)$$

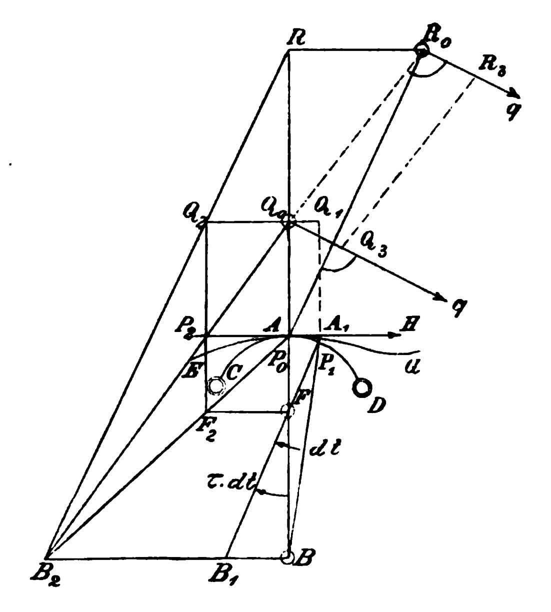


Abb. 66.

Die Drehgeschwindigkeit τ hat den positiven Sinn der Uhrzeigerbewegung, wenn algebraisch b größer als f ist. Der Pol P_0 verschiebt sich mit der Geschwindigkeit

$$p = f\tau = \frac{bf}{b - f}, \qquad (58)$$

und zwar im Sinne $P_0 H$ oder in dem negativen Sinne HP_0, je nachdem f und τ gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der Pol der Beschleunigungen erster Ordnung fällt mit dem Punkte Q_0 der bewegten Ebene zusammen, dessen Geschwindigkeit zur Zeit t nach Größe, Richtung und Sinn mit der Verschiebungsgeschwindigkeit $f\tau$ von P_0 übereinstimmt, der also in der Zeit dt den Weg

$$Q_0 Q_1 \mathrel{\underline{\underline{\|}}} P_0 P_1 = f\tau\; dt$$

zurücklegt; denn die Geschwindigkeit dieses Punktes Q_0 ändert in der Zeit dt weder ihre Richtung noch ihre Größe, weil die Drehgeschwindigkeit der Ebene die *unveränderliche* Größe $+1$ hat. Der Pol Q_0 liegt daher auf der Polbahnnormalen, und die Strecke $P_0 Q_0$ hat die *algebraische* Größe

$$P_0 Q_0 = p = f\tau = \frac{bf}{b-f}. \tag{59}$$

Die Strecke $P_0 Q_0$ hat den positiven Sinn BP_0, wenn f und τ gleiche Vorzeichen tragen.

Der Pol der Beschleunigungen *zweiter* Ordnung fällt mit dem Punkte R_0 der bewegten Ebene zusammen, dessen Geschwindigkeit zur Zeit t nach Größe, Richtung und Sinn mit der noch unbekannten Verschiebungsgeschwindigkeit q des Poles Q_0 übereinstimmt, der also in der Zeit dt den Weg

$$R_0 R_3 \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} Q_0 Q_3 = q\,dt$$

zurücklegt; denn die Beschleunigung erster Ordnung von R_0 wird zur Zeit t nach Größe, Richtung und Sinn durch die Strecke $R_0 Q_0$ und zur Zeit $t + dt$ durch $R_3 Q_3$ dargestellt; sie ändert in dieser Zeit also weder ihre Größe noch ihre Richtung. Der Punkt R_0 wird demnach bestimmt durch die Bedingungen:

$$(P_0 R_0,\ q) = 90^\circ,\ P_0 R_0 = q.$$

Der Punkt Q_0 verschiebt sich auf der Polbahnnormalen; seine Geschwindigkeit q setzt sich also zusammen aus der Geschwindigkeit $q \sin(b, q)$ des mit ihm zusammenfallenden Punktes der Polbahnnormalen und einer Verschiebungsgeschwindigkeit $q \cos(b, q)$ von der Richtung dieser Normalen. Die erstgenannte Komponente ist zur Polbahntangente parallel gerichtet und hat die algebraische Größe

$$q \sin(b, q) = FQ_0\ \tau = f(1+\tau)\tau.$$

Da der Winkel

$$(b, q) = (b, P_0 R_0) + 90^\circ$$

ist, so ist

$$q \sin(b, q) = P_0 R_0 \cos(b, P_0 R_0) = f(1+\tau)\tau,$$

d. h. die Projektion $P_0 R$ der Strecke $P_0 R_0$ auf die Polbahnnormale hat die algebraische Größe

$$P_0 R = f\tau(1+\tau).$$

Daher ist

$$Q_0 R = f\tau^2 = \frac{fb^2}{(b-f)^2}. \tag{60}$$

Die *zweite* Komponente der Geschwindigkeit q oder die Verschiebungsgeschwindigkeit des Punktes Q_0 auf der Polbahnnormalen $P_0 Q_0$ hat die Größe

$$q \cos(b, q) = \frac{dp}{dt},$$

weil die veränderliche Strecke $P_0 Q_0$ gleich p ist. Durch Differenzieren des Wertes von p aus Gleichung 59) folgt:

$$q \cos(b, q) = \frac{1}{(b-f)^2}\left(b^2 \frac{df}{dt} - f^2 \frac{db}{dt}\right).$$

Die Geschwindigkeiten $\frac{df}{dt}$ und $\frac{db}{dt}$, mit welchen die Krümmungshalbmesser der festen und der beweglichen Polbahn ihre Längen ändern, können bestimmt werden, wenn die Krümmungshalbmesser

$$f_1 = FF_1 \quad \text{und} \quad b_1 = BB_1$$

(Abb. 67) der Evoluten dieser Bahnen gegeben sind. Wir legen den Strecken FF_1 und BB_1 das positive Vorzeichen bei, wenn sie den Sinn $P_0 H$ haben. Die Drehgeschwindigkeiten der beiden Halbmesser f und b haben in positivem Sinne die Werte $\frac{p}{f}$ und $\frac{p}{b}$; daher ist

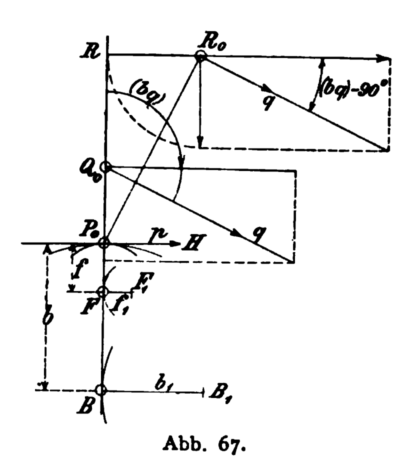


Abb. 67.

$$df = -f_1 \frac{p}{f}\,dt = -\frac{bf_1}{b-f}\,dt \quad \text{und} \quad db = -b_1 \frac{p}{b}\,dt = -\frac{fb_1}{b-f}\,dt$$

und

$$RR_0 = q \cos(b, q) = \frac{f^3 b_1 - b^3 f_1}{(b-f)^3}. \tag{61}$$

Wir entnehmen aus den Gleichungen 57), 59), 60) die folgenden Beziehungen:

$$\tau = \frac{BP_0}{BF} = \frac{P_0 Q_0}{FP_0} = \frac{Q_0 R}{P_0 Q_0} = \frac{BQ_0}{BP_0} = \frac{BR}{BQ_0} \tag{62}$$

und

$$BF : BP_0 : BQ_0 : BR = 1 : \tau : \tau^2 : \tau^3. \tag{63}$$

In dieser geometrischen Reihe sind je zwei aufeinanderfolgende Strecken dem Sinne nach gleich oder entgegengesetzt, je

nachdem τ positiv oder negativ ist. Die geometrische Bedeutung der vorstehenden Gleichungen wird durch Abb. 66 dargestellt. Trägt man die drei gleich großen und gleich gerichteten Strecken FF_2, P_0P_2, Q_0Q_2 auf, so schneiden sich die drei Geraden P_0F_2, Q_0P_2, RQ_2 in einem Punkte B_2 der zu FF_2 parallel gerichteten Geraden BB_2.

Sind von den fünf Punkten B, F, P_0, Q_0, R entweder B, F, P_0 oder P_0, Q_0, R bekannt, so können hiernach die beiden anderen Punkte bestimmt werden. Es ist aber zu beachten, daß durch die drei Punkte B, F, P_0 wohl der Punkt R, nicht aber der Pol R_0 bestimmt wird. Zur Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte der Bahnevoluten genügen also nicht die drei Punkte B, F, P_0, wohl aber die drei Pole P_0, Q_0, R_0.

18. Beispiele zum Abschnitt 17.

Beispiel 1. Auf dem festen Kreise P_0H, Abb. 68, rollt die Gerade NP_0, mit welcher der Punkt Z starr verbunden ist. Es sind die Krümmungshalbmesser ZK und KM der Bahnkurve des Punktes Z und ihrer Evolute zu bestimmen.

Durch vorstehende Angaben sind gegeben: Die Krümmungshalbmesser der Polbahnen und ihrer Evoluten:

$$b = P_0B = \infty,\ f = FP_0,$$
$$b_1 = f_1 = 0.$$

Nach den Gleichungen 57) bis 61) ist also

$$\tau = \frac{b}{b-f} = +1$$

$$P_0Q_0 = f\tau = +f = FP_0$$

$$Q_0R = f\tau^2 = +f = FP_0$$

$$RR_0 = \frac{f^3b_1 - b^3f_1}{(b-f)^3} = 0.$$

Folglich ist

$$P_0R_0 = 2f = 2FP_0$$

und

$$P_0R_1 = \frac{2}{3}FP_0.$$

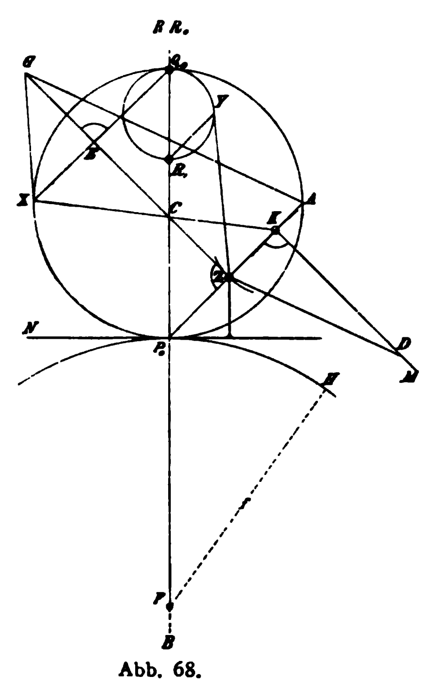


Abb. 68.

Nachdem die Kreise P_0Q_0, Q_0R_1 aufgetragen sind, zieht man nach Anleitung der Abb. 59:

$$Q_0X \parallel R_1Y \parallel P_0Z$$
$$ZCEG \perp P_0Z$$
$$XG \parallel ZY.$$

Die Gerade XCK bestimmt den Krümmungsmittelpunkt K der Bahn des Punktes Z. Man zieht dann

$$KD \perp P_0Z, \quad ZD \parallel GA$$

und bestimmt nach der Bedingung

$$KM = 3\,KD$$

den Krümmungsmittelpunkt M der Bahnevolute.

Beispiel 2. Die drei Punkte Z, Z_1, Z_2 in Abb. 69 sind miteinander starr verbunden; Z_1 und Z_2 bewegen sich auf zwei zueinander rechtwinklig gerichteten Geraden FZ_1, FZ_2. Zu bestimmen sind die Krümmungshalbmesser KZ und MK der Bahn des Punktes Z und ihrer Evolute.

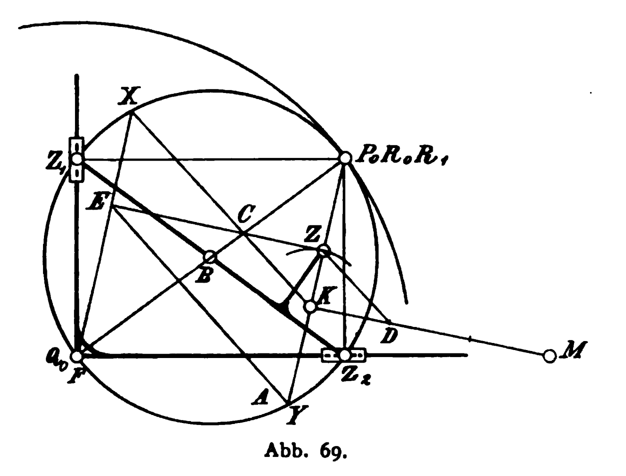


Abb. 69.

Der Pol P_0 ist der Schnitt der beiden Geraden

$$Z_1P_0 \perp Z_1F$$
$$Z_2P_0 \perp Z_2F.$$

Der Pol Q_0 fällt auf den festen Punkt F, weil die Beschleunigungen Z_1Q_0, Z_2Q_0 der Punkte Z_1, Z_2 die Richtungen ihrer *geraden* Bahnen FZ_1, FZ_2 haben müssen.

Bei der Bewegung der Ebene ZZ_1Z_2 ändert sich weder die Länge

$$FP_0 = Z_1Z_2,$$

noch die Länge

$$FB = \frac{1}{2}\,Z_1Z_2.$$

Daher ist der Kreis vom Halbmesser FP_0 die *feste*, und der Kreis vom Durchmesser FP_0 die *bewegte* Polbahn. Demnach ist

$$BP_0 = \frac{1}{2} FP_0 \text{ oder } b = \frac{1}{2} f$$

und

$$b_1 = f_1 = 0.$$

Die Gleichungen 57), 60), 61) ergeben hiernach:

$$\tau = \frac{b}{b - f} = -1$$

$$Q_0 R = f \tau^2 = + f$$

und

$$RR_0 = \frac{f^3 b_1 - b^3 f_1}{(b - f)^3} = 0.$$

Es fallen also zusammen: die Punkte R_0 und R_1 mit P_0 und der Kreis $Q_0 R_1$ mit dem Kreise $Q_0 P_0$. Die Konstruktion der Abb. 69 gestaltet sich nun, wie folgt:

$$Q_0 EX \parallel P_0 ZKA$$

$$ZCE \perp P_0 Z.$$

Die Gerade XC bestimmt dann durch ihren Schnitt mit $P_0 Z$ den Krümmungsmittelpunkt K der Bahn des Punktes Z. Da die beiden Kreise $Q_0 R_1$ und $Q_0 P_0$ sich decken, so fällt der Punkt Y mit A und G mit E zusammen (vergl. Abb. 59). Um den Krümmungsmittelpunkt M der Bahnevolute zu bestimmen, ist also nur noch

$$KD \perp P_0 Z$$

$$ZD \parallel EA$$

zu ziehen, und darauf

$$KM = 3\, KD$$

aufzutragen.

Beispiel 3. Wenn für zwei Punkte Z_1, Z_2 der bewegten Ebene (Abb. 70) die Krümmungsmittelpunkte K_1, K_2, M_1, M_2 der Bahnen und der Bahnevoluten gegeben sind, so können unabhängig voneinander die Pole P_0, Q_0, R_0 der geometrischen Bewegung und die Krümmungsmittelpunkte B, F der bewegten und der festen Polbahn in folgender Weise bestimmt werden.

1. *Die Pole* P_0, Q_0, R_0. Die Bestimmung der Punkte P_0, Q_0 wurde bereits im Abschnitt 16, 8 beschrieben: P_0 ist der Schnitt-

punkt der beiden Geraden $Z_1 K_1$, $Z_2 K_2$, und um Q_0 zu bestimmen, sind die Strecken

$$Z_1 A_1 = \frac{\overline{P_0 Z_1}^2}{K_1 Z_1} = \frac{216^2}{432} = 108 \text{ cm}$$

$$Z_2 A_2 = \frac{\overline{P_0 Z_2}^2}{K_2 Z_2} = \frac{312^2}{468} = 208 \text{ cm}$$

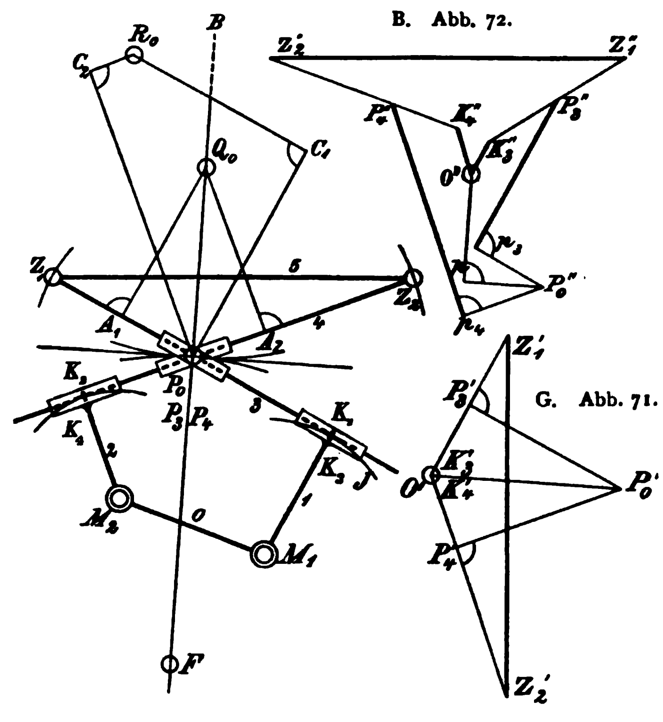
im Sinne von $Z_1 K_1$, $Z_2 K_2$ aufzutragen und darauf die Geraden

$$A_1 Q_0 \perp Z_1 K_1, \quad A_2 Q_0 \perp Z_2 K_2$$

zu ziehen.

Um den Pol R_0 zu bestimmen, berechnet man für jeden der beiden Punkte Z_1, Z_2 nach Gleichung 54) die Strecke

$$r_0 \sin(\zeta - \varrho) = \frac{3(q_0 \cos \zeta - z)}{z} \left\{ \frac{r_1}{3r} (q_0 \cos \zeta - z) - q_0 \sin \zeta \right\},$$



L. Abb. 70.

also die Abstände des Punktes R_0 von den beiden Geraden $P_0 Z_1$ und $P_0 Z_2$. Gegeben ist für den Punkt Z_1:

$$z = P_0 Z_1 = + 216 \text{ cm}$$
$$r = Z_1 K_1 \cos (P_0 Z_1, Z_1 K_1) = - 432 \text{ cm}$$
$$r_1 = K_1 M_1 \sin (P_0 Z_1, K_1 M_1) = - 180 \text{ cm}$$
$$q_0 \cos \zeta = P_0 Q_0 \cos (P_0 Q_0, P_0 Z_1) = + 108 \text{ cm}$$
$$q_0 \sin \zeta = P_0 Q_0 \sin (P_0 Q_0, P_0 Z_1) = - 222 \text{ cm};$$

ferner für den Punkt Z_2:

$$z = P_0 Z_2 = + 312 \text{ cm}$$
$$r = Z_2 K_2 \cos (P_0 Z_2, Z_2 K_2) = - 468 \text{ cm}$$
$$r_1 = K_2 M_2 \sin (P_0 Z_2, K_2 M_2) = + 144 \text{ cm}$$
$$q_0 \cos \zeta = P_0 Q_0 \cos (P_0 Q_0, P_0 Z_2) = + 104 \text{ cm}$$
$$q_0 \sin \zeta = P_0 Q_0 \sin (P_0 Q_0, P_0 Z_2) = + 224 \text{ cm}.$$

Setzt man diese gegebenen Werte ein, so ergibt sich für den Punkt Z_1:

$$r_0 \sin (\zeta - \varrho) = - 312 \text{ cm}$$

und für Z_2:

$$r_0 \sin (\zeta - \varrho) = + 406 \text{ cm}.$$

Da $r_0 \sin (\zeta - \varrho)$ für den Punkt Z_1 negativ und für Z_2 positiv ist, so liegt R_0 rechts von der Strecke $P_0 Z_1$ und links von der Strecke $P_0 Z_2$. Demnach wurden

$$(P_0 Z_1, P_0 C_1) = 90^\circ, \quad P_0 C_1 = 312 \text{ cm}$$
$$(P_0 Z_2, P_0 C_2) = 270^\circ, \quad P_0 C_2 = 406 \text{ cm}$$

aufgetragen und dann die Geraden

$$C_1 R_0 \perp P_0 C_1, \quad C_2 R_0 \perp P_0 C_2$$

gezogen.

2. *Die Punkte B und F.* Man bildet das Getriebe $M_1 K_1 Z_1 Z_2 K_2 M_2$ aus den sechs Gliedern $M_1 M_2$, $M_1 K_1$, $M_2 K_2$, $K_1 Z_1$, $K_2 Z_2$, $Z_1 Z_2$, die in dieser Reihenfolge mit den Nummern 0 bis 5 bezeichnet sind. Das Glied 0 ruht; die Glieder 1, 3 und 2, 4 sind durch Schieber miteinander verbunden. Die Stäbe 3, 4 sind an ihrer Kreuzungsstelle durch zwei Schieber geführt, die durch ein Gelenk P_0 miteinander verbunden sind. Wenn die Gelenke Z_1, Z_2 auf ihren gegebenen Bahnen geführt werden, so beschreibt das Gelenk P_0 die feste Polbahn des Gliedes 5, also der Ebene $Z_1 Z_2$. Zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes F dieser Polbahn sind demnach nur die Geschwindigkeit p und die Normalbeschleunigung n' des Gelenkes P_0 erforderlich. Wir erteilen dem Gliede 5 die geometrische Bewegung, setzen also seine Drehgeschwindigkeit gleich $+ 1$, seine

Drehbeschleunigung gleich null. Im Geschwindigkeitsplan, Abb. 71, ist hierdurch die Strecke $Z'_1 Z'_2$ bestimmt durch die Bedingungen:

$$(Z_1 Z_2,\ Z'_1 Z'_2) = 90^\circ, \quad Z'_1 Z'_2 = Z_1 Z_2.$$

Die Punkte K_3, K_4 der Stäbe 3, 4, die zur Zeit t mit den Krümmungsmittelpunkten K_1, K_2 zusammenfallen, ruhen in diesem Zeitpunkt. Die Punkte K'_3, K'_4 fallen also mit dem Pol O' des Geschwindigkeitsplans zusammen und werden durch die Bedingungen:

$$Z'_1 O' \perp Z_1 K_3, \quad Z'_2 O' \perp Z_2 K_4$$

bestimmt. Die Geschwindigkeit $O' P'_0$ des Gelenkes P_0 kann zerlegt werden in die Geschwindigkeit $O' P'_3$ des vom Gelenk P_0 gedeckten Punktes P_3 des Stabes 3 und der Geschwindigkeit $P'_3 P'_0$, womit der Schieber auf dem Stabe 3 sich bewegt. Sie kann ferner zerlegt werden in die Geschwindigkeit $O' P'_4$ des vom Gelenk gedeckten Punktes P_4 des Stabes 4 und der Verschiebungsgeschwindigkeit $P'_4 P'_0$ des Schiebers auf diesem Stabe. Demnach wird die Polgeschwindigkeit

$$p = O' P'_0$$

bestimmt durch die Bedingungen:

$$K'_3 P'_3 Z'_1 \approxeq K_3 P_3 Z_1$$
$$K'_4 P'_4 Z'_2 \approxeq K_4 P_4 Z_2$$
$$P'_3 P'_0 \parallel K_1 Z_1, \quad P'_4 P'_0 \parallel K_2 Z_2.$$

Wie oben gezeigt ist (Gleichung 59), bestimmt die Polgeschwindigkeit p die Lage des Beschleunigungspols Q_0 im Lageplan:

$$(P_0 Q_0,\ O' P'_0) = 90^\circ, \quad P_0 Q_0 = O' P'_0 = p.$$

Im Beschleunigungsplan, Abb. 72, ist, da die Drehbeschleunigung des Gliedes 5 gleich null ist:

$$(Z''_1 Z''_2,\ Z_1 Z_2) = 180^\circ, \quad Z''_1 Z''_2 = Z_1 Z_2,$$

und der mit O'' bezeichnete Pol ergibt sich aus der Bedingung:

$$O'' Z''_1 Z''_2 \cong Q_0 Z_1 Z_2.$$

Die Beschleunigung des von K_1 gedeckten Punktes K_3 läßt sich nach dem zweiten Verfahren des Abschnittes 9, jedoch einfacher noch durch folgende Ueberlegung ermitteln. Zur Zeit t ruht der Punkt K_3; zur Zeit $t + dt$ ist der Punkt J des Stabes Berührungspunkt der Evolute, und die Strecke $K_3 J$ hat die Länge

$$K_3 J = M_1 K_1 \cdot \frac{O' Z'_1}{K_3 Z_1} dt,$$

da der Stab 3 in positivem Sinne mit der Drehgeschwindigkeit $\dfrac{O' Z'_1}{K_3 Z_1}$ sich bewegt. Die unendlich kleine Geschwindigkeit des Punktes K_3

hat zur Zeit $t + dt$ demnach Richtung und Sinn der Strecke $M_1 K_1$ und die Größe

$$K_3 J \frac{O' Z'_1}{K_3 Z_1} dt = M_1 K_1 \left(\frac{O' Z'_1}{K_3 Z_1}\right)^2 dt.$$

Daher hat die Beschleunigung $O'' K''_3$ des Punktes K_3 zur Zeit t Richtung und Sinn von $M_1 K_1$ und die Größe:

$$O'' K''_3 = M_1 K_1 \left(\frac{O' Z'_1}{K_3 Z_1}\right)^2 = 180 \left(\frac{216}{432}\right)^2 = 45 \text{ cm sek}^{-2}.$$

Ebenso hat die Beschleunigung $O'' K''_4$ des von K_2 gedeckten Punktes K_4 des Stabes 4 Richtung und Sinn von $M_2 K_2$ und die Größe:

$$O'' K''_4 = M_2 K_2 \left(\frac{O' Z'_2}{K_4 Z_2}\right)^2 = 144 \left(\frac{312}{468}\right)^2 = 64 \text{ cm sek}^{-2}.$$

Die Beschleunigung $O'' P''_0$ des Gelenkes P_0 wird nach Abschnitt 9 bestimmt:

$$K''_3 P''_3 Z''_1 \approx K_3 P_3 Z_1$$

$$K''_4 P''_4 Z''_2 \approx K_4 P_4 Z_2$$

$$(P'_3 P'_0,\ P''_3 p_3) = (P_3 Z_1,\ P'_3 Z'_1) = 90^\circ$$

$$P''_3 p_3 = 2\ P'_3 P'_0 \frac{O' Z'_1}{K_1 Z_1} = 2 \,.\, 222 \frac{216}{432} = 222 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$(P'_4 P'_0,\ P''_4 p_4) = (P_4 Z_2,\ P'_4 Z'_2) = 90^\circ$$

$$P''_4 p_4 = 2\ P'_4 P'_0 \frac{O' Z'_2}{K_2 Z_2} = 2 \,.\, 224 \frac{312}{468} = 299 \text{ cm sek}^{-2}$$

$$p_3 P''_0 \perp P''_3 p_3,\quad p_4 P''_0 \perp P''_4 p_4.$$

Die Projektion $O'' p$ der Beschleunigung $O'' P''_0$ des Gelenkes P_0 auf die Pohlbahnnormale BF hat die Größe:

$$n' = O'' p = 146 \text{ cm sek}^{-2}.$$

Der Krümmungshalbmesser $P_0 F$ der festen Polbahn hat den Sinn $O'' p$ und nach Gleichung 34) die Größe:

$$f = P_0 F = \frac{(O' P'_0)^2}{O'' p} = \frac{248^2}{146} = 421 \text{ cm sek}^{-2}.$$

Der Krümmungshalbmesser b der bewegten Polbahn ergibt sich darauf nach Gleichung 59):

$$b = P_0 B = \frac{p f}{p - f} = \frac{248 \,.\, 421}{248 - 421} = -\ 603 \text{ cm}.$$

Da die Vorzeichen von f und b verschieden sind, so sind die beiden Polbahnen entgegengesetzt gekrümmt; $P_0 B$ hat also den Sinn $F P_0$.

Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der beiden Glieder 1 und 2 brauchten für den vorliegenden Zweck nicht bestimmt zu werden.

Zweiter Teil.

Die Kinetik ebener Getriebe.

19. Das Gesetz der Bewegung eines Getriebes. Im Abschnitt 10 dieser Abhandlung wurde angegeben, wie die Beschleunigungen aller Teile eines Getriebes auf geometrischem Wege bestimmt werden, wenn für den betreffenden Zeitpunkt bekannt sind: der Lageplan, der Geschwindigkeitsplan und außerdem die Drehbeschleunigung *eines* Gliedes, das als das *geführte* Glied des Getriebes bezeichnet wurde. Die zuletzt genannte Größe ist aber in der Regel nicht gegeben, sondern sie ist aus den auf das Getriebe einwirkenden Kräften K zu bestimmen. Das Prinzip d'Alemberts, das in Verbindung mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zu diesem Zwecke benutzt werden kann, spricht aus, daß die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte K ebenso groß ist wie die gleichzeitige Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte

$$V = mv'_1,$$

die allen Massenpunkten m des Getriebes ihre Beschleunigungen v'_1 erteilen. Unter Arbeitsgeschwindigkeit einer Kraft K versteht man das Produkt aus der Größe der Kraft und ihrer Schubgeschwindigkeit, d. h. der Projektion $v_1 \cos(v_1, K)$ der Geschwindigkeit v_1 irgend eines Punktes der Kraftachse auf die Kraftrichtung (I, 12). Das Vorzeichen der Arbeitsgeschwindigkeit wird durch den Kosinus des Winkels (v_1, K) bestimmt. Jenem Prinzip zufolge ist also für jeden Zeitpunkt:

$$\Sigma K v_1 \cos(v_1, K) = \Sigma V v_1 \cos(v_1, V), \tag{64}$$

wenn diese Summen auf alle Kräfte K, V ausgedehnt werden, die bei der Bewegung des Getriebes Arbeit verrichten. Die Gleichung 64) enthält das Bewegungsgesetz eines jeden Getriebes.

20. Die Zerlegung der Bewegung des Getriebes. Die hier betrachtete und mit I bezeichnete Bewegung des Getriebes wird während zwei unendlich kleiner Zeitteilchen bestimmt durch die bekannte Drehgeschwindigkeit ω_{11} und durch die unbekannte Drehbeschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes 1. Wir zerlegen diese Bewegung I in eine bekannte Bewegung II und eine unbekannte Be-

wegung III. In der Bewegung II hat das geführte Glied 1 dieselbe Drehgeschwindigkeit wie in der Bewegung I:

$$\omega_{12} = \omega_{11},$$

dagegen eine Drehbeschleunigung

$$\omega'_{12} = 0.$$

Daher erhält das geführte Glied in der Bewegung III die Drehgeschwindigkeit

$$\omega_{13} = 0$$

und die Drehbeschleunigung

$$\omega'_{13} = \omega'_{11}.$$

Wir bezeichnen in den drei Bewegungen I, II, III für einen Massenpunkt m des Getriebes die Geschwindigkeiten mit v_1, v_2, v_3, die Beschleunigungen mit v'_1, v'_2, v'_3 und haben zu beachten, daß für jeden Punkt

$$v_2 \ddagger v_3 \equiv v_1$$

und

$$v'_2 \ddagger v'_3 = v'_1$$

ist. Da die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_2 und mv'_3 zusammen so groß ist wie die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_1, so erhält Gleichung 64) die Form:

$$\Sigma m v'_3 v_1 \cos(v_1, v'_3) = \Sigma K v_1 \cos(v_1, K) - \Sigma m v'_2 v_1 \cos(v_1, v'_2). \quad (65)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist durch die gegebenen Größen bestimmt; nur die linke Seite, d. h. die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_3, ist abhängig von der unbekannten Drehbeschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes.

21. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_3. Die Bewegung III ist eine *Anfangsbewegung*, d. h. im Anfang des in Betracht gezogenen unendlich kleinen Zeitabschnittes dt ruht das Getriebe, weil ω_{13} gleich null ist. Am *Ende* dieses Zeitabschnitts hat das geführte Glied 1 die *Drehgeschwindigkeit*

$$\omega'_{13}\, dt = \omega'_{11}\, dt,$$

und ein Massenpunkt m, dessen Beschleunigung gleich v'_3 ist, erhält die Geschwindigkeit

$$v_3 = v'_3\, dt.$$

Daher ist

$$v'_3\, dt : v_1 = \omega'_{11}\, dt : \omega_{11}.$$

Für jeden Massenpunkt ist also

$$v'_3 = v_1 \frac{\omega'_{11}}{\omega_{11}}. \quad (66)$$

Die Beschleunigung v'_3 des Punktes m hat die *Richtung* seiner Geschwindigkeit v_1 in der Bewegung I und stimmt dem *Sinne* nach mit ihr überein, wenn die Drehgeschwindigkeit ω_{11} und die Drehbeschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes gleiche Vorzeichen haben. Sind diese Vorzeichen verschieden, so sind die Beschleunigungen v'_3 den Geschwindigkeiten v_1 dem Sinne nach entgegengesetzt. Demnach hat die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_3 den algebraischen Wert

$$\Sigma m v'_3 v_1 \cos(v_1, v'_3) = \frac{\omega'_{11}}{\omega_{11}} \Sigma m v_1^2. \tag{67}$$

Die unbekannte Drehbeschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes ergibt sich aus den Gleichungen 65) und 67):

$$\omega'_{11} = \omega_{11} \frac{\Sigma K v_1 \cos(v_1, K) - \Sigma m v'_2 v_1 \cos(v_1, v'_2)}{\Sigma m v_1^2}. \tag{68}$$

Die Summenwerte auf der rechten Seite dieser Gleichung müssen zunächst für jedes Glied des Getriebes und darauf durch Summierung für das ganze Getriebe berechnet werden.

22. Die Summe $\Sigma m v_1^2$ für ein Getriebeglied. Durch den Geschwindigkeitsplan der Bewegung I des Getriebes ist die Drehgeschwindigkeit ω des Gliedes und der Geschwindigkeitspol P seines Lageplans bekannt. Bezeichnet z den Abstand eines Massenpunktes m von der durch den Pol P gelegten Drehachse, so ist

$$v_1 = z\omega,$$

also

$$\Sigma m v_1^2 = \omega^2 \Sigma m z^2.$$

Das Trägheitsmoment $\Sigma m z^2$ des Getriebegliedes in bezug auf seine Polachse P wird man in der Regel vermittels des Trägheitsmomentes mi^2 in bezug auf die gleichgerichtete Schwerpunktsachse bestimmen. Bezeichnet man mit $\bar{z}$ den Abstand $\overline{PS}$ des Schwerpunktes S des Gliedes von seiner Polachse P und mit $\bar{m}$ die Masse des ganzen Gliedes, so ist nach Abhandlung III, 17:

$$\Sigma m z^2 = \bar{m}(i^2 + \bar{z}^2),$$

folglich

$$\Sigma m v_1^2 = \bar{m}(i^2 + \bar{z}^2)\omega^2. \tag{69}$$

23. Die Resultante V_2 der Kräfte mv'_2 für ein Getriebeglied. Durch den Geschwindigkeitsplan und den Beschleunigungsplan der Bewegung II ist für jedes Glied bekannt: die Drehgeschwindigkeit ω_2, die Drehbeschleunigung ω'_2 und der Beschleunigungspol Q des Lageplans. Wir erinnern daran, daß die Ge-

schwindigkeitspläne der beiden Bewegungen I und II übereinstimmen, weil
$$\omega_{11} = \omega_{12}$$
ist. Wir nehmen ferner an, daß das Getriebeglied in bezug auf die Bildebene symmetrisch geformt ist, so daß alle Massenpunkte des Gliedes in die Bildebene verlegt werden können. Die Lage der Massenpunkte wird in Abb. 73 auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt mit dem Schwerpunkt S des Gliedes, und dessen x-Achse auch dem Sinne nach mit der Strecke SQ von der Länge q zusammenfällt. Der Winkel (y, x) ist gleich 90 Grad. Der Abstand MQ des Massenpunktes M vom Beschleunigungspol Q wird mit z bezeichnet.

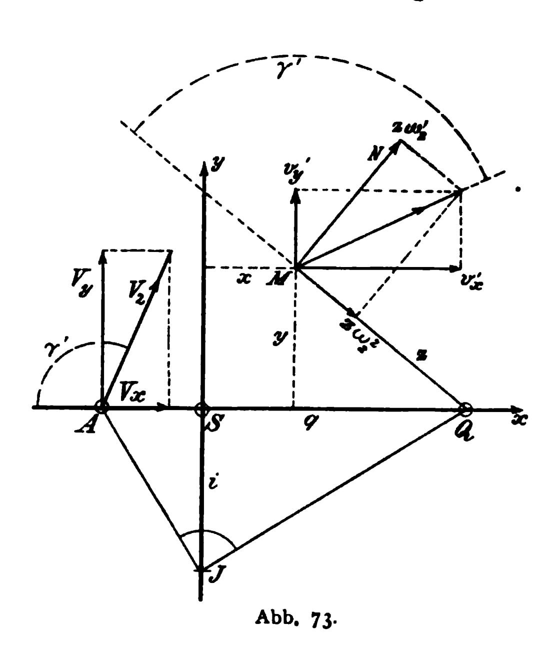


Abb. 73.

Nach Abschnitt 7 setzt sich die Kraft mv'_2 zusammen aus zwei Komponenten $m_z\omega_2^2$ und $m_z\omega'_2$. Die erste hat Richtung und Sinn der Strecke MQ, während die Richtung MN der zweiten Komponente mit der Strecke MQ den Winkel
$$(MN, MQ) = 90^\circ \text{ oder } (MN, MQ) = 270^\circ$$
einschließt, je nachdem die Drehbeschleunigung ω'_2 des Gliedes einen positiven oder einen negativen Wert hat. Demnach ist, wenn die Projektionen der Kraft mv'_2 auf die Koordinatenachsen mit mv'_x und mv'_y bezeichnet werden (Abb. 73):
$$\left.\begin{aligned} mv'_x &= m\omega_2^2(q-x) + m\omega'_2 y \\ mv'_y &= -m\omega_2^2 y + m\omega'_2(q-x) \end{aligned}\right\}. \qquad (70)$$
Die zu den Koordinatenachsen parallel gerichteten Komponenten V_x und V_y der Resultanten V_2 haben daher die Größen
$$\left.\begin{aligned} V_x &= \Sigma mv'_x = \overline{m}\omega_2^2 q \\ V_y &= \Sigma mv'_y = \overline{m}\omega'_2 q \end{aligned}\right\}, \qquad (71)$$
wobei man beachten muß, daß
$$\Sigma mx = \Sigma my = 0$$

ist, weil der Anfangspunkt der Koordinaten auf dem Schwerpunkt des Getriebegliedes liegt. Die Gleichungen 71) sprechen aus, daß die Resultante V_2 Richtung und Sinn der Beschleunigung $\overline{v'}_2$ des Schwerpunktes S und die Größe

$$V_2 = \overline{m}\,\overline{v'}_2$$

hat. Die *Lage* dieser Kraft bestimmt man durch die Abszisse

$$SA = x_2$$

ihres Schnittpunktes A mit der x-Achse, und zwar vermittels der Momentengleichung in bezug auf den Schwerpunkt:

$$-x_2 V_y = -x_2 \overline{m}\omega'_2 q = \Sigma y m v'_x - \Sigma x m v'_y = \omega'_2 \Sigma m (x^2 + y^2)$$
$$= \overline{m}\omega'_2 i^2$$

oder

$$x_2 = -\frac{i^2}{q}. \tag{72}$$

Man hat also, um auf geometrischem Wege den Punkt A zu bestimmen, normal zu QS die Strecke

$$SJ = i$$

aufzutragen und JA normal zu QJ zu ziehen.

24. Die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte K und mv'_2 bei reibungsloser Bewegung des Getriebes. Die auf ein starres Getriebeglied wirkenden Kräfte haben dieselbe Arbeitsgeschwindigkeit wie ihre Resultante. Da in Gleichung 68) die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte mv'_2 das *negative* Vorzeichen trägt, so sind für jedes Glied die äußeren Kräfte K mit der *gewendeten* Kraft V_2 zu ihrer Resultanten R zusammenzusetzen. Die Schubgeschwindigkeit r der Kraft R ist aus dem Geschwindigkeitsplan der Bewegung I zu entnehmen; sie ist positiv, wenn sie den Sinn von R hat. Die Summe der Produkte Rr für alle Glieder des Getriebes bestimmt die Arbeitsgeschwindigkeit der Kräfte K und mv'_2:

$$\Sigma K v_1 \cos(v_1, K) - \Sigma m v'_2 v_1 \cos(v_1, v'_2) = \Sigma Rr. \tag{73}$$

Es ist zu beachten, daß bei reibungsloser Bewegung des Getriebes die Gelenkkräfte, d. h. die Kräfte, die in den Gelenken von den Gliedern aufeinander übertragen werden, keine Arbeit verrichten, und daß also diese Kräfte bei der obigen Zusammensetzung *nicht* in Betracht kommen.

Bei reibungsloser Bewegung ist die Beschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes nach den Gleichungen 68) und 73):

$$\omega'_{11} = \omega_{11}\frac{\Sigma Rr}{\Sigma m v_1^2}. \tag{74}$$

25. **Die Gelenkkräfte bei reibungsloser Bewegung eines Getriebes.** Es möge zunächst an einem Beispiel der Rechnungsgang zur Bestimmung der Gelenkkräfte beschrieben werden. Das in Abb. 74 dargestellte Getriebe besteht aus sechs mit den Nummern 0 bis 5 bezeichneten Gliedern. Das ruhende Glied 0 hat bei B ein festes und bei A ein auf gegebener Bahn reibungslos bewegliches Auflager. Die Stützkraft A enthält, da ihre Lage gegeben ist, nur *eine* unbekannte Größe, die Stützkraft B dagegen zwei, etwa ihre Projektionen B_x und B_y auf zwei Koordinatenachsen. Nachdem die Drehbeschleunigung ω'_{11} des geführten Gliedes 1 nach Gleichung 74) bestimmt worden ist, kann der Beschleunigungsplan der Bewegung I gebildet werden. Darauf kann man für jedes Glied 1, 2, 3 . . . die *gegebenen* äußeren Kräfte K mit den gewendeten Kräften mv'_1 zu ihrer Resultanten S_1, S_2, S_3 . . . zusammensetzen. Für das ruhende Glied 0 besteht die Kraft S_0 nur aus dem Gewichte des Gliedes, das seiner Kleinheit wegen hier vernachlässigt worden ist.

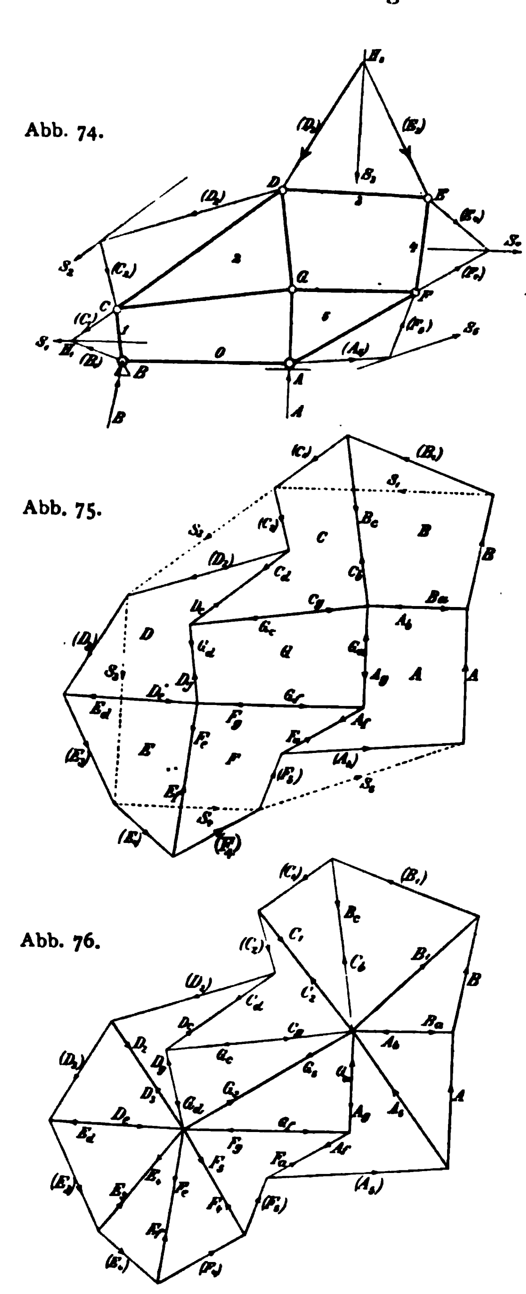


Abb. 74.

Abb. 75.

Abb. 76.

Wir bezeichnen jede Gelenkkraft mit dem Buchstaben des Gelenkes und der Nummer des Gliedes: C_2 bezeichnet demnach die Kraft, die vom Gelenkbolzen C auf das Glied 2 übertragen wird.

Nach dem Prinzip d'Alemberts befindet sich jedes der fünf bewegten Glieder im Gleichgewicht unter Einwirkung der sämtlichen auf das starre Glied wirkenden äußeren Kräfte und der gewendeten Kräfte mv'_1. Diese Kräftegruppe besteht aus der Kraft S und den auf das Glied übertragenen Gelenkkräften. Die fünf bewegten Glieder stehen also unter Einwirkung der folgenden fünf Gleichgewichtsgruppen:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \equiv S_1 \ddagger B_1 \ddagger C_1 \\ 0 \equiv S_2 \ddagger C_2 \ddagger D_2 \ddagger G_2 \\ 0 \equiv S_3 \ddagger D_3 \ddagger E_3 \\ 0 \equiv S_4 \ddagger E_4 \ddagger F_4 \\ 0 \equiv S_5 \ddagger F_5 \ddagger A_5 \ddagger G_5. \end{array}\right\} \qquad (75)$$

Das ruhende Glied 0 befindet sich ferner im Gleichgewicht unter Einwirkung der Stützkräfte A, B und der gewendeten Gelenkkräfte A_5 und B_1, d. h. der Kräfte, die von den Gliedern 5 und 1 auf die Gelenke A und B übertragen werden:

$$0 \equiv A \ddagger B +\!\!+ A_5 +\!\!+ B_1. \qquad (76)$$

Jede der sechs Gleichgewichtsbedingungen 75) und 76) wird ausgedrückt durch 3 Gleichungen, da die Gleichgewichtsgruppen aus Kräften bestehen, die in einer Ebene liegen und nicht in einem Punkte sich schneiden. Es ergeben sich demnach im vorliegenden Beispiel 18 Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Größen.

Wenn man die Massen der bewegten Gelenkbolzen C, D, E, F, G vernachlässigt, so steht nach dem d'Alembertschen Prinzip jeder dieser Bolzen im Gleichgewicht unter den auf ihn einwirkenden gewendeten Gelenkkräften:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \equiv +\!\!+ C_1 +\!\!+ C_2 \\ 0 \equiv +\!\!+ D_2 +\!\!+ D_3 \\ 0 \equiv +\!\!+ E_3 +\!\!+ E_4 \\ 0 \equiv +\!\!+ F_4 +\!\!+ F_5 \\ 0 \equiv +\!\!+ G_2 +\!\!+ G_5. \end{array}\right\} \qquad (77)$$

Diese 5 Gleichgewichtsbedingungen ergeben 10 Gleichungen, weil jede Gleichgewichtsgruppe aus Kräften besteht, die in einer Ebene liegen und in einem Punkte sich schneiden. Die Bedingungen 75), 76) und 77) enthalten 12 Gelenkkräfte, jede mit zwei unbekannten Größen, ihren Projektionen auf zwei Achsen, und die Stützkräfte A, B mit zusammen drei Unbekannten. Vorhanden

sind demnach 27 Unbekannte, denen 28 Gleichungen gegenüberstehen. Eliminiert man die Unbekannten aus den Gleichungen, so bleibt *eine* Bedingung übrig, die von den Kräften S erfüllt werden muß und in der Tat erfüllt wird; denn diese Bedingung ist identisch mit der Gleichung 64), welche bereits verwendet wurde, um die Kräfte S zu bestimmen. Sie drückt aus, daß das ruhende Getriebe unter Einwirkung der äußeren Kräfte S im Gleichgewicht sich befindet. Die folgende Untersuchung wird zeigen, daß die Berechnung der Gelenkkräfte nicht nur in dem vorliegenden Beispiel, sondern allgemein eine bestimmte Aufgabe ist, abgesehen von besonderen Lagen, den sogenannten Totlagen des Getriebes.

26. Die graphische Bestimmung der Gelenkkräfte bei reibungsloser Bewegung. Durch Anwendung der graphischen Statik kann die Bestimmung der Gelenkkräfte erheblich vereinfacht werden. Wir gehen aus von der Tatsache, daß das *ruhende* Getriebe im Gleichgewichte sich befinden würde unter Einwirkung der gegebenen Kräfte S_1, S_2, S_3 . . ., die von den Gliedern 1, 2, 3 . . . aufgenommen werden, und den beiden unbekannten Stützkräften A und B. Man bestimmt zunächst diese beiden Stützkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen der Gruppe

$$0 \equiv A \ddagger B \ddagger S_1 \ddagger S_2 \ddagger S_3 \ddagger S_4 \ddagger S_5 \tag{78}$$

entweder durch Rechnung oder in bekannter Weise durch die Zeichnung.

Man kann, ***ohne das Gleichgewicht des Getriebes zu stören, und ohne die Gelenkkräfte zwischen den Gliedern zu ändern***, jede der Kräfte S durch zwei Kräfte ersetzen, die durch Gelenke des betreffenden Gliedes gehen. Diese Zerlegung:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &\equiv (B_1) \ddagger (C_1) \\ S_2 &\equiv (C_2) \ddagger (D_2) \\ S_3 &\equiv (D_3) \ddagger (E_3) \\ S_4 &\equiv (E_4) \ddagger (F_4) \\ S_5 &\equiv (F_5) \ddagger (A_5) \end{aligned}\right\} \quad . \tag{79}$$

wird in den Abb. 74 und 75 dargestellt. Die Punkte H der Kräfte S, an denen die Zerlegung vorgenommen wird, können nach Belieben gewählt werden; die Wahl hat keinen Einfluß auf das Ergebnis der Konstruktion, d. h. auf die Größen der Gelenkkräfte.

Man kann ferner, ohne das Gleichgewicht des Getriebes zu stören, und ohne die Gelenkkräfte zu ändern, aus jedem Stabe des Getriebes ein Stück herausschneiden und dasselbe ersetzen durch die

beiden Stabkräfte, die von dem herausgeschnittenen Stück auf die beiden anderen Stabteile übertragen werden. Wir nehmen hierbei an, daß der Stab gewichtslos ist. Die beiden Stabkräfte, z. B. C_d und D_c des Stabes CD, fallen also mit der Stabachse zusammen, sind gleich groß und dem Sinne nach einander entgegengesetzt.

Auf diesem Wege entstehen die Gleichgewichtsgruppen der Gelenke, d. h. Gruppen von Kräften, die in je einem Gelenk sich schneiden:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \equiv B \ddagger (B_1) \ddagger B_c \ddagger B_a \\ 0 \equiv C_b \ddagger (C_1) \ddagger (C_2) \ddagger C_d \ddagger C_g \\ 0 \equiv D_c \ddagger (D_2) \ddagger (D_3) \ddagger D_e \ddagger D_g \\ 0 \equiv E_d \ddagger (E_3) \ddagger (E_4) \ddagger E_f \\ 0 \equiv F_e \ddagger (F_4) \ddagger (F_5) \ddagger F_a \ddagger F_g \\ 0 \equiv G_c \ddagger G_d \ddagger G_f \ddagger G_a \\ 0 \equiv A \ddagger A_b \ddagger A_g \ddagger A_f \ddagger (A_5). \end{array}\right\} \quad (80)$$

Die Kräftepolygone B, C, D, E, F, G, A dieser sieben Gleichgewichtsgruppen sind in Abb. 75 gebildet worden. Das Polygon B besteht aus der Stützkraft B, der Gelenklast (B_1) und den beiden Stabkräften B_c und B_a. Nachdem die Stützkräfte A, B bestimmt und die Kräfte S zerlegt worden, sind B und (B_1) gegeben. Die beiden Stabkräfte B_c und B_a werden durch das Kräftepolygon B bestimmt. Das Polygon C besteht aus der bekannten Stabkraft

$$C_b \equiv +\!\!+ B_c,$$

den beiden gegebenen Gelenklasten (C_1), (C_2) und den beiden durch das Polygon zu bestimmenden Stabkräften C_d und C_g. Das Polygon D besteht aus der bekannten Stabkraft

$$D_c \equiv +\!\!+ C_d,$$

den gegebenen Gelenklasten (D_2), (D_3) und den beiden durch das Polygon zu bestimmenden Stabkräften D_e und D . Das Polygon E enthält die bekannte Stabkraft

$$E_d \equiv +\!\!+ D_e,$$

die beiden gegebenen Gelenklasten (E_3), (E_4) und nur die *eine* unbekannte Stabkraft E_f. Es ergibt sich hier die erste Probe für die Richtigkeit und Genauigkeit der Zeichnung. Wenn bei Bestimmung der Kräfte B, S_1, S_2, S_3, S_4 und beim Auftragen der Kräftepolygone B, C, D keine Fehler vorgekommen sind, so muß die Stabkraft E_f des Kräfteplans zum Stabe EF des Lageplans parallel gerichtet sein. Das Kräftepolygon F besteht aus der bekannten Stabkraft

$$F_e \equiv +\!\!+ E_f,$$

den gegebenen Gelenklasten (F_4), (F_5) und den beiden durch das Polygon zu bestimmenden Stabkräften F_a und F_g. Das Kräftepolygon G enthält die drei bekannten Stabkräfte

$$G_c \equiv \# C_g, \quad G_d \equiv \# D_g, \quad G_f \equiv \# F_g$$

und nur die *eine* unbekannte Stabkraft G_a. Hier ergibt sich die *zweite* Probe: die Stabkraft G_a des Kräfteplans muß zur Stabachse GA des Lageplans parallel gerichtet sein. Das Polygon A endlich besteht aus lauter bekannten und gegebenen Kräften: der Stützkraft A, den Stabkräften

$$A_b \equiv \# B_a, \quad A_g \equiv \# G_a, \quad A_f \equiv \# F_a$$

und der Gelenklast (A_5).

Nachdem die *Stabkräfte* durch den Kräfteplan, Abb. 75, bestimmt worden sind, können die *Gelenkkräfte* ermittelt werden. Man betrachtet zu diesem Zweck die unter 75) verzeichneten Gleichgewichtsgruppen der Getriebeglieder, schneidet aus jedem Stabe ein Stück heraus und bildet dadurch aus jedem Gliede ebensoviele Gleichgewichtsgruppen, wie das Glied Gelenke hat. Da jede dieser Gruppen nur *eine* unbekannte Kraft, die Gelenkkraft, enthält, so können die Kräftepolygone ohne weiteres in Abb. 75 gebildet werden. Um diese Abbildung nicht mit Linien zu überladen, sind die bezeichneten Kräftepolygone in einer besonderen Abb. 76 zusammengestellt worden. Zur Erklärung mögen folgende Bemerkungen dienen. Das Glied 1 befindet sich im Gleichgewicht unter Einwirkung der gegebenen Gelenklasten (B_1), (C_1) und der beiden unbekannten Gelenkkräfte B_1, C_1, die von den Gelenken B und C auf das Glied 1 übertragen werden. Schneidet man aus dem Stabe BC ein Stück heraus, so entstehen die beiden Gleichgewichtsgruppen (Abbildung 76)

$$0 \equiv (B_1) \ddagger B_c \ddagger B_1$$
$$0 \equiv C_b \ddagger (C_1) \ddagger C_1,$$

welche nur die beiden unbekannten Kräfte B_1 und C_1 enthalten.

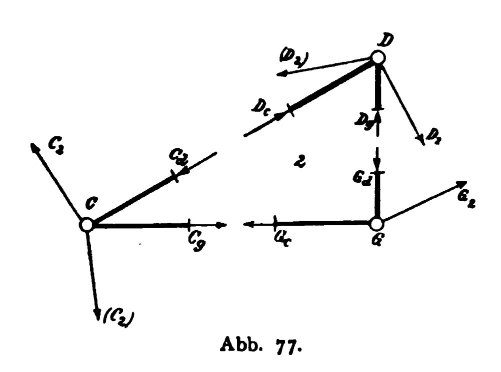


Abb. 77.

Das Glied 2 ist im Gleichgewicht unter Einwirkung der zwei gegebenen Gelenklasten (C_2), (D_2) und der drei unbekannten Gelenkkräfte C_2, D_2, G_2 (Abb. 77). Wird aus jedem der drei Stäbe des

Gliedes ein Stück herausgeschnitten, so entstehen die drei Gleichgewichtsgruppen (Abb. 77)

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (C_2) \ddagger C_d \ddagger C_g \ddagger C_2 \\ 0 &\equiv D_g \ddagger D_c \ddagger (D_2) \ddagger D_2 \\ 0 &\equiv G_c \ddagger G_d \ddagger G_2, \end{aligned}$$

wodurch die drei Gelenkkräfte des Gliedes 2: C_2, D_2, G_2 bestimmt werden. In gleicher Weise entstehen zur Bestimmung der Gelenkkräfte D_3, E_3, E_4, F_4, F_5, G_5, A_5 die Gruppen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &\equiv (D_3) \ddagger D_e \ddagger D_3 \\ 0 &\equiv E_d \ddagger (E_3) \ddagger E_3 \\ 0 &\equiv (E_4) \ddagger E_f \ddagger E_4 \\ 0 &\equiv F_e \ddagger (F_4) \ddagger F_4 \\ 0 &\equiv (F_5) \ddagger F_a \ddagger F_g \ddagger F_5 \\ 0 &\equiv G_f \ddagger G_a \ddagger G_5 \\ 0 &\equiv A_g \ddagger A_f \ddagger (A_5) \ddagger A_5. \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Die Abb. 76 enthält die Kräftepolygone aller dieser Gleichgewichtsgruppen.

27. Die inneren Kräfte eines Getriebegliedes. Nach dem Prinzip d'Alemberts befindet sich jeder kleinste Teil eines bewegten Körpers von der Masse m und der Beschleunigung v'_1 im Gleichgewicht unter Einwirkung der von diesem Teile aufzunehmenden äußeren und inneren Kräfte in Verbindung mit der *gewendeten* Kraft mv'_1. Um die inneren Kräfte eines Getriebegliedes in einem bestimmten Zeitpunkt der Bewegung zu ermitteln, versetzt man also das Glied in den Ruhezustand, läßt auf dasselbe einwirken: die gegebenen äußeren Kräfte K, zu denen auch die Gelenkkräfte gehören, ferner die gewendeten Kräfte mv'_1 der kleinsten Körperteile und verfährt im übrigen nach den Regeln der Festigkeitslehre.

29. Die Gelenkreibung und ihr Einfluß auf die Beschleunigung des Getriebes. In der Gleichung 74) für die Drehbeschleunigung des geführten Gliedes 1:

$$\omega'_{11} = \omega_{11} \frac{\Sigma Rr}{\Sigma m v_1^2}$$

wurde die Arbeitsgeschwindigkeit der Gelenkreibungen vernachlässigt. Jeder Bewegungswiderstand vermindert die kinetische

Energie des Getriebes. Er bewirkt also stets eine Verminderung nicht des algebraischen, sondern des *numerischen* Wertes der Drehgeschwindigkeit ω_{11} des geführten Gliedes. Bezeichnet ΣA die Summe der *positiven* Werte aller Arbeitsgeschwindigkeiten der Bewegungswiderstände, so ist demnach der *berichtigte* Wert der Drehbeschleunigung:

$$(\dot{\omega}'_{11}) = \omega_{11}\left(\frac{\Sigma Rr - \Sigma A}{\Sigma m v_1^2}\right). \tag{82}$$

Das Gesetz der Reibung ist nur unvollkommen bekannt. Gewöhnlich wird angenommen, daß der Reibungswiderstand das Produkt bildet aus der Gelenkkraft und dem durch Versuche zu ermittelnden Reibungskoeffizienten f. Die Arbeitsgeschwindigkeit des Widerstandes ergibt sich dann durch Multiplikation des Widerstandes mit der relativen Geschwindigkeit der beiden reibenden Flächen. Hierbei kommt ferner in Betracht, ob das Gelenk einfach oder doppelt ist.

Ein *einfaches* Gelenk, z. B. das Gelenk F im Getriebe Abb. 50, verbindet *zwei* Glieder 4 und 5 miteinander. Die beiden Gelenkkräfte sind von derselben positiven Größe

$$F_4 = F_5.$$

Sie erzeugen an der Oberfläche des Gelenkzapfens vom Durchmesser d einen Reibungswiderstand von der positiven Größe fF_4. Ist die Drehgeschwindigkeit ω_4 des Gliedes 4 *algebraisch* größer als ω_5, so ist $\frac{1}{2}\,d\,(\omega_4 - \omega_5)$ der positive Wert der relativen Geschwindigkeit der beiden reibenden Flächen gegeneinander. Demnach hat die Arbeitsgeschwindigkeit der Reibung für das einfache Gelenk F den positiven Wert:

$$A = \frac{1}{2} f F_4 d\,(\omega_4 - \omega_5). \tag{83}$$

Ein *Doppelgelenk*, z. B. das Gelenk K in Abb. 50, verbindet *drei* Glieder 6, 7, 9 miteinander. Der Gelenkzapfen ist mit *einem* Gliede starr verbunden, und für die Größe der Reibungsarbeit ist es *nicht* gleichgültig, welches Glied den Zapfen trägt; wir nehmen beispielsweise an, das Glied 7 trage den Zapfen, und algebraisch sei

$$\omega_6 > \omega_9 > \omega_7.$$

Das Doppelgelenk besteht also in diesem Falle aus zwei einfachen Gelenken zwischen den Gliedern 6, 7 und 7, 9. Die Arbeits-

geschwindigkeit hat, wenn K_6 und K_9 die Gelenkkräfte der Glieder 6 und 9 bezeichnen, folglich den positiven Wert:

$$A = \frac{1}{2} fd \left(K_6 (\omega_6 - \omega_7) + K_9 (\omega_9 - \omega_7)\right). \tag{84}$$

Gelenke mit mehr als *drei* Gliedern kommen in den gebräuchlichen Getrieben nicht vor und brauchen daher hier nicht berücksichtigt zu werden.

30. Beziehungen zwischen der Anzahl der Glieder eines Getriebes, der Anzahl der Gelenke und der Stäbe. Wir bezeichnen mit e die Anzahl der einfachen Gelenke eines Getriebes, mit d die Anzahl der Doppelgelenke, mit s die Anzahl der Stäbe, mit g die Anzahl der Glieder und nehmen an, daß etwaige Schieberverbindungen nach Anleitung des Abschnittes 5 durch Gelenke ersetzt worden sind.

Um $(e + d)$ Gelenke *starr* miteinander zu verbinden, sind $2(e + d) - 3$ Stäbe erforderlich. Wenn *ein* Stab einer solchen starren Verbindung beseitigt und ein zweiter festgehalten wird, so entsteht ein Getriebe. Daher ist

$$s = 2(e + d) - 4 = 2(e + d - 2). \tag{85}$$

Die Anzahl s der Stäbe ist also stets *gerade*. In dieser Anzahl sind, wie aus den vorstehenden Angaben hervorgeht, auch die Stäbe enthalten, die zur starren Verbindung der *ruhenden* Gelenke erforderlich sind.

In den Betrachtungen des Abschnittes 26 dienten die $2(e + d)$ Gleichgewichtsbedingungen der $(e + d)$ Gelenke dazu, um die $2(e + d) - 4$ Stabkräfte und die 3 Komponenten der Stützkräfte, zusammen also $2(e + d) - 1$ unbekannte Größen aus den gegebenen Kräften S zu berechnen. Diese Kräfte S waren nicht unabhängig voneinander, sondern mußten die von der Gleichung 64) ausgedrückte Gleichgewichtsbedingung erfüllen, so daß $2(e + d) - 3$ Gleichungen zur Bestimmung der $2(e + d) - 3$ Stabkräfte zur Verfügung standen. Aus den Stabkräften und den bekannten Gelenklasten ergaben sich ohne weiteres die Gelenkkräfte. Es geht hieraus hervor, daß die Berechnung der Gelenkkräfte im allgemeinen, d. h. abgesehen von besonderen Lagen des Getriebes, eine *bestimmte* Aufgabe ist.

Jedes der e einfachen Gelenke nimmt *zwei* und jedes der d Doppelgelenke *drei* Gelenkkräfte auf, und da jede Gelenkkraft *zwei* Unbekannte enthält, etwa die Projektionen auf zwei feste Achsen, so enthalten die Gelenkkräfte $2(2e + 3d)$ unbekannte Größen. Außerdem enthalten die Stützkräfte *drei* unbekannte Komponenten.

Die Gesamtzahl der Unbekannten ist sonach $4e + 6d + 3$. Zur Bestimmung dieser unbekannten Größen stehen folgende Bedingungen zur Verfügung:

1. Ein jedes Glied befindet sich im Gleichgewicht unter Einwirkung der Kraft S und der vom Gliede aufzunehmenden Gelenkkräfte. Diese Bedingung ergibt für jedes Glied 3, für g Glieder also $3g$ Gleichungen.

2. Jedes Gelenk befindet sich im Gleichgewicht unter Einwirkung der von ihm aufzunehmenden Gelenk- und Stützkräfte. Da diese Bedingung durch *zwei* Gleichungen ausgedrückt wird, so ergeben sich daraus $2(e + d)$ Gleichungen. Die Gesamtanzahl der Gleichungen beträgt sonach $3g + 2e + 2d$. Wie aber schon dargelegt worden ist, muß eine mit Gleichung 64) identische Bedingung sich ergeben, wenn aus den $3g + 2e + 2d$ Gleichungen die $4e + 6d + 3$ Unbekannten eliminiert werden. Folglich muß

$$(3g + 2e + 2d) - (4e + 6d + 3) = 1$$

oder

$$g = 2\frac{e + 2d + 2}{3} \tag{86}$$

sein. Die Anzahl der Glieder eines Getriebes mit Einschluß des ruhenden Gliedes ist demnach ebenfalls stets *gerade* und die Zahl $(e + 2d + 2)$ ist teilbar durch 3. Aus den Gleichungen 85) und 86) folgt noch:

$$4e + 6d = s + 3g. \tag{87}$$

Demnach ist $(4e - s)$ teilbar durch 6 und $(s + 3g - 6d)$ teilbar durch 4.

Beispiel 1. Für das Getriebe in Abb. 74 ist

$$e = 7,\ d = 0,\ s = 10,\ g = 6$$

und gemäß den Bedingungen 85), 86) und 87):

$$s = 2(e + d - 2) = 10 = 2\cdot 7 - 4$$

$$g = 2\frac{e + 2d + 2}{3} = 6 = 2\frac{7 + 2}{3}$$

$$4e + 6d = s + 3g = 4\cdot 7 = 10 + 3\cdot 6.$$

Beispiel 2. In dem durch Abb. 50 dargestellten Getriebe ist

$$e = 9,\ d = 2,\ s = 18,\ g = 10$$

und in Uebereinstimmung mit den Gleichungen 85) bis 87):

$$s = 2(e + d - 2) = 18 = 2(9 + 2 - 2)$$

$$g = 2\frac{e + 2d + 2}{3} = 10 = 2\frac{9 + 4 + 2}{3}$$

$$4e + 6d = s + 3g = 4\cdot 9 + 6\cdot 2 = 18 + 3\cdot 10.$$

31. Literarische Notizen. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung ist folgenden Aufsätzen entnommen:

1. *Die geometrische Konstruktion der Beschleunigungen der ebenen Bewegung einer starren Punktgruppe;* Zivilingenieur 1879, S. 613.

2. *Notiz, betreffend die Konstruktion der Beschleunigungen am Kurbelgetriebe;* Zivilingenieur 1880, S. 75.

3. *Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne;* Zivilingenieur 1887, S. 631.

4. *Die Trägheitskräfte einer Schubstange;* Zivilingenieur 1895, S. 591.

5. *Beiträge zur Geometrie der Bewegung und zur Kinetik ebener Getriebe;* Zeitschrift für Mathematik und Physik 1903 und 1904.

Zusätze sind in den Abschnitten 16, 17 und 18 enthalten.

Eine sehr ausführliche Darstellung der Geschwindigkeiten der Getriebe gibt *Burmester* in seinem *Lehrbuch der Kinematik,* Leipzig 1888. Von den Abhandlungen, welche die Vorarbeiten zu diesem Lehrbuch enthalten, kommt hier hauptsächlich die folgende in Betracht: *Ueber die momentane Bewegung ebener kinematischer Ketten;* Zivilingenieur 1880. Das Verfahren von Burmester weicht wesentlich von dem unsrigen ab. Es beruht auf der Verwendung der Geschwindigkeitspole der relativen Bewegungen der Getriebeglieder gegeneinander. Aus der Lage der Pole ergeben sich die Verhältnisse der Drehgeschwindigkeiten der Glieder. Bei der graphischen Bestimmung der Geschwindigkeiten der Gelenke stellt es sich als zweckmäßig heraus, dieselben um 90° zu drehen, also die sogenannten *senkrechten Geschwindigkeiten* darzustellen.

Die wesentlichen Eigenschaften der Geschwindigkeitspole wurden bereits von *Aronhold* in seinen *Grundzügen der kinematischen Geometrie* mitgeteilt; Zeitschrift des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes in Preußen, 1872.

Die in den Abschnitten 2, 7 und 13 abgeleiteten Beziehungen zwischen dem Lageplan einer starren ebenen Punktgruppe, ihrem Geschwindigkeitsplan und den beiden Beschleunigungsplänen:

$$PABC\ldots \approx P'A'B'C'\ldots$$
$$QABC\ldots \approx Q''A''B''C''\ldots$$
$$RABC\ldots \approx R'''A'''B'''C'''\ldots$$

folgen aus einem Satze von *Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte;* Leipzig 1879, Bd. I, S. 564. Sie werden ausdrücklich ausgesprochen von *Mehmke, Ueber die Geschwindigkeiten beliebiger*

Ordnung eines in seiner Ebene bewegten ähnlich veränderlichen ebenen Systems; Zivilingenieur 1883, S. 495.

Die im Abschnitt 6 dargelegte Auffassung der Beschleunigung eines Punktes als die Geschwindigkeit des Endpunktes seiner Geschwindigkeitsstrecke findet sich bei Schell S. 462 und, offenbar unabhängig davon, bei Mehmke S. 425.

Die Formeln für die Tangentialbeschleunigung u'' und die Normalbeschleunigung n'' eines Punktes, Gleichungen 40) und 41) des Abschnitts 13, wurden zuerst richtig abgeleitet von *Somoff*, Mémoire sur les accélérations de divers ordres in den Mémoires de l'académie des sciences de St. Petersbourg 1864.

Einige Gegenstände meiner Mitteilungen finden sich, in anderer Form behandelt, ferner in folgenden Arbeiten:

Rittershaus: 1. Ueber die kinematische Kette. 2. Ueber die Beschleunigungen der ebenen Bewegung; Zivilingenieur 1876 und 1877.

Mehmke: Ueber die Bewegung eines starren Systems in seiner Ebene; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1890.

Grübler: 1. Ueber die Krümmung der Polbahnen. 2. Ueber die Kreisungspunkte einer komplan bewegten Ebene; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1884, 1889, 1892.

Rodenberg: 1. Die Bestimmung der quadratischen Verwandtschaft der Krümmungsmittelpunkte zweier Glieder einer ebenen kinematischen Kette; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1890. 2. Ueber die Kreispunktkurve eines ebenen Gelenkvierseits; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1891. 3. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine konstruktive Ermittlung; Zivilingenieur 1896.

R. Müller: Ueber die Krümmung der Bahnevoluten im starren ebenen System; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1891.

Wittenbauer: 1. Ueber die Wendepole der kinematischen Kette. 2. Ueber den Beschleunigungspol der zusammengesetzten Bewegung. 3. Ueber die Beschleunigungspole der kinematischen Kette; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1895. 4. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine konstruktive Ermittlung; Zivilingenieur 1896.

Hartmann: Ueber die Krümmung der Polbahnen einer Vierzylinderkette; Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1902.

Sehr ausführliche Angaben über die Literatur der Kinematik enthält die Abteilung IV, 3 der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, bearbeitet von *A. Schönflies* und *M. Grübler.*

Von Abhandlungen über die Kinetik der Getriebe nennen wir:

Radinger: Ueber Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit, Wien 1892.

Pröll: Versuch einer graphischen Dynamik, Leipzig 1874.

Heun: Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik; Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1901. Diese Abhandlung enthält weitere Literaturangaben.

Müller-Breslau berichtet über meine Abhandlung vom Jahre 1887 im Literaturverzeichnis seiner Graphischen Statik, Bd. II, 1903, auf Seite 193 wie folgt: „Mohr: *Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne;* Zivilingenieur 1887. Zeigt die Anwendung des Williotschen Verfahrens auf die Darstellung der Geschwindigkeiten und schließlich auch der Beschleunigungen kinematischer Ketten".

Die folgende Darlegung zeigt, daß die vorstehende Behauptung nicht richtig, dagegen sehr geeignet ist, Mißverständnisse und Täuschungen hervorzurufen.

Williot behandelt in seiner Abhandlung: *Notations pratiques sur la statique graphique,* Publications scientifiques industrielles 1877, eine einzige Aufgabe: Aus den gegebenen kleinen Längenänderungen der Stäbe eines einfachen Fachwerks soll unter folgenden vereinfachenden Bedingungen die Formänderung des Fachwerks auf graphischem Wege bestimmt werden:

1. Das Fachwerk besteht aus einer Reihe von Stabdreiecken, von denen jedes mit dem nächstfolgenden eine Seite gemein hat.

2. Von einem Stabe AB wird ein Knoten A und die Richtung AB des Stabes festgehalten.

Ist ABC das Stabdreieck, dem der Stab AB angehört, so ist, wenn die Formänderung in der Zeiteinheit erfolgt, die Geschwindigkeit des Punktes B nach Größe, Richtung und Sinn durch die Längenänderung des Stabes AB bestimmt. Die Geschwindigkeit des Punktes C ergibt sich darauf aus den gegebenen Dehnungsgeschwindigkeiten der beiden Stabstrecken AC und BC. Im nächstfolgenden Stabdreieck BCD wird die Geschwindigkeit des Punktes D bestimmt durch die gegebenen Dehnungsgeschwindigkeiten der Stäbe BD, CD, und dieses Verfahren wiederholt sich bei jedem folgenden Stabdreieck.

Ein ähnliches Verfahren kann bei der folgenden von Williot nicht behandelten und nicht einmal erwähnten Aufgabe benutzt werden: Gegeben ist ein *ebenes Getriebe* $ABCDEF\ldots$, *zusammengesetzt aus einem Stabviereck* $ABCD$ *und einer Reihe von Stabpaaren* (BE, DE), (CF, EF) . . ., *welche die folgenden Gelenke* $E, F\ldots$

mit den vorhergehenden verbinden. Ein Stab AB des Stabvierecks ist festgestellt, und die Drehgeschwindigkeit eines zweiten Stabes AC dieses Stabvierecks ist gegeben. Es sind die Geschwindigkeiten der Gelenke D, E, F . . . zu bestimmen. Der Geschwindigkeitsplan des Getriebes ergibt sich, indem man die Dehnungsgeschwindigkeiten der starren Stäbe des Getriebes gleich null aufträgt.

In allen Fällen, wenn die Zusammensetzung des Getriebes und seine Festlegung den vorstehenden vereinfachenden Bedingungen nicht entsprechen, ist das beschriebene, auf Williot zurückzuführende Verfahren nicht anwendbar. Die in solchen Fällen anzuwendenden Hilfsmittel wurden in den Abschnitten 2, 5 und 10 und hiermit in Uebereinstimmung schon in meiner Abhandlung vom Jahre 1887 beschrieben. Ich verweise auf die in den Abb. 44, 47, 50 dargestellten Beispiele. In der Regel wird es nötig, die Bewegung des Getriebes in mehrere einfachere gleichzeitige Bewegungen zu zerlegen und diese dann graphisch zusammenzusetzen.

Unter der Ueberschrift: „*Verschiebungspläne nach dem Verfahren von Williot*“ beschreibt Müller-Breslau auf S. 60 seiner Graphischen Statik Bd. II, 1902 auch jene Zerlegungen und Zusammensetzungen, ohne seine Quelle anzugeben. Die Leser werden hierdurch zu dem Irrtum geführt, daß alles zum Verfahren von Williot gehöre, während die von Müller-Breslau z. B. in den Abb. 37, 38, 39, 40, 41, 42 seiner Graphischen Statik vorgeführten Verschiebungspläne nicht nach dem Verfahren von Williot gebildet werden können, sondern zu ihrer Darstellung der von mir angegebenen Hilfsmittel bedürfen.

Von Beschleunigungen und Beschleunigungsplänen, bei deren Darstellung nach den Angaben Müller-Breslaus auch das Williotsche Verfahren zur Anwendung kommen soll, ist in der Abhandlung von Williot überhaupt nicht die Rede.

Die Zueignung an Williot steht in Zusammenhang mit dem folgenden Vorgange. In einer Abhandlung über Raumfachwerke, Zentralblatt der Bauverwaltung 1902, S. 511, nimmt Müller-Breslau die Anwendung des von mir im Zivilingenieur 1887 mitgeteilten Verfahrens, dem er fälschlicherweise den Namen Williot beilegt, als sein geistiges Eigentum in Anspruch, und zwar mit folgenden Worten: „Dieses Verfahren ist in der Schweizerischen Bauzeitung 1887 nur kurz, aber doch in einer für die Sicherung der Priorität ausreichenden Weise erwähnt worden.“ Die Erwähnung in der Schweizerischen Bauzeitung vom 27. November 1887, die wenige Wochen vor meiner Abhandlung erschien, lautet: „Auch sei hier

an das bekannte Verfahren von Williot erinnert, dessen Anwendung auf die Untersuchung kinematischer Ketten in dem (voraussichtlich im Sommer erscheinenden) zweiten Bande meiner Graphischen Statik (im Abschnitt über Formänderungen des Fachwerks) behandelt wird.“ Der für den Sommer 1888 angekündigte zweite Band der Graphischen Statik erschien in Wirklichkeit im Jahre 1892 und enthält auf S. 192 bis 205 unter der Ueberschrift: *Anwendungen der Theorie der Formänderungen auf die Berechnung des statisch bestimmten Fachwerks* ohne Angabe der Quelle zahlreiche Anwendungen des von mir mitgeteilten Verfahrens. Die von Müller-Breslau erhobenen seltsamen Ansprüche gehen also dahin: erstens, daß *mein* Verfahren zu dem von *Williot* zu rechnen sei, und zweitens, daß die bezeichneten Abschnitte der Graphischen Statik um fünf Jahre, von 1892 auf 1887, zurückdatiert werden sollen.

Abhandlung V.

Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenzen und den Bruch eines Materials?

Der entwerfende Ingenieur hat in der Regel die Aufgabe, allen Teilen seines Bauwerkes eine möglichst gleichmäßige Sicherheit gegen Zerstörung und schädliche Formänderungen zu geben. Zu den wichtigsten Grundlagen der Festigkeitslehre gehört daher die Kenntnis der Umstände, von welchen die Elastizitätsgrenzen und die Bruchgrenzen der Baustoffe abhängig sind. Unzählige Versuche wurden angestellt, um diese Grenzen kennen zu lernen, aber zu einwandfreien Ergebnissen ist man bis heute nicht gelangt. Es hat dies seinen Grund hauptsächlich darin, daß es mit großen Schwierigkeiten verbunden ist, bestimmte und beabsichtigte Spannungszustände oder Formänderungszustände der kleinsten Körperteile durch den Versuch hervorzurufen. Man ist daher in den meisten Fällen im unklaren darüber, welcher Zustand des Körpers den Bruch oder die Ueberschreitung der Elastizitätsgrenze herbeiführte. Vielleicht wird es in Zukunft gelingen, die bezeichneten Schwierigkeiten durch vollkommenere Versuchsanordnungen zu überwinden; bis dahin wird man genötigt sein, den bisherigen Weg zu verfolgen und Annahmen zu suchen, die imstande sind, eine möglichst große Anzahl zuverlässiger Ergebnisse zu erklären.

Die älteren Hypothesen stammen aus einer Zeit, in der nur wenige und unsichere Erfahrungen vorlagen. Sie weichen stark voneinander ab, und keine von ihnen läßt sich den neueren Erfahrungen gegenüber aufrecht erhalten. Das Bedürfnis nach einer neuen Annahme, die sich dem jetzigen Stande der Erfahrung möglichst anschließt, kann daher nicht in Zweifel gestellt werden. Die nachfolgende Abhandlung enthält einen Versuch.

1. Der Spannungszustand eines Körperpunktes. Wir bezeichnen mit A einen Punkt des Körpers, dessen Zustand in Be-

tracht gezogen werden soll, und denken uns zu diesem Zweck eine unendlich kleine Kugel vom Mittelpunkt A aus dem Körper herausgeschnitten. Die Gesamtheit der Spannungen aller Oberflächenelemente dieser Kugel, die in unendlicher Vergrößerung in Abb. 1 dargestellt ist, bildet den *Spannungszustand des Körperpunktes* A. Ein Oberflächenelement kann durch seinen Halbmesser bestimmt und bezeichnet werden. *Die Fläche* r ist daher im folgenden die abgekürzte Bezeichnung für eine unendlich kleine ebene Fläche, die im Endpunkte des Halbmessers r die Kugel A berührt. Den folgenden Gleichgewichtsbetrachtungen liegt nur die eine Voraussetzung zugrunde, daß die Spannungen im Körper *stetig* sich ändern, daß also die Spannungen ϱ der beiden Oberflächenelemente, die zu einem Kugeldurchmesser gehören, nach Größe und Richtung verschwindend wenig voneinander abweichen.

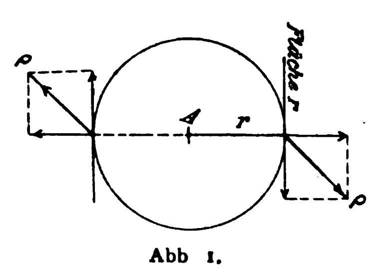


Abb 1.

2. Die Beziehung zwischen den Spannungen ϱ_1, ϱ_2 zweier Flächen r_1, r_2. Wir begrenzen in Abb. 2 ein unendlich kleines Prisma durch *drei* Paare von Ebenen, welche die Kugel A berühren und rechtwinklig zu den Halbmessern r_1, r_2, r_3 gestellt sind; r_1 und r_2 liegen in der Bildebene, r_3 steht rechtwinklig zu derselben. Die sechs Seitenflächen des Prismas sind von gleicher Größe, die hier gleich eins gesetzt wird. Das Gewicht des Prismas ist von unendlich kleiner Größe *dritter* Ordnung und verschwindet also gegen die Kräfte ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, die von den Seitenflächen aufgenommen werden und von unendlich kleiner Größe *zweiter* Ordnung sind. Von den Gleichgewichtsbedingungen des Prismas kommt hier nur die Momentengleichung in bezug auf den Halbmesser r_3, der die Bildebene im Punkte A rechtwinklig schneidet, in Betracht. Die

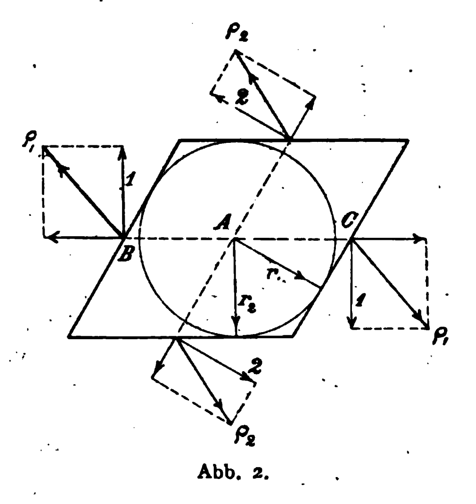


Abb. 2.

beiden Kräfte ϱ_3 werden von der Momentenachse geschnitten und haben also Momente gleich null. Wenn die Strecke BC gleich eins gesetzt wird, so haben die beiden Kräfte ϱ_1 das Moment $\varrho_1 \cos(\varrho_1 r_2)$, während das Moment der beiden Kräfte ϱ_2 die Größe $\varrho_2 \cos(\varrho_2 r_1)$ hat. Das Gleichgewicht fordert, daß die beiden Momente der Größe nach gleich, dem Sinne nach einander entgegengesetzt sind, *oder daß die Projektion der Spannung ϱ_1 auf den Halbmesser r_2 nach Größe und Vorzeichen gleich ist der Projektion der Spannung ϱ_2 auf den Halbmesser r_1:*

$$\varrho_1 \cos(\varrho_1 r_2) = \varrho_2 \cos(\varrho_2 r_1). \tag{1}$$

Diese Beziehung zwischen je zwei Oberflächenelementen r_1, r_2 bildet die Grundlage der folgenden Betrachtungen.

Wir geben derselben zunächst eine für die meisten Anwendungen bequemere Form und zerlegen zu dem Zweck jede der Spannungen ϱ_1, ϱ_2 in drei Komponenten: die Normalspannung und zwei Schubspannungskomponenten, von denen eine in die Bildfläche fällt, während die andere zur Bildfläche rechtwinklig gerichtet ist. Die zuletztgenannten Schubspannungskomponenten kommen hier nicht in Betracht, weil ihre Projektionen auf die Kugelhalbmesser r_1, r_2 gleich null sind. Die Normalspannungen σ_1, σ_2 erhalten das *positive* Vorzeichen, wenn sie *Zugspannungen* bezeichnen. Die in die Bildfläche fallenden Schubspannungen τ_1, τ_2 sollen das *positive* Vorzeichen erhalten, wenn sie die Kugel *im Sinne der Uhrzeigerbewegung* zu drehen suchen. Im vorliegenden Beispiel (Abb. 3) sind also die Spannungen σ_1, σ_2, τ_1 positiv, während τ_2 negativ ist. Mit $(r_1 r_2)$ bezeichnen wir ferner den Winkel, den ein Zeiger im Sinne der Uhrzeigerbewegung zu durchlaufen hat, um von r_1 nach r_2 zu gelangen. Bildet man nun die Gleichung 1), indem man die Spannungen σ_1, τ_1 auf den Halbmesser r_2 und die Spannungen σ_2, τ_2 auf den Halbmesser r_1 projiziert und *hierbei den Sinn der Halbmesser berücksichtigt*, so nimmt die Bedingung folgende Form an:

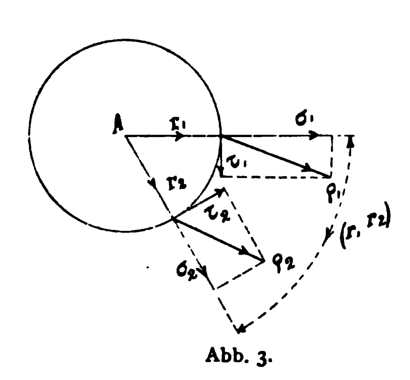


Abb. 3.

$$\sigma_1 \cos(r_1 r_2) + \tau_1 \sin(r_1 r_2) = \sigma_2 \cos(r_1 r_2) - \tau_2 \sin(r_1 r_2) \tag{2}$$

oder

$$\sigma_2 - \sigma_1 = (\tau_1 + \tau_2) \operatorname{tg}(r_1 r_2). \tag{3}$$

Die beiden nächstliegenden und wichtigsten Anwendungen dieser Gleichung ergeben sich in den besonderen Fällen, wenn die beiden Halbmesser einen rechten Winkel bilden, und wenn der Winkel $(r_1 r_2)$ unendlich klein ist. Im ersten Falle wird

$$\tau_1 = -\tau_2, \tag{4}$$

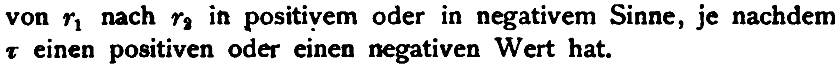
weil $\operatorname{tg}(r_1, r_2)$ unendlich groß ist. Die beiden in die Bildfläche fallenden Schubspannungskomponenten sind also in diesem Falle von gleicher Größe, dem Drehsinn nach aber einander entgegengesetzt.

Im zweiten Falle bezeichnen wir (Abb. 4) die Winkel, die ein Halbmesser im Sinne der Uhrzeigerbewegung durchlaufen muß, um von einem gegebenen festen Halbmesser r_0 nach r_1 und r_2 zu gelangen, mit φ und $\varphi + d\varphi$, ferner die Spannungskomponenten der Fläche r_1 mit σ, τ und diejenigen der Fläche r_2 mit $\sigma + d\sigma$ und $\tau + d\tau$. Die Bedingung nimmt alsdann die Form an:

$$d\sigma = 2\tau \, d\varphi. \tag{5}$$

Abb. 4.

Die Normalspannung σ wächst also



von r_1 nach r_2 in positivem oder in negativem Sinne, je nachdem τ einen positiven oder einen negativen Wert hat.

Es ist ferner der besondere Fall zu erwähnen, in welchem die Spannung ϱ_1 zum Kugelhalbmesser r_2 *rechtwinklig* gerichtet, ihre Projektion auf r_2 also gleich null ist. Die Gleichung 1) fordert dann, daß auch die Spannung ϱ_2 zum Halbmesser r_1 rechtwinklig gerichtet sein muß. Zwei solche Oberflächenelemente r_1, r_2 nennt man *konjugierte* Flächen, weil eine dieser beiden Flächen durch die andere bestimmt wird. Da nach Gleichung 2):

$$\sigma_1 \cos(r_1 r_2) + \tau_1 \sin(r_1 r_2) = 0$$

und

$$\sigma_2 \cos(r_1 r_2) - \tau_2 \sin(r_1 r_2) = 0$$

ist, so besteht für zwei konjugierte Flächen r_1, r_2 die Bedingung:

$$\frac{\sigma_1}{\tau_1} = -\frac{\sigma_2}{\tau_2} = -\operatorname{tg}(r_1 r_2) = \operatorname{tg}(r_2 r_1). \tag{6}$$

3. Die Hauptspannungen des Körperpunktes A. Wir bezeichnen mit x und z die beiden Durchmesser der Kugel A, in deren Oberflächenelementen die Normalspannung σ ihr algebraisches

Minimum σ_x und ihr Maximum σ_z erreicht. Zufolge Gleichung 5) sind die Schubspannungen dieser Flächen gleich null, und Gleichung 3) fordert, daß sich die Durchmesser x, z *rechtwinklig* schneiden. Wir bezeichnen ferner mit y den zur Ebene x, z senkrechten Kugeldurchmesser und folgern aus Gleichung 4), daß auch die beiden Oberflächenelemente y keine Schubspannungen aufnehmen. x, y und z heißen die *Hauptachsen* des Körperpunktes A, ferner xy, xz, yz die *Hauptebenen* und σ_x, σ_y, σ_z die *Hauptspannungen*. Es ist hervorzuheben, daß nach der hier eingeführten Bezeichnung algebraisch stets

$$\sigma_x < \sigma_y < \sigma_z$$

ist, während der numerische Wert von σ_x selbstverständlich auch größer sein kann als σ_z. Es empfiehlt sich, je einem der mit den Hauptachsen zusammenfallenden beiden Kugelhalbmesser das positive, dem anderen das negative Vorzeichen beizulegen. Die positiven Halbmesser bezeichnen wir mit r_x, r_y, r_z.

4. Die Bestimmung des Spannungszustandes eines Körperpunktes A durch seine Hauptspannungen. Zwischen der Spannung ϱ irgend eines Oberflächenelementes r der Kugel A und den Hauptspannungen σ_x, σ_y, σ_z bestehen nach Gleichung 1) die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \cos(\varrho r_x) &= \sigma_x \cos(r r_x) \\ \varrho \cos(\varrho r_y) &= \sigma_y \cos(r r_y) \\ \varrho \cos(\varrho r_z) &= \sigma_z \cos(r r_z), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

woraus folgt:

$$\varrho^2 = \sigma_x^2 \cos^2(r r_x) + \sigma_y^2 \cos^2(r r_y) + \sigma_z^2 \cos^2(r r_z). \tag{8}$$

Ferner wird die Normalspannung σ der Fläche r durch die Gleichung:

$$\sigma = \varrho \cos(\varrho r) = \varrho \left\{ \begin{aligned} \cos(\varrho r_x) \cos(r r_x) + \cos(\varrho r_y) \cos(r r_y) \\ + \cos(\varrho r_z) \cos(r r_z) \end{aligned} \right\}$$

bestimmt, die in Verbindung mit den Gleichungen 7) zu der Beziehung führt:

$$\sigma = \sigma_x \cos^2(r r_x) + \sigma_y \cos^2(r r_y) + \sigma_z \cos^2(r r_z). \tag{9}$$

Endlich ergibt sich die Schubspannung τ der Fläche r aus der Gleichung

$$\tau^2 = \varrho^2 - \sigma^2. \tag{10}$$

Die vorstehenden Gleichungen lassen erkennen, daß sich die Spannungen der Oberflächenelemente zu jeder der drei Hauptebenen der Kugel *symmetrisch* verteilen: Die Spannungen ϱ_1, ϱ_2 zweier Flächen r_1, r_2, die zu einer Hauptebene symmetrisch liegen, sind also nach Größe und Sinn einander gleich und schneiden sich in

einem Punkte der Symmetrieebene. Die Spannung ϱ der Fläche r bestimmt demnach zugleich die Spannungen von sieben anderen, auf den übrigen Oktanten der Kugel symmetrisch belegenen Oberflächenelemente.

5. Die Spannungen der in einer Hauptebene liegenden Oberflächenelemente der Kugel A. In vielen Fällen kommen nur die Spannungen der Flächen r in Betracht, welche die Kugel in einer Hauptebene, z. B. in der Ebene xz, berühren. Alle diese Flächen sind der Fläche r_y konjugiert, weil die Spannung σ_y zu den Halbmessern r der xz-Ebene rechtwinklig gerichtet ist. Daher liegen die Spannungen σ, τ aller dieser Flächen r in der xz-Ebene. Ihre Größen ergeben sich aus den Gleichungen 9) und 3):

$$\sigma = \sigma_x \sin^2 (r r_z) + \sigma_z \cos^2 (r r_z)$$

$$\tau = \frac{\sigma - \sigma_x}{\operatorname{cotg} (r r_z)} = \frac{\sigma_z - \sigma}{\operatorname{tg} (r r_z)},$$

woraus folgt:

$$\sigma = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cos 2 (r r_z) \qquad (11)$$

$$\tau = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \sin 2 (r r_z). \qquad (12)$$

Diese Beziehungen können zur Anschauung gebracht werden, indem man jeder Fläche r in der graphischen Darstellung (Abb. 5) einen Punkt R zuordnet, dessen rechtwinklige Koordinaten in einem willkürlich gewählten Maßstabe nach Größe und Vorzeichen die Spannungskomponenten σ und τ der Fläche r angeben. In Abb. 5 ist O der Anfangspunkt der Koordinaten σ, τ; die wagerechte σ-Achse zeigt nach rechts, die lotrechte τ-Achse zeigt nach oben.

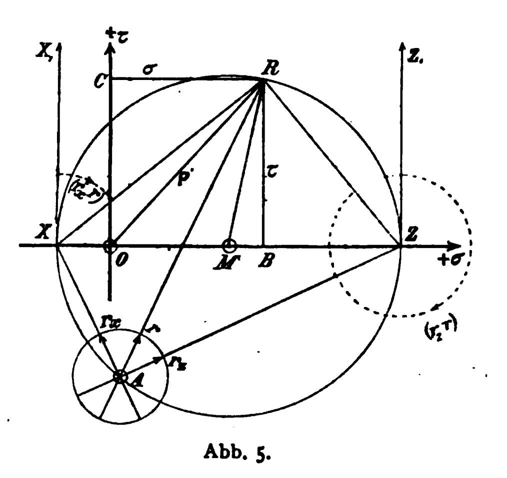


Abb. 5.

Die den beiden Hauptflächen r_x, r_z zugeordneten Punkte X, Z sind durch ihre Koordinaten

$$OX = \sigma_x, \quad \tau_x = 0, \quad OZ = \sigma_z, \quad \tau_z = 0$$

gegeben und liegen also auf der σ-Achse. Im vorliegenden Beispiel ist σ_x negativ und σ_z positiv.

Die beiden Achsen XX_1 und ZZ_1 haben Richtung und Sinn der positiven τ-Achse. Ein jeder der beiden Winkel

$$(XX_1, XR) = (r_x r) \quad \text{und} \quad (ZZ_1, ZR) = (r_z r)$$

bestimmt auf dem Kreise vom Durchmesser XZ den Punkt R, dessen Koordinaten nach Größe und Vorzeichen die Spannungskomponenten der Fläche r darstellen:

$$RC = \sigma, \quad RB = \tau;$$

denn es ist

$$OM = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}, \quad MX = MZ = MR = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2},$$

$$\sphericalangle\, RMZ = 2\,(r r_z),$$

was den Bedingungen der Gleichungen 11) und 12) entspricht.

Bringt man den xz-Kreis der Kugel A in die Bildebene der Abb. 5, und zwar so, daß die Halbmesser r_x und r_z durch die Punkte X, Z des Kreises XRZ gehen, so geht der Halbmesser r durch den Punkt R. Für jeden Halbmesser r des xz-Kreises der Kugel A bestimmt also der zugehörige Punkt R des Kreises XZ durch seine Koordinaten die Spannungskomponenten der Fläche r.

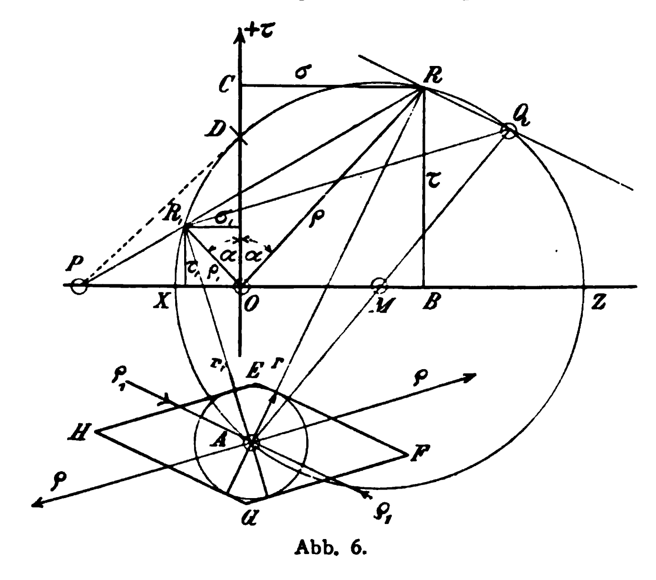


Abb. 6.

Die *Größe* der Spannung ϱ der Fläche r wird durch die Strecke

$$OR = \varrho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

dargestellt. Die *Richtung* der Spannung ϱ kann entweder durch

Auftragen der Spannungen σ, τ an die Fläche r oder einfacher mit Hilfe der zu r konjugierten Fläche r_1 in folgender Weise bestimmt werden. Die Fläche r_1 und ihre Spannungen σ_1, τ_1, ϱ_1 müssen die beiden Bedingungen:

$$(r_1 \varrho) = (r \varrho_1) = 90^\circ$$

und

$$\frac{\sigma_1}{\tau_1} = -\frac{\sigma}{\tau}$$

erfüllen (Gleichung 6). Daher ist, wenn R_1 (Abb. 6) den der Fläche r_1 zugeordneten Kreispunkt bezeichnet:

$$\sphericalangle\, COR_1 = \sphericalangle\, COR,$$

und die Gerade RR_1 schneidet die σ-Achse in dem Pol P der τ-Achse in bezug auf den Kreis XZ. Man bestimmt demnach P durch die Tangente DP und R_1 durch die Gerade PR_1R. Die Spannung ϱ der Fläche r ist rechtwinklig zur Geraden AR_1, also parallel zur Geraden QR_1 gerichtet, wenn mit Q der Endpunkt des Kreisdurchmessers AMQ bezeichnet wird. Wir nennen Q den *ersten* und P den *zweiten* Pol der graphischen Darstellung, die demnach in folgender Weise auszuführen ist (Abb. 7):

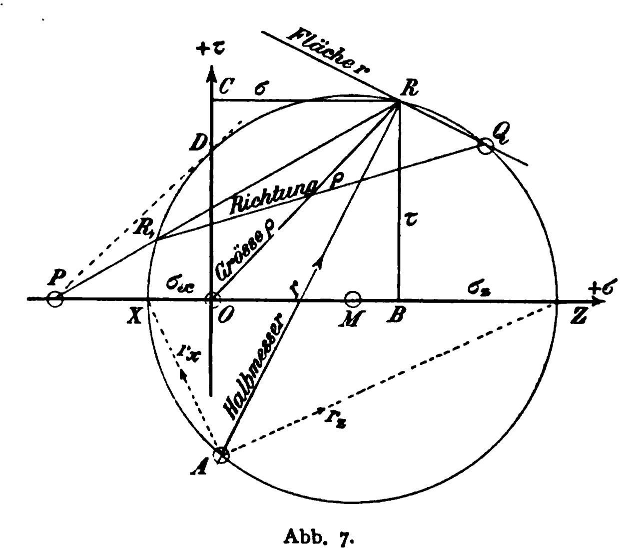


Abb. 7.

Gegeben sind Größe, Richtung und Sinn der beiden Hauptspannungen σ_x und σ_z des Körperpunktes A. Um für jede andere Fläche r, die den xz-Kreis der Kugel A berührt, Größe, Richtung und Sinn der Spannung ϱ zu bestimmen, ist aufzutragen: die wagerechte σ-Achse, deren positiver Sinn nach rechts zeigt, und die lotrechte τ-Achse, deren positiver Sinn nach oben zeigt; ferner

$$OX = \sigma_x, \quad OZ = \sigma_z.$$

Auf dem Kreise vom Durchmesser XZ wird der Punkt A bestimmt durch eine der beiden Geraden

$$XA \parallel r_x, \quad ZA \parallel r_z$$

Die beiden *positiven* Halbmesser r_x, r_z der Kugel A erhalten den Sinn AX, AZ. Der erste Pol Q wird durch den Durchmesser AMQ und der zweite Pol P durch die Tangente DP oder durch die Bedingung:

$$\frac{PX}{PZ} = \frac{XO}{OZ}$$

bestimmt. Für jeden Halbmesser r des xz-Kreises der Kugel A, dessen Richtung durch die Sehne AR gegeben ist, bestimmt:

QR die Stellung der Fläche r,
CR Größe und Vorzeichen der Normalspannung σ,
BR Größe und Vorzeichen der Schubspannung τ,
OR die *Größe* der Spannung ϱ,
QR_1 die *Richtung* der Spannung ϱ.

6. Die vollständige graphische Darstellung des Spannungszustandes eines Körperpunktes. Die Spannungen *aller* Oberflächenelemente der Kugel A können in ähnlicher Weise auf geometrischem Wege bestimmt und graphisch dargestellt werden, wie es im vorigen Abschnitt für die Flächen des xz-Kreises beschrieben worden ist. In Abb. 8 bezeichnen die Strecken OX, OY, OZ Größe und Sinn der Hauptspannungen des Körperpunktes A; die Punkte der Kreise XY, XZ, YZ bestimmen also in der beschriebenen Weise die Spannungen der Flächen, welche die Kugelkreise xy, xz, yz berühren. Um für irgend ein anderes Oberflächenelement r der Kugel A die Spannungen σ, τ auf geometrischem Wege zu bestimmen, trägt man in Abb. 8 wie in Abb. 5 die Winkel X_1XQ und Z_1ZS gleich den gegebenen Winkeln $(r_x r)$ und $(r r_z)$ auf. Die zu den Kreisen YZ und XY konzentrischen

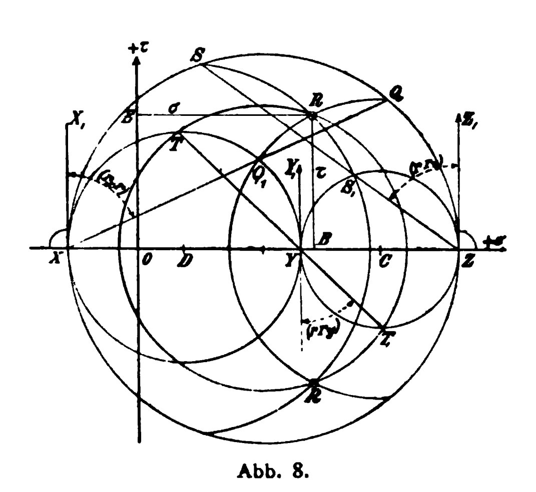


Abb. 8.

Kreise QQ_1 und SS_1 schneiden sich in dem Punkte R, dessen Koordinaten die Spannungen σ und τ der Fläche r darstellen. Man kann zur Probe noch einen dritten zu XZ konzentrischen Kreis TT_1 auftragen, dessen Punkte T, T_1 durch den Winkel

$$Y_1 Y T = (r r_y)$$

bestimmt sind. Auch dieser Kreis muß durch den Punkt R gehen. Die beschriebene Konstruktion beruht auf der folgenden Eigenschaft der graphischen Darstellung: *Allen Oberflächenelementen r der Kugel A, welche auf einer zu einer der Hauptebenen, z. B. yz, parallel gestellten Ebene liegen, entsprechen in der graphischen Darstellung Punkte R eines zu YZ konzentrischen Kreises.* Diese Eigenschaft ergibt sich aus der folgenden Ueberlegung. Der Punkt R von den Koordinaten σ, τ hat von dem Mittelpunkt C des Kreises YZ eine Entfernung, die durch die Gleichung

$$\overline{CR}^2 = \tau^2 + \left(\frac{(\sigma_z + \sigma_y)}{2} - \sigma\right)^2 = \varrho^2 + \frac{(\sigma_z + \sigma_y)^2}{4} - \sigma(\sigma_z + \sigma_y)$$

bestimmt wird. Setzt man in diese Gleichung die Werte von ϱ^2 und σ aus den Gleichungen 8) und 9) ein und beachtet, daß

$$\cos^2(rr_x) + \cos^2(rr_y) + \cos^2(rr_z) = 1$$

ist, so erhält man:

$$\overline{CR}^2 = \frac{1}{4}(\sigma_z - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_x)(\sigma_z - \sigma_x)\cos^2(rr_x).$$

Die Länge CR ist demnach *unabhängig* von den Winkeln (rr_y) und (rr_z) und hat für einen gegebenen Winkel (rr_x), also für alle Oberflächenelemente des entsprechenden Kugelkreises, eine *unveränderliche* Größe, die durch die Längen CQ und CQ_1 bestimmt ist; denn Q ist der Punkt auf dem XZ-Kreise, der dem Winkel (rr_x) entspricht.

Die beiden Kreise von den Halbmessern CQ und DS schneiden sich in *zwei* zur σ-Achse symmetrisch liegenden Punkten R. Es entspricht dies dem Umstande, daß durch die drei Winkel (rr_x), (rr_y), (rr_z) auf der Kugel *acht* Oberflächenelemente bestimmt werden, die in oben beschriebener Weise nur durch den Sinn ihrer *Schub*spannungen sich voneinander unterscheiden. Da die Summe der beiden spitzen Winkel $(r_x r)$ und (rr_z) größer oder mindestens gleich 90° ist, so bedecken die Punkte R die von den Kreisen XY, XZ, YZ eingeschlossenen Bogendreiecke. Indem man für eine Reihe von eingeschriebenen Werten der Winkel $(r_x r)$ und (rr_z) die Kreisbogen QQ_1 und SS_1 aufträgt, ergibt sich in Abb. 9 eine Uebersicht über den Spannungszustand des Punktes A. Es ist daran zu er-

innern, daß in der Geometrie der Massen eine graphische Darstellung genau von der Form der Abb. 9 vorkommt (vergl. Abhandlung III, 16).

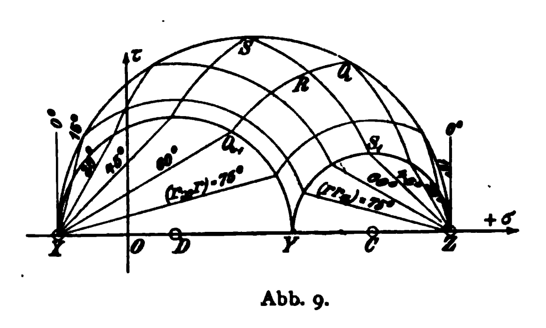


Abb. 9.

Der Kreis XZ enthält nicht allein die Punkte, in welchen σ und τ ihre Größtwerte erreichen, sondern auch alle Punkte, in denen bei konstanter Abszisse σ die Ordinaten τ ihre Größtwerte annehmen. Da diese Punkte hauptsächlich in Betracht kommen, so wird im folgenden XZ der *Hauptkreis* der graphischen Darstellung des Spannungszustandes genannt.

7. Die graphische Darstellung der Formänderung eines isotropen Körpers innerhalb der Elastizitätsgrenzen. Wenn die Elastizitätseigenschaften des Materials nach allen Richtungen einander gleichen, so werden sie innerhalb der Elastizitätsgrenzen bestimmt durch *zwei* konstante Größen: den Elastizitätsmodul ε und die Poissonsche Zahl m. Die Kanten eines unendlich kleinen Würfels A von den Richtungen der Hauptspannungen dieses Körperelements und der ursprünglichen Länge *eins* erleiden durch jene Spannungen keine Richtungsänderungen, dagegen Längenänderungen von den Größen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma_x - m\,(\sigma_y + \sigma_z)}{\varepsilon} &= \frac{\sigma'_x}{\varepsilon} \\ \frac{\sigma_y - m\,(\sigma_z + \sigma_x)}{\varepsilon} &= \frac{\sigma'_y}{\varepsilon} \\ \frac{\sigma_z - m\,(\sigma_x + \sigma_y)}{\varepsilon} &= \frac{\sigma'_z}{\varepsilon}. \end{aligned}\right| \qquad (13)$$

Man nennt σ'_x, σ'_y, σ'_z die *reduzierten* Hauptspannungen des Körperpunktes A.

Die Koordinaten des Oberflächenelements r der Kugel A, deren unendlich kleiner Halbmesser gleich *eins* gesetzt werden möge, haben in bezug auf die Hauptachsen im spannungslosen Zustande der Kugel die Größen

$$\cos(rr_x),\quad \cos(rr_y),\quad \cos(rr_z),$$

und diese verwandeln sich durch die elastische Formänderung in die Größen:

$$\cos(r r_x)\left(1+\frac{\sigma'_x}{\varepsilon}\right),\quad \cos(r r_y)\left(1+\frac{\sigma'_y}{\varepsilon}\right),\quad \cos(r r_z)\left(1+\frac{\sigma'_z}{\varepsilon}\right).$$

Bezeichnet man mit $\frac{\varrho'}{\varepsilon}$ den Deformationsweg des Oberflächen elements r, so ist demnach:

$$\left.\begin{aligned} \varrho' \cos(\varrho' r_x) &= \sigma'_x \cos(r r_x) \\ \varrho' \cos(\varrho' r_y) &= \sigma'_y \cos(r r_y) \\ \varrho' \cos(\varrho' r_z) &= \sigma'_z \cos(r r_z). \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Man nennt ϱ' die *reduzierte* Spannung des Oberflächenelements r und erkennt aus der Uebereinstimmung der Gleichungen 14) und 7), daß zwischen den *reduzierten* Spannungen ϱ', σ'_x, σ'_y, σ'_z genau dieselben Beziehungen bestehen, wie zwischen den wirklichen Spannungen ϱ, σ_x, σ_y, σ_z. Es kann daher die oben beschriebene graphische Darstellung ohne weiteres auch auf die reduzierten Spannungen angewandt werden. Die reduzierte Spannung ϱ' kann zerlegt werden in die *Normal*komponente

$$\varrho' \cos(\varrho' r) = \sigma'$$

und in die *Schub*komponente

$$\varrho' \sin(\varrho' r) = \tau'.$$

Die Größe $\frac{\sigma'}{\varepsilon}$ bezeichnet die *Dehnung* des Radius r, während die Größe $\frac{\tau'}{\varepsilon}$ die *Schiebung* des Oberflächenelements r in der Richtung der Kugeltangente angibt.

Die Anwendung der vorstehenden Beziehungen ist großen Beschränkungen unterworfen. Die Gleichungen 13) gelten nur innerhalb der Elastizitätsgrenzen, und diese Grenzen sind für manche Baustoffe, z. B. Steine und Gußeisen, so eng, daß für solche Stoffe jene Beziehungen ihre praktische Bedeutung fast ganz verlieren. Jenseits der Elastizitätsgrenzen sind die Größen ε und m veränderlich, und das Gesetz der Aenderungen ist nur sehr unvollkommen bekannt. Nur soviel ist bekannt, daß selbst von einer annähernden Gültigkeit jener Gleichungen, wenigstens in der Nähe der Bruchgrenze, nicht die Rede sein kann.

8. Die älteren Hypothesen über die Ursachen der Elastizitätsgrenzen und des Bruches. Im folgenden ist wiederholt von einer Reihe von Spannungszuständen die Rede, die der kürzeren Bezeichnung wegen numeriert werden sollen. Die Zu-

stände I bis III liegen an der *Bruchgrenze* und können durch ihre Hauptspannungen dargestellt werden:

$$\text{I: } \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = +\varkappa_1$$
$$\text{II: } \sigma_x = -\varkappa_2, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0$$
$$\text{III: } \sigma_x = -\varkappa_3, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = +\varkappa_3.$$

Man nennt $\varkappa_1$ die *Zugfestigkeit*, $\varkappa_2$ die *Druckfestigkeit* und $\varkappa_3$ die *Drehungsfestigkeit* des Materials. Der ebenfalls an der Bruchgrenze liegende Spannungszustand IV ist dadurch bestimmt, daß die Schubspannung desjenigen Oberflächenelements, dessen Normalspannung gleich null ist, seinen größtmöglichen Wert $\varkappa_4$ erreicht. Man nennt $\varkappa_4$ die *Schubfestigkeit* des Materials. Die Spannungszustände V, VI und VII berühren die *Elastizitätsgrenzen* des Materials und können wiederum durch ihre Hauptspannungen dargestellt werden:

$$\text{V: } \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = +\varkappa_5$$
$$\text{VI: } \sigma_x = -\varkappa_6, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0$$
$$\text{VII: } \sigma_x = -\varkappa_7, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = +\varkappa_7.$$

Man nennt $\varkappa_5$ die Elastizitätsgrenze der *Zug*spannungen, $\varkappa_6$ die Elastizitätsgrenze der *Druck*spannungen und $\varkappa_7$ die Elastizitätsgrenze der *Drehungs*spannungen. Die folgenden Bemerkungen sollen nur die wichtigsten Punkte hervorheben, in welchen die älteren Annahmen mit der Erfahrung in Widerspruch sich befinden.

Erste Hypothese. Die ältesten Versuche bezogen sich auf die Bestimmung der Zugfestigkeit $\varkappa_1$ und der Druckfestigkeit $\varkappa_2$, und hieran knüpfte sich die nächstliegende Annahme, daß diese Grenzen auch für alle anderen Spannungszustände gültig seien. Nach dieser Annahme kann die Bruchgrenze dargestellt werden durch zwei zur τ-Achse parallel gerichtete gerade Linien $B_1 C_1$, $B_2 C_2$ (Abb. 10), deren Abszissen die Größen

$$\sigma = +\varkappa_1 \text{ und } \sigma = -\varkappa_2$$

haben. Die Hauptkreise der Spannungszustände I, II, III, IV erhalten die in Abb. 10 angegebenen Lagen. Demnach wäre die Drehungsfestigkeit $\varkappa_3$ gleich dem numerisch kleineren Werte der

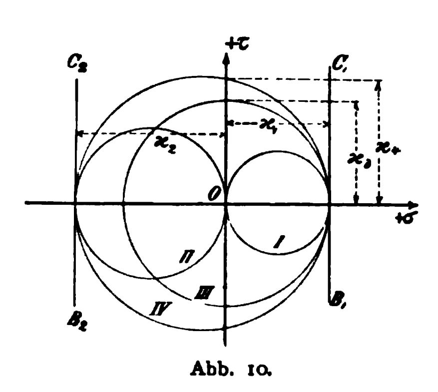


Abb. 10.

beiden Spannungen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$, in dem Beispiel der Abb. 10 also gleich $\varkappa_1$, und die Schubfestigkeit $\varkappa_4$ würde die Größe

$$\varkappa_4 = \sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}$$

annehmen. Diese einfachen Beziehungen werden durch die Erfahrung keineswegs bestätigt. Auch widerspricht die Tatsache, daß die Hauptspannung σ_x die Grenze $-\varkappa_2$ weit überschreiten kann, wenn die beiden anderen Hauptspannungen σ_y und σ_z *negative* Werte annehmen, wie es z. B. in tiefliegenden Gebirgsschichten ohne Zweifel der Fall ist.

Zweite Hypothese. Da die Elastizitätsgrenzen Formänderungszustände bezeichnen, nämlich diejenigen Zustände, bei deren Ueberschreitung *bleibende* Formänderungen eintreten, so lag die Annahme nahe, daß für diese Zustände nicht *Grenzspannungen*, sondern *Grenzdehnungen* maßgebend seien. Man nahm demgemäß an, die Elastizitätsgrenze eines isotropen Körpers werde jedesmal überschritten bei einem bestimmten, von der Materialbeschaffenheit abhängigen *Grenzwerte der positiven Dehnung*. Da für alle isotropen Stoffe nahezu übereinstimmend

$$m = \frac{1}{4}$$

ist, so wird für jeden durch seine Hauptspannungen gegebenen Zustand die größte positive Dehnung durch die Zahl

$$\frac{\sigma_z - \frac{1}{4}(\sigma_y + \sigma_x)}{\varepsilon} = \frac{4\sigma_z - \sigma_y - \sigma_x}{4\,\varepsilon} \tag{15}$$

bestimmt. Für die an der Elastizitätsgrenze liegenden Spannungszustände V, VI, VII nimmt diese Zahl die Werte an:

$$\frac{\varkappa_5}{\varepsilon}, \quad \frac{\varkappa_6}{4\varepsilon}, \quad \frac{5\varkappa_7}{4\varepsilon}.$$

Wenn der Hypothese gemäß diese drei Dehnungen gleich groß wären, so müßte sich für jedes gleichartige Material das Verhältnis

$$\varkappa_5 : \varkappa_6 : \varkappa_7 = 1 : 4 : 0{,}8$$

ergeben. Die Erfahrung bestätigt weder die Unveränderlichkeit dieser Verhältniszahlen, noch deren Größen. Die zuverlässigsten Ergebnisse, die hier zum Vergleich herangezogen werden können, verdanken wir *Bauschinger*, der mit einer Reihe von Stahl- und Flußeisensorten vergleichende Versuche zur Bestimmung der Grenzwerte

$\varkappa_5, \varkappa_6, \varkappa_7$ angestellt hat. Die unten ausführlicher mitgeteilten Ergebnisse zeigen, daß für jene Materialien nahezu

$$\varkappa_5 : \varkappa_6 : \varkappa_7 = 1 : 1 : 0{,}5$$

ist, daß also die Verhältniszahlen auch nicht annähernd die aus der Hypothese sich ergebenden Werte haben.

Man hat sich noch weiter von der Wirklichkeit entfernt, indem man die obigen, auf die Elastizitätsgrenzen, also auf elastische Formänderungen sich beziehenden Folgerungen ohne weiteres auf die Zustände an der Bruchgrenze übertrug. Auf solche Weise ist z. B. die unhaltbare Behauptung entstanden, die Drehungsfestigkeit $\varkappa_3$ betrage für jedes isotrope Material das 0,8-fache der Zugfestigkeit $\varkappa_1$. Ebensowenig läßt sich die oft ausgesprochene Behauptung, beim Druckversuch werde der Bruch durch die positive Querdehnung herbeigeführt, durch irgend eine bestimmte Erfahrungstatsache begründen.

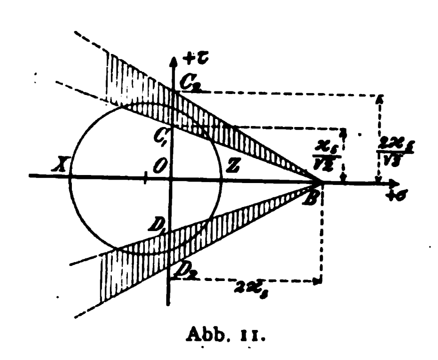


Abb. 11.

Man kann den Inhalt der Hypothese vermittels unserer graphischen Darstellung veranschaulichen, indem man für die beiden Grenzfälle

$$\sigma_y = \sigma_x \quad \text{und} \quad \sigma_y = \sigma_z$$

die Gesamtheit der Hauptkreise der an der Elastizitätsgrenze liegenden Spannungszustände in Betracht zieht. Im ersten Grenzfalle hat die größte positive Dehnung nach Gleichung 15) den konstanten Wert

$$\frac{\varkappa_5}{\varepsilon} = \frac{2\,\sigma_z - \sigma_x}{2\,\varepsilon}.$$

Die zugehörigen Hauptkreise, deren Durchmesser XZ die Bedingung

$$\sigma_x = 2\,\sigma_z - 2\,\varkappa_5$$

erfüllen, berühren zwei Gerade BC_1, BD_1, welche auf den Koordinatenachsen die Strecken

$$OB = 2\,\varkappa_5 \quad \text{und} \quad OC_1 = OD_1 = \frac{\varkappa_5}{\sqrt{2}}$$

abschneiden (Abb. 11).

Im *zweiten* Grenzfalle hat die größte positive Dehnung nach Gleichung 15) die konstante Größe

$$\frac{\varkappa_5}{\varepsilon} = \frac{3\,\sigma_z - \sigma_x}{4\,\varepsilon};$$

die Hauptkreise dieser Spannungszustände berühren die beiden Geraden BC_2, BD_2, die auf der τ-Achse die Strecken

$$OC_2 = OD_2 = \frac{2\,\varkappa_5}{\sqrt{3}}$$

abschneiden. In jedem Zwischenfalle, wenn also

$$\sigma_x < \sigma_y < \sigma_z$$

ist, schneidet der einen Spannungszustand an der Elastizitätsgrenze darstellende Hauptkreis XZ (Abb. 11) die Schenkel des Winkels C_1BD_1, liegt aber innerhalb des Winkels C_2BD_2.

Dritte Hypothese. Die Abweichungen von den Erfahrungstatsachen konnten ermäßigt werden, indem man zu der zweiten Hypothese die Bedingung hinzufügte, daß auch die größte *negative* Dehnung einen durch Versuche zu bestimmenden Grenzwert $-\frac{\varkappa_6}{\varepsilon}$ nicht überschreiten dürfe. Man nahm also an, daß für jeden an der Elastizitätsgrenze liegenden Spannungszustand entweder

$$\sigma_z - \frac{1}{4}(\sigma_y + \sigma_x) = \varkappa_5,$$

oder

$$\sigma_x - \frac{1}{4}(\sigma_y + \sigma_z) = -\,\varkappa_6$$

sein müsse. Um diese Annahme in der Zeichensprache der graphischen Darstellung auszudrücken, ist in Abb. 12:

$$OB = 2\,\varkappa_5, \quad OC_1 = OD_1 = \frac{\varkappa_5}{\sqrt{2}}, \quad OC_2 = OD_2 = \frac{2\,\varkappa_5}{\sqrt{3}},$$

$$OE = -\,2\,\varkappa_6, \quad OF_1 = OG_1 = \frac{\varkappa_6}{\sqrt{2}}, \quad OF_2 = OG_2 = \frac{2\,\varkappa_6}{\sqrt{3}}$$

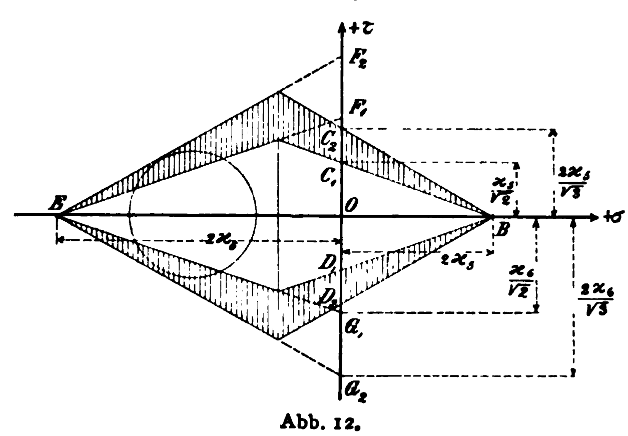


Abb. 12.

aufzutragen. Der Hauptkreis eines jeden Spannungszustandes an der Elastizitätsgrenze soll nach der vorliegenden Hypothese die *innere* Umgrenzung der schraffierten Fläche, *nicht* aber die *äußere* schneiden.

Im Spannungszustande VII:

$$\sigma_x = -\varkappa_7, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = +\varkappa_7$$

haben die Grenzwerte der positiven und der negativen Dehnungen die Größen $+\frac{5\varkappa_7}{4\varepsilon}$ und $-\frac{5\varkappa_7}{4\varepsilon}$. Der Hypothese zufolge müßte also die Drehungsspannung an der Elastizitätsgrenze $\varkappa_7$ dem *kleineren* der beiden Werte $\frac{4\varkappa_5}{5}$ und $\frac{4\varkappa_6}{5}$ gleich sein. Nach den vorliegenden Erfahrungen ist es sehr unwahrscheinlich, daß die kleinere der beiden Verhältniszahlen $\frac{\varkappa_7}{\varkappa_5}$ und $\frac{\varkappa_7}{\varkappa_6}$ einen für alle gleichartigen Stoffe *konstanten* Wert habe, und das oben angeführte Beispiel von Eisen und Stahl zeigt nicht das Verhältnis $\frac{4}{5}$, sondern $\frac{1}{2}$. Es ist ferner außerordentlich unwahrscheinlich, daß der durch den Punkt E (Abb. 12) dargestellte Spannungszustand:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -2\varkappa_6$$

an der Elastizitätsgrenze liege.

Vierte Hypothese. Die Erscheinungen, welche beim Bruche durch Druck und beim Fließen plastischer Stoffe beobachtet werden, haben zu der Annahme geführt, daß für die *Bruchgrenze* und für die *Fließgrenze* nicht die Größe der Hauptspannungen selbst, sondern ihre *größte Differenz* $(\sigma_z - \sigma_x)$ maßgebend sei. Man nimmt hierbei an, daß beim Brechen und Fließen die Körperteile in denjenigen Flächen sich gegeneinander verschieben, welche die größten *Schub*spannungen

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}$$

aufzunehmen haben, und die gegen die Richtungen der beiden Hauptspannungen σ_x und σ_z um 45° geneigt sind. Bekanntlich geraten alle Körper, auch die spröden, bei *allseitig hohem Druck* in den *plastischen* Zustand, in welchem sie, ohne zu brechen, große Formänderungen erleiden können. Es ist möglich, daß die Hypothese für diesen plastischen Zustand annähernd zutrifft, daß also bei *hohen negativen* Werten von σ_z die Durchmesser der Hauptkreise für die Spannungszustände auch der spröden Stoffe an der Fließgrenze annähernd konstante Werte annehmen. Sie trifft ferner zu bei allen

plastischen Stoffen, zu denen z. B. das weiche *Schmied-* und *Flußeisen* zu zählen ist. Dagegen kann sie eine *allgemeine* Gültigkeit nicht in Anspruch nehmen; denn sie steht in Widerspruch mit der allgemein bekannten Tatsache, daß die Hauptkreise der drei Spannungszustände I, II, III für die meisten gleichartigen Stoffe und Baumaterialien Durchmesser von sehr verschiedenen Größen haben.

9. Begründung einer neuen Hypothese für isotrope Stoffe. Die zuletzt besprochene Hypothese scheint der Wahrheit insofern näher zu kommen, als sie die Spannungen der Gleit- und Bruchflächen als die maßgebenden Größen in Betracht zieht; denn das Gleiten und Brechen wird doch wohl zunächst abhängig sein von den Spannungen derjenigen Flächen, in welchen diese Bewegungen wirklich stattfinden. Dagegen berechtigt keine Erfahrungstatsache zu der Annahme, der Eintritt der Bewegungen sei allein abhängig von der *Schubspannung* und *unabhängig* von der *Normalspannung* jener Flächen. Die Unzulässigkeit dieser Annahme tritt schon zutage, wenn man ein Material sich vorstellt, dessen Schubfestigkeit sehr klein oder gleich null ist. Der Verschiebung zweier Körperteile gegeneinander würde in einem solchen Falle die *Reibung* sich entgegensetzen, die von der Größe des *Normaldruckes* wesentlich abhängt. Wir halten es daher für zweckmäßig, der Annahme die allgemeinere und vorsichtigere Fassung zu geben: *Die Elastizitätsgrenze und die Bruchgrenze eines Materials werden bestimmt durch die Spannungen der Gleit- und Bruchflächen.* Diese Annahme würde auch dann noch zutreffen, wenn für gewisse, bei der vierten Hypothese besprochene Fälle sich ergeben sollte, daß *nur* die Schubspannung maßgebend sei. Vielleicht wäre es vorzuziehen, anstatt der wirklichen die *reduzierten* Spannungen der Gleitflächen als die maßgebenden Größen in Betracht zu ziehen. Bei dem gegenwärtigen Stande unserer Erfahrungen, besonders über die Zustände in der Nähe der Bruchgrenze, ist dies jedoch untunlich, und wahrscheinlich würden sich auch die Ergebnisse nicht erheblich ändern.

Wir betrachten nun einen Körperpunkt, der in einem Grenzzustande, z. B. an der Elastizitätsgrenze, sich befindet, und bezeichnen mit σ_1, τ_1 die Spannungen einer in diesem Punkte sich bildenden Gleitfläche unmittelbar vor Ueberschreitung der Grenze. Wir lassen die Normalspannung σ_1 dieser Fläche unverändert und stellen die Frage: Durch *welche Aenderung der Schubspannung* τ_1 wird die Grenzüberschreitung herbeigeführt werden können? Mit sehr großer Wahrscheinlichkeit wird anzunehmen sein, daß hierzu

eine *Vergrößerung* von τ_1 erforderlich ist, weil eine *Verschiebung* nicht wohl durch eine *Verminderung* der Schubspannung veranlaßt werden kann. Durch diese Ueberlegung gelangen wir zu der folgenden Erweiterung der Hypothese: *Die Schubspannung der Gleitfläche erreicht an der Grenze einen von der Normalspannung und von der Materialbeschaffenheit abhängigen Größtwert.*

In der graphischen Darstellung eines Grenzzustandes, Abb. 13, muß der einer Gleitfläche entsprechende, durch die Koordinaten σ_1, τ_1 bestimmte Punkt G_1 auf dem *Hauptkreise* XZ liegen; denn dieser Kreis enthält innerhalb des dargestellten Spannungszustandes alle Punkte, die bei gegebener Abszisse σ_1 die *größtmögliche* Ordinate τ_1 haben. Wir schließen hieraus: *Jede in einem Körperpunkte entstehende Gleitfläche oder Bruchfläche geht durch die y-Achse dieses Punktes, also durch die Richtung der mittleren Hauptspannung* σ_y. Wenn die mittlere Hauptspannung σ_y gleich einer der beiden anderen, z. B. gleich σ_x ist, so wird die Richtung der y-Achse unbestimmt und kann mit jeder Richtung in der xy-Ebene zusammenfallen.

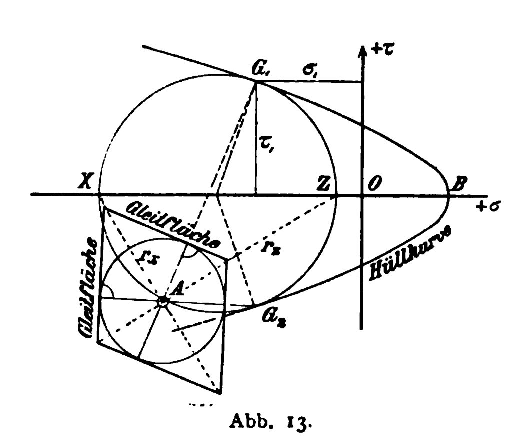


Abb. 13.

Der einer Gleitfläche entsprechende Punkt G_1 muß ferner der Kurve angehören, von der die Hauptkreise aller an der Grenze liegenden Spannungszustände eingehüllt werden; denn diese Hüll- oder Grenzkurve bildet den geometrischen Ort desjenigen Punktes, dessen Ordinate, innerhalb der an der Grenze liegenden Spannungszustände, bei gegebener Abszisse σ_1 ihren größten Wert τ_1 erreicht. Die Hüllkurve ist *symmetrisch* zur σ-Achse geformt, weil die Mittelpunkte aller Hauptkreise auf dieser Achse liegen. Sie berührt also jeden an der Grenze liegenden Hauptkreis in *zwei* Punkten G_1, G_2, durch die für den betreffenden Körperpunkt *zwei* Gleitflächen bestimmt werden: *In jedem Körperpunkte, in welchem die Elastizitätsgrenze oder die Bruchgrenze überschritten wird, bilden sich zwei Gleitflächen; dieselben schneiden sich in der y-Achse des Körperpunktes und schließen mit der Richtung einer jeden der Hauptspannungen* σ_x *und* σ_z *gleich große Winkel ein.* Bei gleicher Größe zweier Haupt-

spannungen, z. B. σ_x und σ_y, ist zwar die zur Hauptspannung σ_z normal gestellte Ebene xy bestimmt, aber die Achsen x und y können in dieser Ebene jede Richtung annehmen. Von der Stellung der Gleitflächen kann in diesem Falle nur ausgesagt werden, daß sie sich in einer Geraden der xy-Ebene schneiden und mit der Hauptspannung σ_z gleiche Winkel einschließen.

Zur Bestimmung der Hüllkurven, durch welche die Elastizitätsgrenze und die Bruchgrenze eines Materials dargestellt werden, liefert die Erfahrung leider nur wenige und unsichere Anhaltspunkte; insbesondere ist uns über die Elastizitätsgrenze bei verschiedenen Spannungszuständen nur wenig bekannt. Die folgenden Bemerkungen beziehen sich daher zunächst auf die *Bruchgrenzkurve*. Die Kurve schneidet wahrscheinlich die *positive* σ-Achse. Die unbekannte Abszisse des Schnittpunktes B bezeichnet den Spannungszustand, durch den bei gleicher positiver Größe aller drei Hauptspannungen der Bruch herbeigeführt wird. Ein solcher Spannungszustand kann zwar durch den Versuch nicht hergestellt werden; es ist jedoch kaum zu bezweifeln, daß es möglich sein würde, durch allseitig gleich große Zugspannungen den Bruch herbeizuführen. Dagegen ist es wahrscheinlich unmöglich, einen gleichartigen Körper durch gleichmäßigen *Druck* von allen Seiten zu zerbrechen. *Föppl* ist es zwar gelungen, Probekörper aus Zementmörtel und aus Sandstein durch einen starken Flüssigkeitsdruck zum Bruch zu bringen; er nimmt jedoch an, daß mangelhafte Gleichartigkeit des Materials mitgewirkt habe, und wahrscheinlich wird auch das ungleichmäßige Eindringen der Flüssigkeit in die Poren der Versuchskörper nicht ohne Einfluß geblieben sein. Jedenfalls wird der Schnittpunkt der Grenzkurve mit der negativen σ-Achse, wenn nicht unendlich fern, so doch sehr fern liegen.

In der Regel ist die Druckfestigkeit des Materials *größer* als die Zugfestigkeit; in der Nähe der τ-Achse vermindert sich daher die Ordinate der Grenzkurve bei positiver Zunahme der Abszisse σ.

Es ist ferner wahrscheinlich, daß jedes Material bei allseitig hohem *Druck* in den plastischen Zustand versetzt wird, in dem die Schubspannung der Gleitflächen nahezu konstant und also unabhängig von der großen negativen Normalspannung wird. Hieraus ist zu schließen, daß die Grenzkurve ihre konkave Seite der σ-Achse zukehrt, und daß die Tangentenrichtung mit wachsender negativer Abszisse des Berührungspunktes der Richtung der σ-Achse sich nähert.

10. Vereinfachte Darstellung der Grenzkurven. Bei Festigkeitsversuchen kommen fast ausschließlich solche Spannungszustände in Betracht, welche zwischen den beiden Zuständen

$$\text{I: } \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = + \varkappa_1$$
$$\text{und II: } \sigma_x = - \varkappa_2, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0$$

liegen. Ebenso kommen bei der Anwendung der Festigkeitslehre auf die Berechnung der Baukonstruktionen in der Regel nur solche Spannungszustände in Frage, die innerhalb der Elastizitätsgrenzen auf einem kleinen Gebiet, nämlich zwischen den Zuständen

$$\text{V: } \sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = + \varkappa_5$$
$$\text{und VI: } \sigma_x = - \varkappa_6, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0$$

liegen. Innerhalb dieser Grenzen wird man ohne großen Fehler die Hüllkurven ersetzen können durch die äußeren Tangenten der beiden Kreise, welche die bezeichneten Zustände I, II oder V, VI darstellen. Aus dieser vereinfachten Darstellung ergeben sich Beziehungen, welche durch Versuche geprüft werden können.

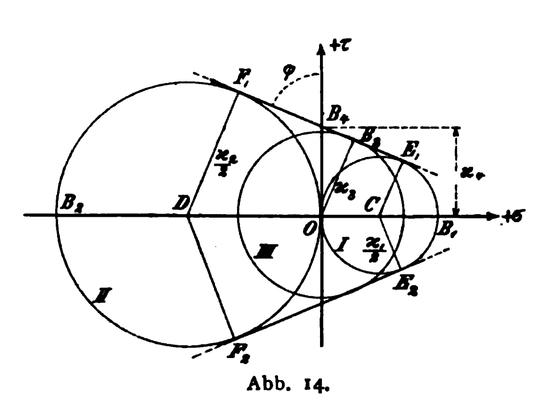


Abb. 14.

Die Abb. 14 enthält für ein Beispiel die Hauptkreise der Spannungszustände I, II, III an der Bruchgrenze, die durch die Tangenten E_1F_1, E_2F_2 dargestellt wird. Für dieses Beispiel ist also:

$$OB_1 = \varkappa_1, \quad OB_2 = \varkappa_2, \quad OB_3 = \varkappa_3, \quad OB_4 = \varkappa_4.$$

Zwischen diesen vier positiven Größen bestehen die Beziehungen

$$\left(\frac{\varkappa_2}{2} - \varkappa_3\right) : \left(\varkappa_3 - \frac{\varkappa_1}{2}\right) = \varkappa_2 : \varkappa_1,$$

und weil

$$B_4E_1 = B_4F_1 = B_4O = \varkappa_4$$

ist, so verhält sich

$$\varkappa_4 : \varkappa_3 = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2} : 2\varkappa_4,$$

woraus folgt:

$$\varkappa_3 = \frac{\varkappa_1 \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2} \tag{16}$$

und

$$\varkappa_4 = \frac{1}{2} \sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}. \tag{17}$$

In Abb. 15 wird ein Spannungszustand an der Bruchgrenze innerhalb des hier in Betracht gezogenen Gebietes dargestellt. Die zu AG_1 und AG_2 normal gestellten Bruchflächen des Körperpunktes A bilden zwei Winkel φ und $(180^\circ - \varphi)$, welche durch die Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{\varkappa_2 + \varkappa_1} \qquad (18)$$

(vergl. Abb. 14) bestimmt werden. *Der spitze Winkel φ wird durch die Richtung AX von σ_x, der stumpfe $(180^\circ - \varphi)$ durch die Richtung AZ von σ_z halbiert.*

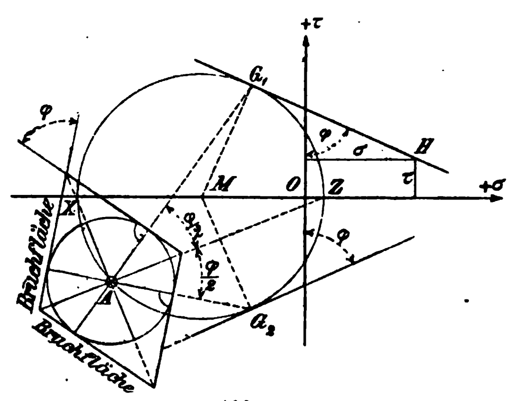


Abb. 15.

In allen Spannungszuständen an der Bruchgrenze ist die Größe des Winkels φ, also die Stellung der Gleitflächen gegen die Hauptebenen der Körperpunkte unverändert dieselbe.

Man ersieht aus den Abb. 14 und 15, daß mit Berücksichtigung der Vorzeichen:

$$OM = -\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}, \quad MX = MZ = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2},$$

folglich

$$\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} - \varkappa_3 = -\frac{\sigma_z + \sigma_x}{2}\cos\varphi$$

ist. Zwischen den beiden Hauptspannungen σ_x, σ_z eines Zustandes an der Bruchgrenze ergibt sich hieraus die Beziehung:

$$\sigma_z \varkappa_2 - \sigma_x \varkappa_1 = \varkappa_1 \varkappa_2. \qquad (19)$$

Die Koordinaten σ, τ irgend eines Punktes H (Abb. 15) der Tangente G_1H sind voneinander abhängig durch die Gleichung:

$$\tau = \varkappa_4 - \sigma \operatorname{cotg}\varphi.$$

Daher ist die Gleichung der *beiden* Geraden, welche die Bruchgrenze darstellen:

$$\pm\tau = \frac{\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}}{2} - \sigma\frac{\varkappa_2 - \varkappa_1}{2\sqrt{\varkappa_1 \varkappa_2}}. \qquad (20)$$

Ganz ähnliche Beziehungen bestehen für die Elastizitätsgrenze; um dieselben zu bilden, ist $\varkappa_1$ mit $\varkappa_5$, $\varkappa_2$ mit $\varkappa_6$ und $\varkappa_3$ mit $\varkappa_7$ zu vertauschen.

11. Prüfung der neuen Hypothese durch die Erfahrung.

1. *Die Fließfiguren.* Die Oberfläche eines blank polierten Metallstabes bekommt, sobald beim Zugversuch die Elastizitätsgrenze überschritten wird, ein mattes Aussehen, als wenn sie von einem feinen Hauch oder Tau bedeckt wäre. Im weiteren Verlauf des Versuches wird der Hauch allmählich gröber, und es entwickelt sich in manchen Fällen aus diesen Unebenheiten der Oberfläche ein Liniennetz von auffallender Regelmäßigkeit. Die Abb. 16, 17 und 18 geben einige Beispiele, die dem Handbuch der Materialienkunde von *Martens* entnommen sind. Man kann, wie zuerst von *Pohlmeyer* geschehen ist, diese Erscheinung an Eisenstäben besonders deutlich sichtbar machen, indem man durch Glühen die polierte Oberfläche

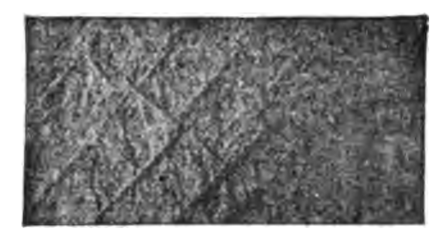


Abb. 16.

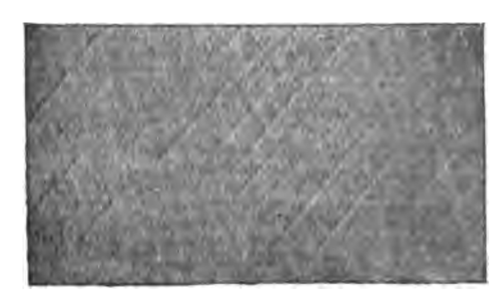


Abb. 17.



Abb. 18.

des Stabes mit einer dünnen Oxydschicht bedeckt. Die Linien erscheinen dann auf der blauschwarzen Fläche als helle Adern. Die Regelmäßigkeit der Erscheinung ist in empfindlicher Weise von der Gleichartigkeit der Oberflächenschicht abhängig. Jede Störung dieser Gleichartigkeit, die bei der Bearbeitung

des Probestücks durch Schlag, Druck oder andere äußere Einwirkungen entstanden ist, macht sich durch Unregelmäßigkeiten des Liniennetzes erkennbar; in manchen Fällen zeigt sich daher ein ziemlich verworrenes Gefüge. Auf diese Fließfiguren wurde zuerst im Jahre 1860 in Dinglers Journal von *Lüders* aufmerksam gemacht. Eingehende Mitteilungen enthält das Handbuch der Materialienkunde von Martens, in dem besonders auf eine Abhandlung von *Kirsch* in den Mitteilungen aus den technischen Versuchsanstalten zu Berlin, 1887, 1888 und 1889 Bezug genommen wird.

Die ausführlichsten und bestimmtesten Angaben enthält das im Jahre 1896 erschienene Buch des französischen Offiziers *L. Hartmann: „Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts"*. Dieses Buch gibt Beschreibungen und zahlreiche Abbildungen von Fließfiguren, welche an Probestäben aus Eisen, Stahl, Kupfer, Zinn, Zink, Blei und anderen Metallen bei sehr verschiedenen Beanspruchungen durch Zug, Druck, Biegung, Stoß usw. beobachtet worden sind. Aus diesem reichhaltigen Material zieht der Verfasser folgende Schlüsse, die mit den Ergebnissen unserer Hypothese in bemerkenswerter Weise übereinstimmen:

Die an einem gleichartigen Körper nach Ueberschreiten der Elastizitätsgrenze zu beobachtenden Formänderungen erstrecken sich nicht auf die kleinsten Teile des Körpers. Sie bestehen vielmehr darin, daß Körperteile von endlicher Ausdehnung in *zwei* Gruppen von Gleitschichten sich gegeneinander verschieben. Die Spuren dieser Gleitschichten an der Oberfläche des Körpers bilden die Fließfiguren. *Bei gleichbleibender Art und wachsender Größe der Inanspruchnahme bleibt die Stellung der Gleitschichten unverändert bis zum Bruch.* Oft fallen die Bruchflächen zusammen mit einzelnen Gleitschichten. Die benachbarten Gleitschichten *einer* Gruppe sind parallel zueinander gestellt. Beide Gruppen kreuzen sich unter einem Winkel φ, dessen *konstante Größe nur von der Materialbeschaffenheit, also nicht von dem Spannungszustande der betreffenden Körperpunkte und nicht von der Größe der Spannungen abhängig ist. Bei gleicher Gattung, aber wechselnder Beschaffenheit des Materials weicht der Schnittwinkel* φ *desto mehr von 90° ab, je härter und spröder das Material ist, je mehr also die Druckfestigkeit* $\varkappa_2$ *die Zugfestigkeit* $\varkappa_1$ *überwiegt* (vergl. Gleichung 18). Die Abweichung ist z. B. größer für harten Stahl als für weichen. In Prismen, die in ihrer Achsenrichtung gezogen oder gedrückt werden, wird der Gleitschichtenwinkel von der Achsenrichtung halbiert. Dieser von der Achsenrichtung halbierte Winkel ist in einem gezogenen Prisma

stets größer, in einem gedrückten Prisma stets kleiner als 90°, mit anderen Worten: *der spitze Winkel φ wird durch die Richtung von σ_x, der stumpfe $(180 - \varphi)$ durch die Richtung von σ_z halbiert* (vergl. Abb. 15). Für ein und dasselbe Material ergänzen sich die oben bezeichneten, bei Zug und Druck von der Achsenrichtung halbierten Winkel zu 180°. *Sie ändern sich nicht, wenn ein gerades Prisma in einer Achsenrichtung gezogen und gleichzeitig rechtwinklig zu dieser Richtung gedrückt wird.* In betreff der Einzelheiten muß auf das Buch von Hartmann verwiesen werden, da sie ohne zahlreiche Abbildungen nicht wiederzugeben sind.

Die in den deutschen Versuchsanstalten von Kirsch, Martens und anderen gemachten Beobachtungen widersprechen den vorstehenden Angaben nicht; sie sind aber weniger bestimmt als die Mitteilungen Hartmanns. Vielleicht ist dieser Unterschied dadurch begründet, daß Hartmann außer dem oben beschriebenen, auch von Pohlmeyer angewandten Verfahren noch ein zweites Hilfsmittel entdeckt hat, um die Fließfiguren deutlicher sichtbar zu machen. Das Material in unmittelbarer Nähe der Gleitschichten wird nämlich, vielleicht infolge einer Lockerung des Gefüges, von Säuren stärker angegriffen als die übrigen Körperteile. Wenn also der Probestab *während des Versuches* in ein Säurebad eingetaucht und der Einwirkung desselben eine Zeitlang ausgesetzt wird, so zeigen sich die Spuren der Gleitschichten an der Oberfläche als feine, vertiefte Linien. Es ist Hartmann gelungen, das Bestehen der Gleitflächen bereits *vor* dem Ueberschreiten der Elastizitätsgrenze nachzuweisen, und er schließt hieraus mit Recht, daß die elastischen Formänderungen auf demselben Wege zustande kommen wie die bleibenden.

2. Die Bruchflächen plastischer Materialien, insbesondere des Flußeisens. Ein Rundstab aus Flußeisen zeigt, wenn er beim Zugversuche bricht, die bekannte Einschnürung und darin eine *trichterförmige* Bruchfläche. Die Abb. 19 und 20 zeigen Beispiele aus dem Handbuch von Martens. Aus der Richtung der Kräfte, die auf den Stabteil in der Einschnürung von den benachbarten Körperteilen übertragen werden (Abb. 21), läßt sich erkennen, daß alle drei Hauptspannungen der Körperpunkte in diesem Stabteile *positiv* sind. Man kann die Hauptspannungen ihrer ungefähren Richtung nach durch die Bezeichnungen achsial, radial und tangential voneinander unterscheiden. Die achsiale Hauptspannung ist jedenfalls die größte und daher mit σ_z zu bezeichnen. Am *Rande der Bruchfläche* nähert sich die radial gerichtete Haupt-

spannung notwendig der Größe null und trägt daher die Bezeichnung σ_x. Für die Körperpunkte am Rande geht daher die Bruchfläche durch die mit der y-Achse zusammenfallende Tangente, und da für weiches Flußeisen annähernd $\varkappa_1 = \varkappa_2$ und also $\varphi = 90^\circ$ ist, so muß der Hypothese gemäß die Bruchfläche mit der Achse ungefähr einen Winkel von 45° einschließen. Dieser Bedingung entspricht der aus der Erfahrung bekannte Randtrichter (Abb. 19).

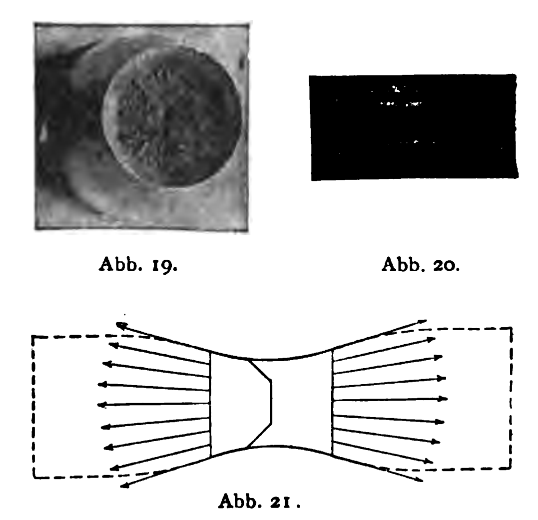


Abb. 19. Abb. 20.

Abb. 21.

In den Körperpunkten des *mittleren* Teils der Bruchfläche kann die radiale Hauptspannung gleich, größer oder kleiner als die tangentiale sein, und es läßt sich aus theoretischen Gründen nicht entscheiden, welcher dieser drei Fälle der wahrscheinlichere ist. Nur im Mittelpunkt der Bruchfläche muß *der Symmetrie wegen* σ_x gleich σ_y sein. Nach den Mitteilungen des Handbuches von Martens scheinen in Wirklichkeit alle drei Fälle vorzukommen, also von Zufälligkeiten abhängig zu sein.

Wenn σ_x gleich σ_y ist, so wird die Lage der y-Achse in der zur Stabachse rechtwinklig gestellten Ebene unbestimmt. Beachtet man nun, daß die Körperpunkte, welche in der Mitte der Einschnürung dem Bruchzustande sich nähern, eine Schicht von nur geringer Höhe bilden, so ist der Hypothese gemäß anzunehmen, daß der mittlere Teil der Bruchfläche aus einer großen Anzahl von Flächenelementen besteht, die gegen die Stabachse ungefähr um 45° geneigt, im übrigen aber unregelmäßig gestellt sind. Wenn im Grenzfalle die bezeichnete Schicht unendlich dünn wird, so geht die beschriebene Bruchfläche in die zur Stabachse rechtwinklig gestellte Ebene über. Die Erfahrungstatsache, daß der mittlere Teil der Bruchfläche in manchen Fällen mit dieser Ebene nahezu zusammenfällt, widerspricht also keineswegs der Hypothese.

Die beiden anderen Fälle scheinen weniger häufig vorzukommen. Ist die radiale Hauptspannung größer als die tangentiale,

so fällt die *y*-Achse des betreffenden Körperpunktes mit seinem Halbmesser zusammen. Bei geringer Höhe der oben bezeichneten Schicht muß die Bruchfläche alsdann aus einer Anzahl von radial gerichteten Rücken und Tälern bestehen, die in den ebenfalls dem Handbuch von Martens entnommenen Beispielen in Abb. 22 u. 23 deutlich zu erkennen sind.

Ist endlich die *tangentiale* Hauptspannung die größere, so muß auch der mittlere Teil der Bruchfläche aus einer oder aus mehreren Kegelflächen oder Pyramiden bestehen, wie die Abb. 24 und 25 zeigen.

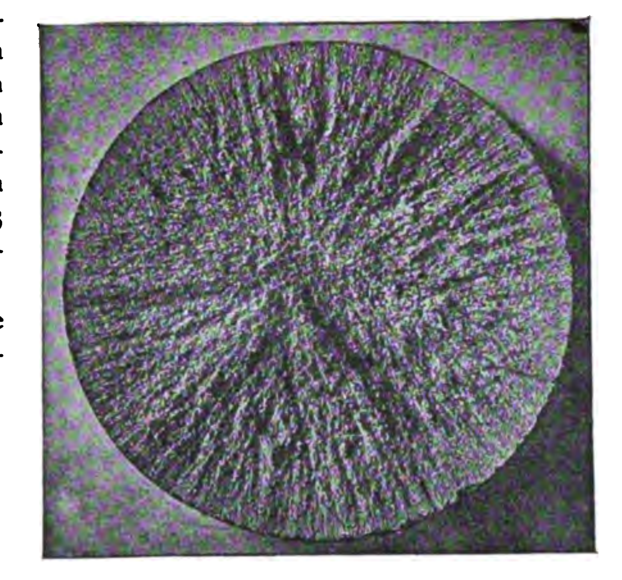


Abb. 22. Abb. 23.



Abb. 24.



Abb. 25.

3. **Die Bruchflächen spröder Körper beim Druckversuche.** Wenn ein Zylinder oder ein Prisma A (Abb. 26) durch Druck in der Achsenrichtung zum Bruche gebracht wird, so beginnt derselbe an den Kanten der Druckfläche. Infolge des Reibungswiderstandes, welchen die Druckplatten B, B der Querdehnung des Probestückes A entgegensetzen, bildet die Hauptspannung σ_x an den bezeichneten Stellen mit der Richtung des Druckes P einen Winkel α,

der sich dem Reibungswinkel mehr oder weniger nähert. Die Bruchflächen schließen mit der Richtung von σ_x Winkel von der Größe $\frac{1}{2}\varphi$ ein. Der Kegel oder die Pyramide über der Druckfläche hat daher an der Spitze einen Winkel von der Größe $2\alpha + \varphi$. Beide Winkel α und φ sind unbekannt, und ihre Schätzung ist sehr unsicher. Unter sonst gleichen Umständen wird der Winkel α der geringeren Querdehnung wegen desto kleiner sein, je härter und spröder das Material ist. Auch der Winkel φ ist für hartes Material kleiner als für weiches. Die Hypothese führt also zu der Folgerung, daß ***die sogenannten Bruchpyramiden unter sonst gleichen Umständen desto spitzer sein müssen, je härter und spröder das Material ist.*** Diese Folgerung wird von der Erfahrung durchaus bestätigt (vergl. *Bauschingers* Mitteilungen, Heft 6, S. 7).

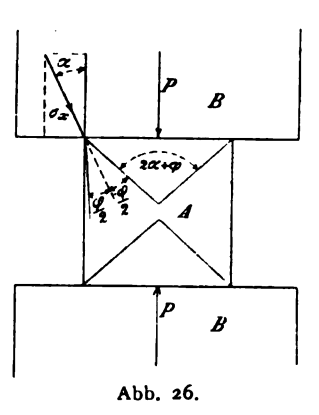


Abb. 26.

4. Die Elastizitätsgrenzen der Spannungszustände V, VI, VII. *Bauschinger* beschreibt im dritten Hefte seiner Mitteilungen Versuche mit neun verschiedenen Sorten Bessemereisen, durch die er die oben mit $\varkappa_5$, $\varkappa_6$, $\varkappa_7$ bezeichneten Elastizitätsgrenzen der *Zug-*, *Druck-* und *Drehungs*spannungen bestimmt hat.

k	$\varkappa_5$	$\varkappa_6$	$\varkappa_7$	$\frac{\varkappa_5 \varkappa_6}{\varkappa_5 + \varkappa_6}$
0,19	33	30	15	16
0,46	35	34	15	17
0,54	35	34	15	17
0,57	33	34	16	17
0,66	37	38	17	19
0,78	37	38	18	19
0,80	40	44	20	21
0,87	43	39	20	20
0,96	49	50	27	25

Die erste Reihe der vorstehenden Tabelle gibt den Kohlenstoffgehalt k des Probestückes in Hundertteilen an, die drei folgenden Reihen enthalten die Versuchswerte in kg/qmm, und in der letzten Reihe sind aus den Versuchswerten von $\varkappa_5$ und $\varkappa_6$ die Werte $\frac{\varkappa_5 \varkappa_6}{\varkappa_5 + \varkappa_6}$ berechnet, die $\varkappa_7$ unserer Hypothese gemäß nach Gleichung 16) annehmen müßte. Der Vergleich mit den Versuchswerten von $\varkappa_7$ ergibt eine sehr befriedigende Uebereinstimmung, während die ältere Annahme

$$\varkappa_7 = 0{,}8\, \varkappa_5$$

auch nicht annähernd bestätigt wird.

In *The Philosophical Magazine*, 1900 berichtet *James Guest* über sehr ausgedehnte und mit vollkommenen Hilfsmitteln angestellte Versuche zur Bestimmung der Elastizitätsgrenzen von Stahl, Flußeisen, Kupfer und Messing, insbesondere zur Feststellung des Einflusses der *zweiten* Hauptspannung σ_y. Als Versuchskörper kamen Rohre von 32 mm Durchmesser, 0,6 bis 0,9 mm Wandstärke und 300 mm Länge zur Verwendung. Diese Rohre konnten zugleich oder gesondert den Einwirkungen einer Zugkraft in der Achsenrichtung, eines Drehmomentes und eines inneren Flüssigkeitsdruckes ausgesetzt werden. Mit verhältnismäßig großer Bestimmtheit ließen sich hierdurch alle Spannungszustände an der Elastizitätsgrenze herstellen, die zwischen den von uns mit V und VII bezeichneten Zuständen

$$\text{V}: \sigma_x = 0, \qquad \sigma_z = + \varkappa_5$$
$$\text{VII}: \sigma_x = - \varkappa_7, \quad \sigma_z = + \varkappa_7$$

liegen. Selbstverständlich war es wegen der Knickgefahr nicht möglich, den Spannungszustand

$$\text{VI}: \sigma_x = - \varkappa_6, \quad \sigma_z = 0$$

in den dünnwandigen Rohren hervorzurufen. Leider wurde auch an Versuchskörpern von anderer Form dieser Zustand nicht beobachtet; die Ergebnisse würden durch eine solche Ergänzung noch erheblich an Wert gewonnen haben. Innerhalb der bezeichneten Grenzen ergab sich, *daß die mittlere Hauptspannung σ_y keinen Einfluß auf die Größen der beiden Grenzspannungen σ_x und σ_z ausübt.* Wenn demnach z. B. der Spannungszustand

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 20$$

an der Elastizitätsgrenze liegt, so berührt auch der Zustand

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 20, \quad \sigma_z = 20$$

die Grenze. Dieses Ergebnis widerlegt die Hypothesen 2 und 3,

bestätigt dagegen unsere Annahmen; denn die soeben als Beispiele angeführten beiden Spannungszustände werden durch einen und denselben Hauptkreis dargestellt.

Es ergab sich ferner in Uebereinstimmung mit Bauschinger, daß für die Zustände an der Elastizitätsgrenze der genannten plastischen Metalle die größte Schubspannung

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}$$

einen nahezu konstanten Wert hat. Für *Flußeisen* konnte die Beziehung noch genauer dargestellt werden durch die Angabe, daß der Wert $(0{,}52\,\sigma_z - 0{,}48\,\sigma_x)$ von konstanter Größe ist. Für dieses Material ist demnach (Gleichung 18)

$$\cos\varphi = \frac{52 - 48}{52 + 48} = \frac{1}{25}\,.$$

Auch diese Ergebnisse stehen mit unseren Annahmen durchaus im Einklange; denn in der Zeichensprache unserer graphischen Darstellung haben die vorstehenden Angaben die Bedeutung, daß die Hüllkurve der Hauptkreise innerhalb der hier in Betracht kommenden Grenzen, wie es von uns geschehen ist, durch zwei gemeinschaftliche Tangenten ersetzt werden darf.

Die Versuche von *Bauschinger* und *Guest* bieten unseres Erachtens die schärfste Probe für die Brauchbarkeit der neuen Hypothese, weil die Elastizitätsgrenze weit genauer und bestimmter sich beobachten läßt als die Bruchgrenze. Man vergleiche hierüber die Angaben von Bauschinger, Heft 3.

5. Die Bruchgrenzen der Spannungszustände I, II, III, IV. Wenn die mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichneten Spannungsgrenzen für irgend ein isotropes Material mit einiger Genauigkeit bekannt wären, so würden die Gleichungen 16) und 17) Gelegenheit zur Prüfung der neuen Hypothese bieten. Leider ist dies nicht der Fall. Es ist unmöglich, die Spannungszustände, welche beim Bruche wirklich eintreten, mit einiger Bestimmtheit, d. h. durch ihre Hauptspannungen anzugeben. Hierzu kommt, daß der Bruch keine Erscheinung ist, die scharf bestimmt und beobachtet werden kann. Weiche und plastische Materialien entziehen sich durch Fließen ganz dem Bruche, während bei harten und spröden Körpern lange vor der vollständigen Zertrümmerung einzelne Risse und Sprünge eintreten. Was als „Bruch" zu bezeichnen ist, darüber besteht unter den Experimentatoren keineswegs Einigkeit. Aus diesen Gründen sind die meisten Versuchsergebnisse über die Bruchgrenzen höchst unsicher und ungenau.

Am größten ist die Unsicherheit beim Schubversuche, weil die Verteilung der Schubkraft über die Bruchfläche und außerdem die Normalspannungen dieser Fläche ganz unbekannt sind. Das Versuchsergebnis, Schubkraft dividiert durch Bruchfläche, kann daher weit abweichen von der Schubspannung $\varkappa_4$, die in Verbindung mit der Normalspannung null den Bruch herbeiführt.

Nicht weniger unsicher sind die Ergebnisse der *Druck*versuche mit manchen Baustoffen, insbesondere mit Steinen und Mörtelarten, weil die Reibung zwischen den Druckplatten der Maschine und dem Probekörper einen sehr großen und schwer bestimmbaren Einfluß ausübt. Schon *Vicat* berichtete 1833 in den Annales des ponts et chaussées, daß Probekörper aus Stein- und Mörtelmaterialien, die von den harten Druckplatten der Maschine unmittelbar berührt werden, eine weit größere Tragfähigkeit zeigen als unter sonst gleichen Umständen in dem Falle, wenn zwischen Druckplatte und Probekörper eine weiche Zwischenlage, z. B. aus Pappe gelegt wird. Diese Erfahrung wurde später vielfach bestätigt, und man neigte zu ihrer Erklärung der Annahme zu, daß das seitwärts gequetschte Material der Zwischenlage eine *sprengende Wirkung* auf den Versuchskörper ausübe. Man hielt hieran auch dann noch fest, als sich zeigte, daß bereits eine ganz dünne Schicht von Schmiermaterial dieselbe und sogar eine noch stärkere Wirkung ausübt.

Um diese Frage zu entscheiden, führte *Föppl* vergleichende Versuche mit Zementwürfeln aus, indem er die mittlere Bruchspannung, d. h. die Bruchlast dividiert durch den Querschnitt des Probekörpers, unter *vier* verschiedenen Umständen ermittelte. Im *ersten* Falle berührten, wie es beim Druckversuche die Regel ist, die Druckplatten unmittelbar den Probekörper; im *zweiten* Falle wurden die Druckflächen mit einer dünnen Schmierschicht aus Stearin überzogen, und im *dritten* Falle lag zwischen der Schmierschicht und dem Probekörper ein dünnes Messingblatt von 0,1 mm Stärke, welches die Berührung des Stearins mit dem Probekörper, also das Eindringen der Schmiere in die Poren, vollständig verhinderte. Endlich wurde im *vierten* Falle die Schmierschicht fortgelassen und das Messingblatt trocken zwischen Druckplatte und Probekörper gelegt. Die mittlere Bruchspannung in kg/qcm war

im Falle 1 : 92
„ „ 2 : 48
„ „ 3 : 52
„ „ 4 : 85.

Die Vermutung von der Sprengwirkung der Schmiere bestätigte sich also nicht; denn es war für die Wirkung des Schmierens fast gleichgültig, ob der Zutritt des Schmiermaterials zu den Poren des Probekörpers möglich war oder nicht. Es kann hiernach kaum bezweifelt werden, daß die sehr großen Unterschiede in den Werten der mittleren Bruchspannung lediglich durch die Reibung in den Druckflächen verursacht werden, wie ich dies in meiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand (Zivilingenieur 1882, S. 138) bereits ausgesprochen und näher dargelegt habe.

Etwas größere Sicherheit bieten die Ergebnisse der Bruchversuche mit harten und spröden Metallen, weil diese Materialien nicht fließen, und weil die Reibung an den Druckplatten beim Druckversuche wegen der größeren Härte des Probekörpers von geringerem Einfluß ist. *Bach* berichtet in seinem Buche *Elastizität und Festigkeit* über vergleichende Versuche mit gleichartigen Probestäben aus Gußeisen, für die er in kg/qmm

$$\varkappa_1 = 16, \quad \varkappa_2 = 75, \quad \varkappa_3 = 13$$

fand. Diese Zahlen bestätigen die neue Hypothese, weil die Gleichung 16)

$$\varkappa_3 = \frac{\varkappa_1 \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2} = \frac{16 \cdot 75}{16 + 75} = 13$$

genau den beobachteten Wert ergibt.

Neuerdings hat *Voigt* aus einigen Bruchversuchen, die er mit Steinsalz und mit einem aus Paraffin und Stearinsäure zusammengesetzten Material anstellen ließ, den Nachweis zu führen versucht, daß nicht nur die vierte Hypothese, der er auf Grund jener Versuche anfangs sich angeschlossen hatte, sondern auch die neue Hypothese unbrauchbar sei. Ob ihm dies gelungen ist, überlasse ich dem Urteil derjenigen Leser, welche von dem betreffenden Meinungsaustausch in den Annalen der Physik 1901, S. 567 und in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1901 S. 140 und 1033 Kenntnis nehmen wollen.

6. Einfluß der mittleren Hauptspannung σ_y auf die Bruchgrenze. *Föppl* beschreibt im 27. Hefte der Mitteilungen aus dem Münchener Laboratorium einen Apparat, *das Druckkreuz*, den er herstellen ließ, um auf *vier* Seitenflächen des würfelförmigen Probekörpers gleich große Druckkräfte zu übertragen und dadurch einen Spannungszustand an der Bruchgrenze zu erzeugen, in dem σ_x und σ_y gleich große negative Werte annehmen, während σ_z gleich null ist. Es ergab sich, daß die beiden Hauptspannungen σ_x und

σ_y denselben Wert $-\varkappa_2$ annehmen, wie σ_x in dem Spannungszustande II:

$$\sigma_x = -\varkappa_2, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0,$$

daß also die mittlere Hauptspannung σ_y, ebenso wie *Guest* für die Elastizitätsgrenze feststellte, *auch auf die Bruchgrenze keinen Einfluß ausübt.* Dieses Ergebnis steht im Einklang mit der neuen Hypothese, weil die beiden hier in Rede stehenden Spannungszustände durch einen und denselben Hauptkreis dargestellt werden.

Wehage erhebt in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1905, S. 1079 Bedenken gegen diese Annahme und begründet dieselben durch Zerreißversuche mit Papier. Es ist hiergegen einzuwenden, daß Papier ein Faserstoff ist, der auch nicht annähernd als ein isotroper Körper angesehen werden kann. Jedenfalls erscheint es ganz unzulässig, aus jenen Versuchen allgemeine Schlüsse auf das Verhalten isotroper Körper zu ziehen.

12. Literarische Notizen. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung wurde den folgenden zwei Aufsätzen entnommen:

1. *Über die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes*; Zivilingenieur 1882, S. 113.

2. *Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1900, S. 1524.

Die im Abschnitt 2 abgeleitete und durch Gleichung 1) dargestellte Beziehung findet sich schon bei *Cauchy,* Exercises de Mathématiques 1829, T. IV, p. 41.

Die im Abschnitt 5 beschriebene Darstellung eines Spannungszustandes durch einen Kreis wurde auf einem anderen Wege abgeleitet von *Culmann,* Graphische Statik 1866, S. 226. Ausführlich wird dieser Gegenstand behandelt von *Jung, Zusammenhang verschiedener Abbildungen der elastischen Spannungsverteilung*; Technische Blätter 1903, S. 114.

Eine Anwendung der neuen Hypothese gibt *Roth, Die Festigkeitstheorien und die von ihnen abhängigen Formeln des Maschinenbaues*; Zeitschrift für Mathematik und Physik 1903, S. 285.

Abhandlung VI.

Graphostatische Darstellung der neueren Lehre vom Erddruck.

1. Einleitende Bemerkungen. Die Bestimmung des Erddrucks gegen eine Stützwand bildet eine der ältesten Aufgaben der Baumechanik. Ihre erste Lösung verdanken wir *Coulomb*, dessen Theorie später von *Poncelet* weiter ausgebildet wurde. Der Gedankengang dieser Theorie, die bis zum heutigen Tage von den meisten Ingenieuren angewandt wird, ist folgender. Wenn eine Stützmauer unter Einwirkung des Druckes eines kohäsionslosen und gleichartigen Erdkörpers einstürzt, indem sie sich um die vordere Fundamentkante A (Abb. 1) dreht, so rutscht ein Erdprisma BCD an dem ruhenden Erdkörper und an der sich bewegenden Mauer nach unten. Die von der Wandfläche BC und von der Gleitfläche BD auf das abrutschende Erdprisma zu übertragenden Kräfte R und Q müssen daher von den Normalen jener Flächen um die betreffenden Reibungswinkel φ und ψ abweichen. Da die Mauer dem Abrutschen eines *jeden* Prismas widerstehen soll, so ist diejenige Lage der Gleitfläche in Rechnung zu stellen, die den Wanddruck R zum Maximum macht. Eine einfache Rechnung, die wir hier übergehen können, führt zu dem Ergebnis, daß bei ebener

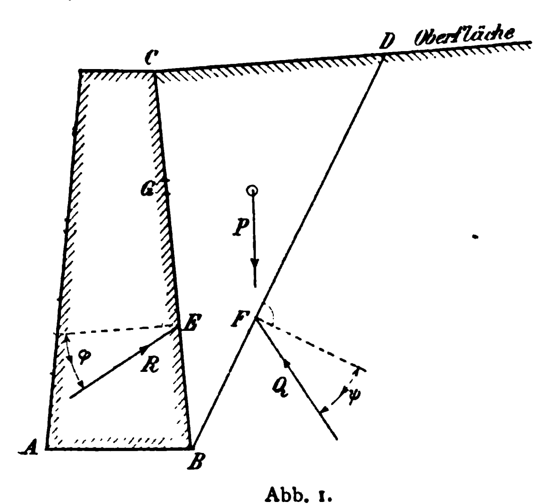


Abb. 1.

Begrenzung der Erdoberfläche die Größe des Erddrucks R dem Quadrat der Wandhöhe BC proportional ist. Hieraus wird geschlossen, daß die Spannung des Wandflächenelementes G dem Abstande CG von der oberen Mauerkante C proportional ist, und daß also der Angriffspunkt E der Resultanten R durch die Bedingung

$$CE = \frac{2}{3} CB$$

bestimmt wird.

Bei der Beschreibung der Theorie wird in der Regel übersehen, daß sie auch den Angriffspunkt F des Druckes Q gegen die Gleitfläche DB durch die Bedingung

$$DF = \frac{2}{3} DB$$

bestimmen würde, wenn ihre Voraussetzungen richtig oder auch nur möglich wären. Man überzeugt sich hiervon, wenn man die Kräfte ins Auge faßt, die von den unendlich kleinen und geometrisch ähnlichen Erdprismen BDH und JDK (Abb. 2) aufzunehmen sind. Läßt man die Trennungsfläche BD um den Punkt B sich drehen und betrachtet man hierbei den Winkel, um den die Richtung des Druckes Q gegen die Trennungsfläche von ihrer Normalen abweicht, als Funktion des veränderlichen Drehwinkels

$$CBD = \varrho,$$

so hat man zu beachten, daß

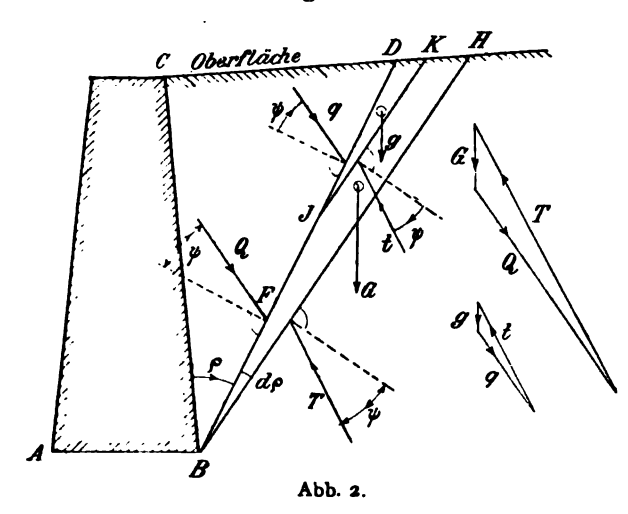


Abb. 2.

diese Funktion ihren *Maximalwert* ψ erreicht, wenn ϱ die Größe CBD annimmt. Nach der Lehre vom Maximum weicht auch der Druck T gegen die unendlich nahe benachbarte Trennungsfläche BH von der Normalen dieser Fläche um den Maximalwinkel ψ ab. Dasselbe gilt von den Drücken q und t gegen die Trennungsflächen JD und JK; denn die Spannungen der Flächenelemente einer jeden der vier

Trennungsflächen BD, BH, JD, JK müssen genau parallel gerichtet sein, weil jede Abweichung hiervon eine Ueberschreitung des Grenzwertes ψ bedingt. Aus dieser Betrachtung folgt, daß die beiden Kräftedreiecke QTG und qtg (Abb. 2), welche von den Kräften Q, T und q, t mit den Gewichten G und g der Prismen BDH und JDK gebildet werden, *geometrisch ähnlich* sind. Da hiernach

$$q:Q=g:G=\overline{DJ}^2:\overline{DB}^2$$

ist, so folgt, daß der Angriffspunkt F der Resultanten Q durch die Bedingung

$$DF=\frac{2}{3}\,DB$$

bestimmt wird. Die beiden Kräfte R und Q, die vor dem Einsturz der Mauer mit dem Gewichte P des Erdprismas BCD (Abb. 1) im Gleichgewicht sich befinden sollen, werden durch die Coulombsche Theorie also nicht nur ihrer *Richtung*, sondern auch ihrer *Lage* nach bestimmt, und *sie erfüllen infolgedessen nicht die Hauptbedingung des Gleichgewichtes, nach der die drei Kräfte in einem Punkte sich schneiden müssen. Jene Theorie setzt also etwas Unmögliches voraus und ist aus diesem Grunde unbrauchbar.*

Manche Ingenieure glauben, den Irrtum in der willkürlichen Annahme einer *ebenen* Gleitfläche suchen zu müssen, und halten eine Berichtigung für möglich durch die Wahl einer *gekrümmten* Gleitfläche, die den Bedingungen der Statik entspricht. Dem ist jedoch entgegenzuhalten, daß keine einzige der Voraussetzungen, die der Coulombschen Theorie zugrunde liegen, mit der Wirklichkeit sich deckt. Wenn eine Stützmauer einstürzt, so verschiebt sich nicht etwa ein zusammenhängendes Erdprisma auf einer ebenen oder auf einer gekrümmten Gleitfläche, sondern der gestützte Erdkörper fällt in sich zusammen, indem die Erdteilchen in unzähligen Gleitflächen sich gegeneinander verschieben, während der stehenbleibende Erdkörper nicht von einer Gleitfläche, sondern von der natürlichen Böschung begrenzt wird. Ueberdies ist der Einsturz der Mauer gerade das Ereignis, welches verhütet werden soll und glücklicherweise in der Regel verhütet wird. Die hierbei auftretenden Kräfte haben für den Baumeister nur ein nebensächliches Interesse, und bei keinem anderen Bauwerk fragt er nach den inneren Kräften, die bei dem *Einsturz* tätig sein würden. Daher ist auch die Annahme, daß der Erddruck mit der Normalen der Wandfläche den Reibungswinkel φ einschließen müsse, durchaus unbegründet. Reibungswiderstände können nur erzeugt werden durch *Bewegung*, und *vor*

Eintritt der Bewegung kann von Reibung nicht die Rede sein. Hierin liegt auch der Grund für die Unsicherheit und Unzuverlässigkeit der Versuche, die in außerordentlich großer Zahl angestellt worden sind, um für die Theorie eine geeignete Grundlage zu gewinnen. Bei allen diesen Versuchen ließ man den meßbaren Gegendruck gegen eine bewegliche Wand, die auf ihrer anderen Seite den Druck des Erdkörpers aufnahm, so lange sich verringern, bis eine *sichtbare* Bewegung des Erdkörpers, also eine *auffallende* Störung des Gleichgewichtes eingetreten war. Die sehr kleinen Bewegungen, die notwendig vorhergehen müssen, um den Erddruck bis zu der bezeichneten Grenze herabzumindern, bleiben hierbei unbeachtet, und gerade diese Bewegungen bedingen die Größe des Erddrucks in den verschiedenen Stadien des Versuches. Auf die Größe des Druckes, die von einem *ruhenden* Erdkörper gegen eine ruhende Wand ausgeübt wird, läßt sich aus solchen Versuchen kein Schluß ziehen.

Die *neuere Theorie des Erddrucks* wurde zuerst auf analytischem Wege von *Rankine* dargestellt. Sie geht aus von der Betrachtung der Spannungszustände in einem kohäsionslosen und gleichartigen Erdkörper, der nur von einer ebenen Oberfläche begrenzt, seitlich aber unbegrenzt ist. Die Gleichartigkeit fordert, daß die Eigenschaften, welche auf den Gleichgewichtszustand eines Körperpunktes Einfluß ausüben können, also die natürliche Beschaffenheit, das spezifische Gewicht und der Reibungswinkel in allen Teilen des Erdkörpers übereinstimmen, und *daß alle Körperpunkte einer zur Oberfläche parallel gestellten Ebene in demselben Spannungszustande sich befinden.* Die maßgebenden *Festigkeitseigenschaften* eines kohäsionslosen Erdkörpers bestehen darin, daß sowohl seine Zugfestigkeit als auch seine Schubfestigkeit gleich null ist. Einer Verschiebung der Körperteile gegeneinander setzt sich also kein Festigkeitswiderstand, sondern nur die Reibung entgegen, deren Größe dem Normaldruck der Trennungsfläche proportional angenommen wird. Die Grenzwerte der Schubspannung τ eines Flächenelements, welches zwei Körperteile von einander trennt, sind also von dem Normaldruck σ dieser Fläche abhängig durch die Grenzbedingung

$$+\sigma \operatorname{tg} \psi > \tau > -\sigma \operatorname{tg} \psi. \qquad (1)$$

Die allgemeinen Gesetze des Spannungszustandes eines Körperpunktes, die in der Abhandlung V abgeleitet und graphisch dargestellt worden sind, gelten auch für den Erdkörper; denn die einzige Voraussetzung, die jenen Gesetzen zugrunde gelegt wurde,

daß nämlich die Spannungszustände der Körperpunkte mit ihrem Orte *stetig* sich ändern, gilt auch für den gleichartigen Erdkörper.

2. Die Hauptachsen eines Punktes des Erdkörpers. Wir erinnern daran, daß in jedem Körperpunkte A drei Ebenen rechtwinklig sich schneiden, deren Flächenelemente im Punkte A von allen anderen sich dadurch unterscheiden, daß ihre Schubspannungen gleich null sind (V, 3). Diese *Hauptebenen des Punktes* A schneiden sich in seinen *Hauptachsen* $x, y, z,$ und ihre Normalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ werden die *Hauptspannungen* des Punktes A genannt. Die Richtung *einer* der drei Hauptspannungen, die im folgenden mit σ_y bezeichnet werden soll, ist für jeden Punkt durch die Bedingungen der Symmetrie gegeben: sie ist wagerecht und zur Erdoberfläche parallel gerichtet; denn die zu dieser Richtung rechtwinklig gestellte xz-Ebene zerlegt den Erdkörper in zwei vollkommen symmetrisch geformte Teile und kann aus diesem Grunde keine Schubspannungen übertragen. In dem besonderen Falle, wenn die Erdoberfläche wagerecht gestellt ist, sind aus dem genannten Grunde alle lotrechten Ebenen Hauptebenen eines jeden Körperpunktes, die in diesem Punkte Spannungen von gleicher Größe übertragen. In jedem anderen Falle, wenn also die Erdoberfläche geneigt ist, sind die Richtungen der Hauptspannungen σ_x und σ_z unbekannt und können nur in gewissen Grenzfällen bestimmt werden.

In fast allen Anwendungen der Theorie des Erddrucks kommen nur die Spannungen der Flächenelemente in Betracht, die durch die y-Achsen der Körperpunkte gehen, und deren Spannungen durch den Hauptkreis xz in bekannter Weise dargestellt werden. Die folgenden Betrachtungen beschränken sich daher auf diesen Kreis.

3. Der feste Punkt des Hauptkreises xz. Von allen Flächenelementen, welche durch die y-Achse eines Körperpunktes A gelegt werden können, hat nur eins, nämlich das zur Erdoberfläche parallel gestellte Flächenelement, eine nach Größe und Richtung *unveränderliche* Spannung ϱ_0. Alle übrigen Spannungen im Körperpunkte A können innerhalb gewisser Grenzen verschiedene Werte annehmen. Die Hauptkreise xz aller möglichen Spannungszustände des Punktes A gehen also durch einen *festen Punkt* R_0, dessen Koordinaten durch die Normalspannung σ_0 und die Schubspannung τ_0 jenes Flächenelements in folgender Weise bestimmt werden können.

Das in Abb. 3 dargestellte Erdprisma $ABCD$ wird durch drei Paare von Parallelebenen begrenzt. Die beiden Ebenen AB und AD

gehen durch die y-Achse des Körperpunktes A; AD ist lotrecht, AB parallel zur Erdoberfläche CD gestellt. Die beiden Seitenflächen $ABCD$, $A_1 B_1 C_1 D_1$ schneiden die y-Achse rechtwinklig, bilden also eine Hauptebene eines jeden ihrer Punkte. Die von diesen beiden Flächen aufzunehmenden Normalkräfte P_5, P_6 fallen zusammen, sind der Symmetrie wegen gleich groß und bilden also eine Gleichgewichtsgruppe. Daher müssen auch die vier übrigen Kräfte: das Gewicht P_1 des Erdprismas und die in den Seitenflächen AB, BC, AD auf das Prisma übertragenen Erddrücke P_2, P_3, P_4 eine Gleichgewichtsgruppe bilden:

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger P_4 \equiv 0.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Erdoberfläche CD *unbelastet* ist. Die Gleichartigkeit des Erdkörpers, insbesondere die Voraussetzung, daß alle Körperpunkte einer zur Erdoberfläche parallel gestellten Ebene in demselben Spannungszustande sich befinden, fordert, daß die beiden Kräfte P_1, P_2 im Schwerpunkte E der Seitenfläche AB sich schneiden und daß die Kräfte P_3, P_4 gleich groß und parallel gerichtet sind. Dies ist nur möglich, wenn

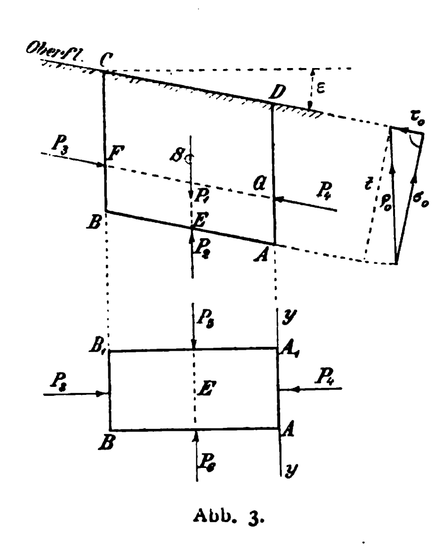


Abb. 3.

$$P_1 \equiv \text{+\!\!+} P_2 \quad \text{und} \quad P_3 \equiv \text{+\!\!+} P_4$$

ist. Gibt man der Fläche AB die unendlich kleine Größe dF und bezeichnet man ihren Abstand von der Erdoberfläche mit t, ferner das Gewicht der Volumeneinheit Erde mit γ, so folgt, da

$$P_1 = \gamma t\, dF \quad \text{und} \quad P_2 = \varrho_0\, dF$$

ist, daß *die Spannung ϱ_0 des zur Erdoberfläche parallel gestellten Flächenelementes AB vertikal gerichtet ist und die Größe $t\gamma$ hat.*

Wir bezeichnen den Neigungswinkel der Erdoberfläche mit ε und geben demselben das positive Vorzeichen, wenn die Oberfläche von links nach rechts fällt. Die beiden Komponenten der Spannung ϱ_0 haben also die Größen:

$$\sigma_0 = -\varrho_0 \cos \varepsilon \quad \text{und} \quad \tau_0 = \varrho_0 \sin \varepsilon,$$

oder, *wenn γ als Gewichtseinheit gewählt wird:*

$$\sigma_0 = -t \cos \varepsilon \quad \text{und} \quad \tau_0 = t \sin \varepsilon.$$

Diese Formeln bestimmen auch den *Sinn* der beiden Spannungen: die Normalspannung σ_0 ist stets negativ, während die Schubspannung τ_0 das Vorzeichen von $\sin \varepsilon$ hat (vergl. V, 2). Wir erinnern daran, daß in der graphischen Darstellung des Spannungszustandes (Abb. 4) die negative σ-Achse wagerecht nach *links*, die positive τ-Achse lotrecht nach *oben* zeigt, und daß die Schubspannung τ das positive Vorzeichen trägt, wenn sie das Körperelement im Sinne der Uhrzeigerbewegung zu drehen sucht. Die Bedingung, daß die beiden Kräfte P_3, P_4 in Abb. 3 zusammenfallen müssen, gilt auch dann, wenn das Prisma $ABCD$ unendlich klein ist. Es folgt hieraus, daß die beiden durch die y-Achse eines jeden Körperpunktes A gelegten Flächenelemente AB und AD, von denen die erste parallel zur Erdoberfläche, die zweite lotrecht gestellt ist, *konjugierte* Flächenelemente bilden; denn die Spannung von AB ist parallel zu AD und die Spannung von AD parallel zu AB gerichtet.

4. Die Grenzlinien der Hauptkreise eines Körperpunktes. Die Spannungskomponenten σ und τ einer jeden Trennungsfläche sind an die durch Gleichung 1) ausgedrückte Bedingung gebunden:

$$+\sigma \operatorname{tg} \psi > \tau > -\sigma \operatorname{tg} \psi.$$

Die beiden geraden Linien, welche durch die Gleichungen

$$\tau = \pm \sigma \operatorname{tg} \psi$$

gegeben sind, bezeichnen also die *Grenzen*, zwischen welchen alle Hauptkreise eines jeden Körperpunktes liegen müssen. Diese beiden Geraden AG_1 und AG_2 gehen durch den Anfangspunkt A der Koordinaten σ, τ und schließen mit der σ-Achse den Reibungswinkel ψ ein. *Jeder durch den festen Punkt R_0 gehende Kreis, dessen Mittelpunkt auf der σ-Achse liegt, und der die Grenzlinien nicht überschreitet, bildet die Darstellung eines möglichen Spannungszustandes im Körperpunkte A.*

Die Abb. 4 zeigt *einen* der möglichen Spannungszustände für den Punkt A, dessen Abstand von der Oberfläche

$$t = AR_0$$

ist. Der *erste* Pol der graphischen Darstellung ist der zweite Schnittpunkt Q der Geraden AR_0 mit dem Hauptkreise; denn die Sehne QR_0 muß zur Oberfläche parallel gerichtet sein. Um den *zweiten* Pol P zu bestimmen, ist die lotrechte Sehne QV zu ziehen. Der Pol P ist der Schnitt der Sehne VR_0 mit der σ-Achse, weil die beiden durch den Punkt A gelegten Flächenelemente von den Stellungen QR_0

und $Q\,V$ einander konjugiert sind. Um für den dargestellten Zustand die Spannungen ϱ, σ und τ irgend eines anderen durch die y-Achse des Körperpunktes A gelegten Flächenelements r zu bestimmen, ist die Sehne QR parallel zu diesem Flächenelement zu

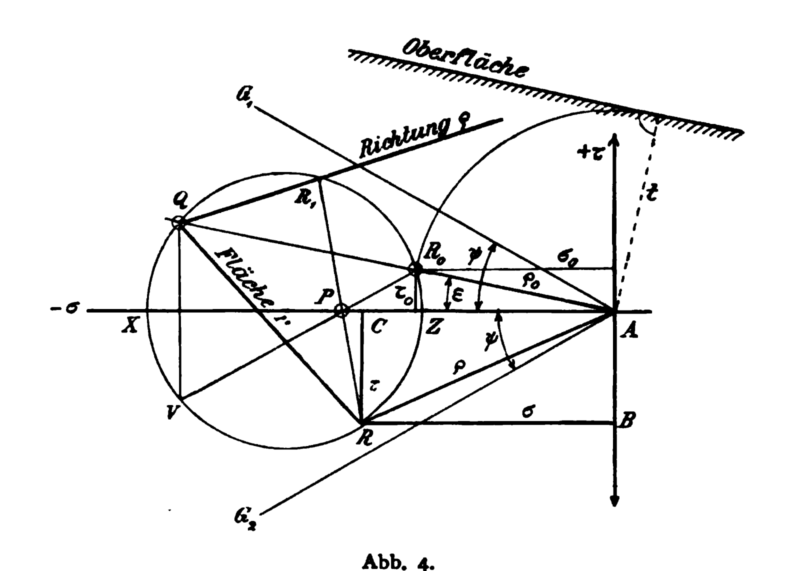


Abb. 4.

ziehen; die Größen der Spannungen ϱ, σ und τ werden dann durch die Strecken AR, BR und CR dargestellt. Zieht man ferner durch den Pol P die Sehne RPR_1, so bestimmt die Gerade QR_1 die *Richtung* der Spannung ϱ (V, 5).

5. Die beiden Grenzzustände eines Körperpunktes A. Die beiden Hauptkreise $R_0 g_1 g_2$ und $R_0 G_1 G_2$ (Abb. 5), die durch den festen Punkt R_0 gehen und die Grenzlinien AG_1, AG_2 *berühren*, bilden die Darstellung der beiden Grenzen für die Spannungszustände des Körperpunktes A. Die zugehörigen Pole p, q und P, Q werden bestimmt, wie im vorigen Abschnitt beschrieben worden ist.

Für den *unteren*, durch den Kreis $R_0 g_1 g_2$ dargestellten Grenzzustand ist die Strecke Az bestimmend: sie bezeichnet die *kleinste* Normalspannung, die im Punkte A überhaupt vorkommen kann. Diese Spannung hat die Richtung qx, das zugehörige Flächenelement ist also parallel zu qz gestellt. qx und qz sind in diesem Spannungszustande die Richtungen der Hauptachsen des Körperpunktes A. Wenn durch irgend eine äußere Einwirkung der von der Strecke Az

dargestellte Minimalwert von σ sich verringert, so wird das Gleichgewicht des Körperpunktes A gestört: der Hauptkreis überschreitet die Grenzlinien in den Punkten g_1 und g_2, d. h.: in den beiden Flächenelementen von den Stellungen qg_1 und qg_2 überschreitet die

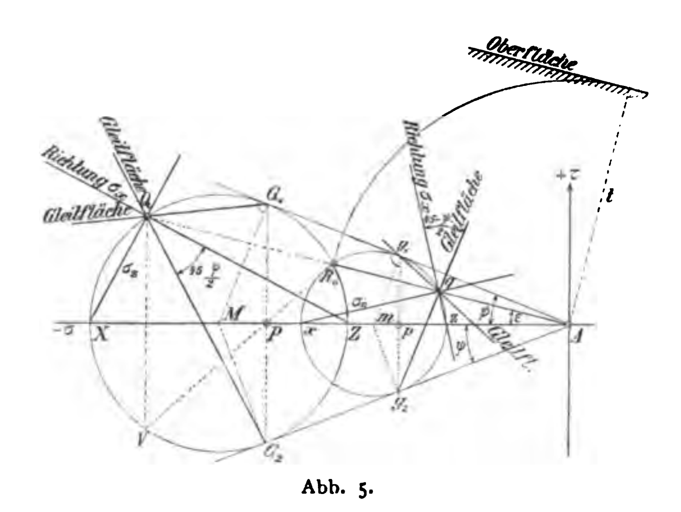


Abb. 5.

Schubspannung τ ihren *Maximalwert* σ tg ψ, und infolgedessen verschieben sich die Erdteilchen bei A in diesen beiden Flächen gegeneinander. Die Geraden qg_1 und qg_2 bestimmen also die *Stellungen der Gleitflächen* im Punkte A. Die beiden Gleitflächen sind *konjugierte* Flächen; denn die Gerade g_1g_2 geht durch den Pol p. Da der Zentriwinkel g_1mg_2 gleich $180^\circ - 2\psi$ ist, so schließen die Gleitflächen mit den Richtungen qx und qz der Hauptspannungen σ_z und σ_x die Winkel $45^\circ + \frac{\psi}{2}$ und $45^\circ - \frac{\psi}{2}$ ein.

Im *oberen*, vom Kreise QG_1G_2 dargestellten Grenzzustande erreicht in dem Flächenelement von der Stellung QX die Normalspannung σ ihren *größtmöglichen Wert* AX. Wenn diese Grenze überschritten wird, so wird das Gleichgewicht gestört, indem sich die Erdteilchen bei A in zwei Gleitflächen von den Stellungen QG_1 und QG_2 gegeneinander verschieben. In diesem *oberen Grenzzustande* bestimmen QX und QZ die Stellungen der Hauptebenen. Die konjugierten Gleitflächen QG_1, QG_2 bilden die beiden Winkel $90^\circ + \psi$ und $90^\circ - \psi$, die von den Richtungen der Hauptspannungen σ_z und σ_x halbiert werden.

Wenn, wie bisher angenommen wurde, die Oberfläche des Erdkörpers eine Ebene ist, so sind die graphischen Darstellungen

der Grenzzustände für alle Körperpunkte geometrisch ähnlich. Für jeden der beiden Grenzzustände sind also die Richtungen der Hauptachsen und die Stellungen der Gleitflächen überall dieselben. *Ein kohäsionsloser, gleichartiger Erdkörper mit ebener Oberfläche hat demnach ebene Gleitflächen.* Die Bewegung, mit der die Störung des Gleichgewichts beginnt, besteht darin, daß sich die Erdteilchen in zwei Scharen von parallelen Gleitflächen gegeneinander verschieben.

Zwischen den Größen, die bei den Grenzzuständen in Betracht kommen, ergeben sich folgende Beziehungen.

Aus Abb. 5 ist unmittelbar zu ersehen, daß

$$\frac{MG_1}{MA} = \frac{mg_1}{mA} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{\sigma_x + \sigma_z} = \sin\psi$$

ist. Für jeden der beiden Grenzzustände ist daher:

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_x} = \frac{1 - \sin\psi}{1 + \sin\psi} = \mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\psi}{2}\right) \qquad (2)$$

und

$$Ax : Am : Az = AX : AM : AZ = (1 + \sin\psi) : 1 : (1 - \sin\psi).$$

Ferner ersieht man aus der Zeichnung:

$$Aq + AR_0 = 2\ Am \cos\varepsilon$$

und

$$Aq \cdot AR_0 = \overline{Am}^2 \cos^2\psi.$$

Folglich ist für den *unteren* Grenzzustand:

$$AR_0 = t = Am\,(\cos\varepsilon + \sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2\psi}).$$

Auf gleichem Wege ergibt sich für den *oberen* Grenzzustand:

$$AR_0 = t = AM\,(\cos\varepsilon - \sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2\psi}).$$

Aus den vorstehenden Gleichungen erhält man die Größen der Hauptspannungen für den *unteren* Grenzzustand:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{t\,(1 + \sin\psi)}{\cos\varepsilon + \sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2\psi}} = Ax\\ \sigma_z &= -\frac{t\,(1 - \sin\psi)}{\cos\varepsilon + \sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2\psi}} = Az\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

und für den *oberen* Grenzzustand:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{t\,(1 + \sin\psi)}{\cos\varepsilon - \sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2\psi}} = AX\\ \sigma_z &= -\frac{t\,(1 - \sin\psi)}{\cos\varepsilon - \sqrt{\cos^2\varepsilon - \cos^2\psi}} = AZ.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

6. **Besondere Fälle.** Wenn die Oberfläche des Erdkörpers *wagerecht*, der Winkel ε also gleich null ist, so nimmt die Darstellung der Grenzzustände die in Abb. 6 angegebene Form an. Der Punkt R_0 fällt mit den Punkten x und Z, der Pol q fällt mit z und der Pol Q mit X zusammen. Im *unteren* Grenzzustande ist die numerisch

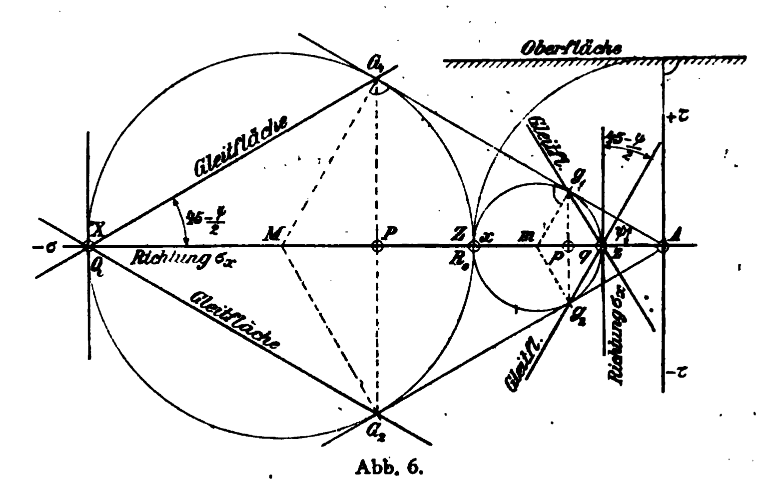


Abb. 6.

größere Hauptspannung σ_z lotrecht, die kleinere σ_x wagerecht, während im *oberen* Grenzzustande die numerisch größere Hauptspannung σ_x die horizontale Richtung hat. Wie in Abb. 5 schließt die numerisch größere Hauptspannung σ_x mit den Gleitflächen Winkel von der Größe $\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right)$ ein.

Für den *unteren* Grenzzustand ist

$$\sigma_x = -t \quad \text{und} \quad \sigma_z = -t \operatorname{tg}^2\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right), \tag{5}$$

und für den *oberen* ist

$$\sigma_z = -t \quad \text{und} \quad \sigma_x = -t \operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right). \tag{6}$$

Wenn die unbegrenzte Oberfläche die Neigung der natürlichen Böschung hat, wenn also ε gleich ψ ist, so fallen, wie Abb. 7 zeigt, die beiden Grenzzustände zusammen, d. h. jeder Punkt des Erdkörpers befindet sich in dem einzig möglichen Spannungszustande. Die beiden Pole q und Q fallen auf den festen Punkt R_0. Die Richtungen QX, QZ der beiden Hauptachsen bilden mit der Vertikalen die Winkel $\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right)$ und $\left(45^\circ - \frac{\psi}{2}\right)$. Von den beiden

Gleitflächen ist die eine lotrecht, die andere parallel zur Oberfläche gestellt. Die beiden Hauptspannungen haben in diesem Falle die Größen

$$\sigma_x = -t\,\frac{1+\sin\psi}{\cos\psi} \quad \text{und} \quad \sigma_z = -t\,\frac{1-\sin\psi}{\cos\psi}. \tag{7}$$

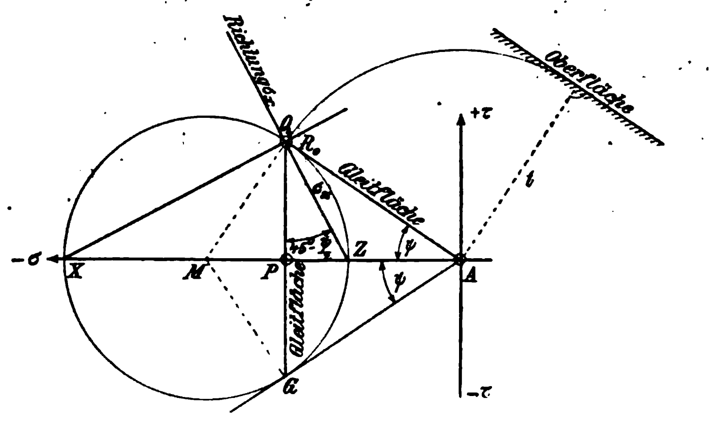


Abb. 7.

7. Ein Hilfsmittel zur Veranschaulichung der Entstehung der Grenzzustände. Im Abschnitt 5 ergab sich, daß die Richtungen der Hauptspannungen σ_x und σ_z für jeden der beiden Grenzzustände in allen Punkten des Erdkörpers dieselben sind. Die beiden unendlich dünnen Erdprismen AB und AC (Abb. 8), die von einem Punkte A in den Richtungen der Hauptspannungen bis zur Oberfläche reichen, verhalten sich also *genau* so wie eine zähe Flüssigkeit in einem *vollkommen glatten* Knierohre, dessen Wandungen also nur Normaldrücke, nicht aber Reibungswiderstände auf die Flüssigkeit übertragen können.

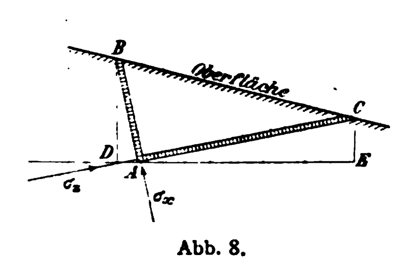


Abb. 8.

Die Spannungen σ_x und σ_z entstehen folglich *durch den hydrostatischen Druck* der beiden Flüssigkeitssäulen AB, AC und werden durch die Druckhöhen DB, EC gemessen. Die Spannung σ_z ist in Verbindung mit der *inneren* Reibung der zähen Flüssigkeit gerade groß genug, um die Störung des Gleichgewichtes durch den Ueberdruck der Flüssigkeitssäule AB über die Säule AC zu verhindern. Eine *äußere* Reibung an den absolut glatten Rohr-

wandungen kommt hierbei nicht ins Spiel. Eine ***Verminderung*** des Druckes σ_z würde ebenso wie eine Verminderung der durch den Winkel ψ bestimmten inneren Reibung eine Störung des Gleichgewichts sofort zur Folge haben. Anderseits würde die Störung auch durch die geringste *Vergrößerung* des Druckes σ_x herbeigeführt werden können. Die Spannung σ_z spielt sonach die Rolle eines ***passiven Widerstandes*** gegen eine Bewegung, die der aktive Druck σ_x herbeizuführen bestrebt ist.

Da das Verhältnis der beiden Hauptspannungen, also der beiden Druckhöhen DB, EC durch die Gleichung 2):

$$\sigma_x : \sigma_z = DB : EC = (1 + \sin\psi) : (1 - \sin\psi)$$

bekannt ist, so können die *Richtungen* der beiden Spannungen auch auf folgendem Wege bestimmt werden: Man zieht in irgend einem Kreise (Abb. 9) den Durchmesser $HCMB$ parallel zur Oberfläche des Erdkörpers, trägt den Zentriwinkel CMR gleich $(90^\circ - \psi)$ auf und legt durch den Schnittpunkt H der Kreistangente RH mit dem Durchmesser BC die Horizontale HEA_2A_1D. Hierdurch bestimmt man die Richtungen der Hauptspannungen A_1B, A_1C für den ***unteren*** und A_2B, A_2C für den ***oberen*** Grenzzustand; denn, wie Gleichung 2) fordert, ist

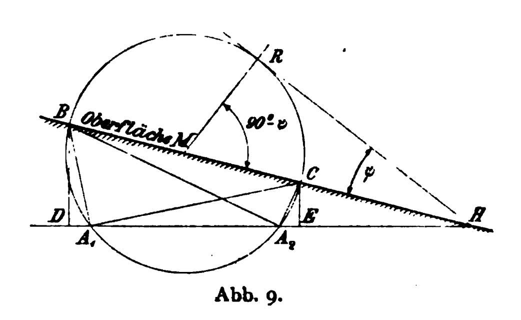


Abb. 9.

$$HB : HC = BD : CE = (1 + \sin\psi) : (1 - \sin\psi).$$

8. Anwendungen. Die im vorstehenden beschriebenen Eigenschaften eines unbegrenzten, gleichartigen Erdkörpers würden nur dann eine praktische Bedeutung haben, wenn sie auf *begrenzte* Erdkörper übertragen und insbesondere auf die Bestimmung des Erddrucks gegen Stützmauern angewandt werden dürften. Auf den ersten Blick erkennt man, daß eine allgemeine und unbedingte Anwendung ***nicht*** statthaft sein kann. Zerlegt man nämlich einen unbegrenzten Erdkörper (Abb. 10) durch eine Trennungsebene AB in zwei Teile C und D, so muß selbstverständlich der Teil C gegen D den-

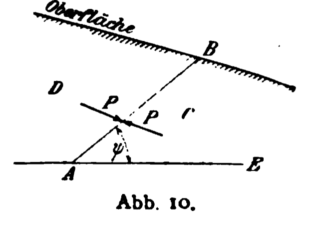


Abb. 10.

selben Druck P übertragen wie umgekehrt D gegen C. Es würde aber ein Irrtum sein, wenn man annehmen wollte, daß jede der beiden Stützmauern, durch die man einen der beiden Teile C und D ersetzen kann, diesen Druck P aufzunehmen hätte; denn man braucht nur den Winkel EAB gleich dem Böschungswinkel ψ zu wählen, um sofort zu erkennen, daß die beiden Drücke gegen die Stützmauern sehr erheblich voneinander abweichen können. In diesem Falle würde der Erdkörper C *ohne Stützung* im Gleichgewicht sich befinden und also gar keinen Erddruck auf die Mauer D übertragen. Der Unterschied zwischen den beiden Fällen ergibt sich aus der folgenden Ueberlegung.

Wird der Erdkörper D (Abb. 11) durch eine Mauer gestützt, so können sich die Spannungszustände in den Punkten E, F einer zur Erdoberfläche parallel gestellten Ebene genau in derselben Weise bilden wie im unbegrenzten Erdkörper. In dem Punkte E, unmittelbar neben der Mauer, kann ebenso wie in dem entfernter liegenden Punkte F die Hauptspannung σ_x hervorgerufen werden durch den *hydrostatischen* Druck der zu jener Spannung parallel gestellten Erdschichten, und die Mauer ist ebenso wie der

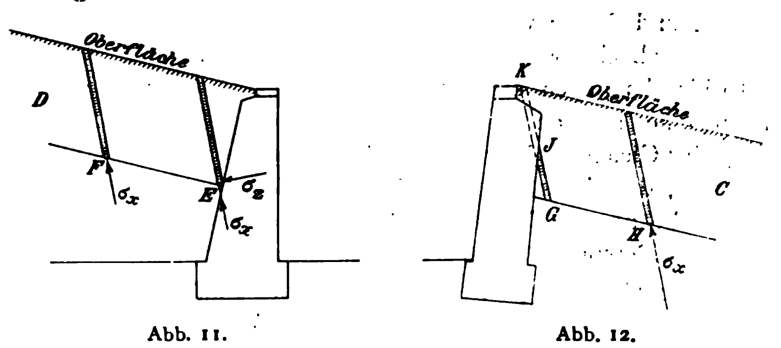


Abb. 11. Abb. 12.

Erdkörper C imstande, die passiven Widerstände zu leisten, welche die Störung des Gleichgewichtes durch die Wirkung der Drücke σ_x verhindern. Es besteht also keine Ursache, welche die Gleichartigkeit der Spannungszustände in einer zur Oberfläche parallel gestellten Ebene stören könnte. Selbstverständlich wird hierbei vorausgesetzt, daß nicht etwa absichtlich solche Störungen, z. B. durch besondere Lagerung der angeschütteten Erdschichten oder durch Stampfen der Erdmasse in der Nähe der Stützmauer herbeigeführt worden sind.

Wird dagegen der Erdkörper C (Abb. 12) durch eine Mauer gestützt, so wird jene Gleichartigkeit der Spannungszustände *durch*

das Vorhandensein der Mauer gestört; denn die Erdschicht GK, die im unbegrenzten Erdkörper durch ihren hydrostatischen Druck die Spannung σ_x im Punkte G erzeugt, *wird durch die Mauer zum Teil beseitigt*, und man darf nicht voraussetzen, daß der Druck der Mauer gegen diese Erdschicht im Punkte J die Wirkung des Gewichtes der beseitigten Erdschicht JK ersetzt. Die Spannungszustände in den Punkten G und H einer zur Oberfläche parallel gestellten Ebene GH weichen also in der Nähe der Mauer unzweifelhaft voneinander ab. Es wird jedoch schwerlich gelingen, Art und Größe der Abweichungen auf theoretischem Wege oder durch Versuche festzustellen.

Aus der vorstehenden Betrachtung schließen wir, *daß die Lehre vom Erddruck im gleichartigen, unbegrenzten Erdkörper auf die Untersuchung der Stabilität von Stützmauern nur in solchen Fällen anwendbar ist, wenn die zur Hauptspannung σ_x parallel gestellten Schichten unten von der Mauer und oben von der Oberfläche begrenzt werden.* Hiermit soll jedoch nur behauptet werden, daß in den bezeichneten Fällen der Erdkörper gleichartig sein *kann*, nicht daß er gleichartig sein *muß*. Abweichungen können in *allen* Fällen vorkommen, und da sie von Zufälligkeiten abhängen, so entziehen sie sich der Beobachtung und der Berücksichtigung. Die Ermittlung des Erddrucks gegen eine Stützwand bleibt also unter allen Umständen eine statisch unbestimmte Aufgabe. Aber die Voraussetzung der Gleichartigkeit des Erdkörpers ist in allen Fällen, wo sie zulässig ist, die einfachste und die natürlichste, und sie steht weder mit einer bekannten Erfahrungstatsache, noch mit den Gesetzen der Statik in Widerspruch.

9. Bestimmung des Erddrucks gegen eine ebene Wandfläche. Bei der Bestimmung des Druckes eines angeschütteten Erdkörpers gegen eine Stützmauer wird in der Regel vorausgesetzt, daß der Erdkörper vollkommen kohäsionslos sei und daß er im *unteren* Grenzzustande des Gleichgewichtes sich befinde. Wenn, wie in den meisten Fällen wohl anzunehmen ist, beide Voraussetzungen nicht *genau* zutreffen, so sind die hierdurch herbeigeführten Fehler dem Sinne nach einander entgegengesetzt. Infolge der geringen Kohäsion wird der Erddruck etwas kleiner, infolge der Abweichung von dem Grenzzustande etwas größer, und man wird daher darauf rechnen können, daß beide Einflüsse wenigstens annähernd einander ausgleichen.

In Abb. 13 ist ein Fall dargestellt, in welchem der gestützte Erdkörper ABH als gleichartig angesehen werden kann, weil die

durch den Fußpunkt A der Mauer gelegte Richtung AH der Hauptspannung σ_x innerhalb des gestützten Erdkörpers liegt. Der Kreis qxz bestimmt in bekannter Weise den unteren Grenzzustand

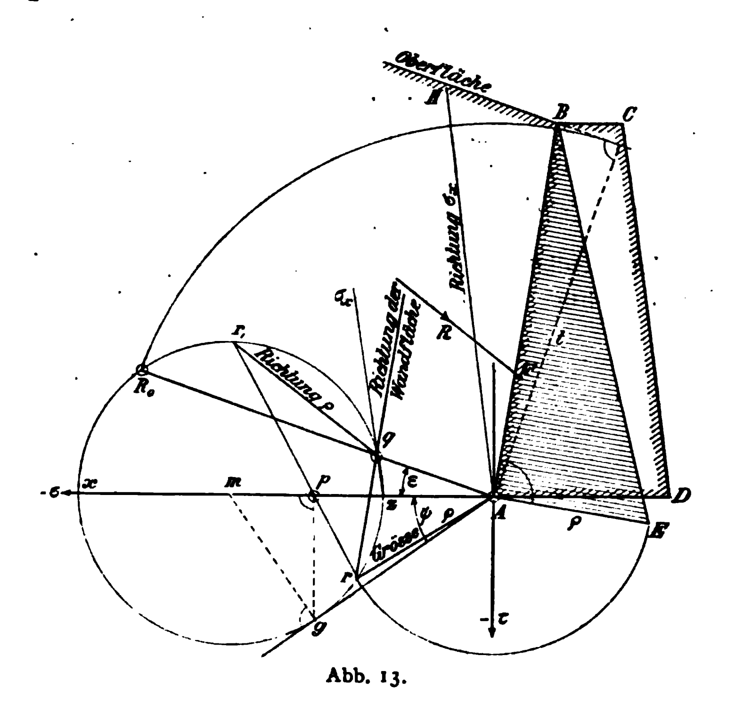


Abb. 13.

für den Fußpunkt A. Die Gerade qz gibt die Richtung der Hauptspannung σ_x und ist also parallel zu AH. Indem man die Sehne qr parallel zur Wandfläche AB der Stützmauer $ABCD$ und darauf die Sehne rpr_1 durch den Pol p zieht, erhält man die Größe

$$\varrho = Ar = AE$$

der Spannung der Fläche AB im Punkte A und die Richtung qr_1 dieser Spannung. Das Dreieck ABE zeigt die Größe und zugleich die Verteilung des Erddrucks R gegen die ganze Wandfläche AB. Dieser Druck hat die Richtung r_1q und für eine Mauer von 1 m Länge die Größe

$$R = \frac{1}{2}\gamma\, AB\; AE.$$

Der Angriffspunkt F des resultierenden Druckes R wird durch die Bedingung

$$AF = \frac{1}{3} AB$$

bestimmt. Der Maßstab der Zeichnung ist 1 : 100. Demnach ist im vorliegenden Falle:

$$AB = 5 \text{ m}, \quad AE = 2{,}0 \text{ m},$$

und wenn das Gewicht γ eines Kubikmeters Erde gleich 1800 kg angenommen wird, ergibt sich:

$$R = 900 \cdot 5 \cdot 2 = 9000 \text{ kg}.$$

In dem zweiten durch Abb. 14 dargestellten Beispiele ist der von der Mauer $ABCD$ gestützte Erdkörper *nicht* gleichartig, weil die Richtung von σ_x:

$$AH \parallel qz$$

nicht in dem Erdkörper ABE liegt. In einem solchen Falle läßt sich der Wanddruck R durch Interpolieren auf folgendem Wege be-

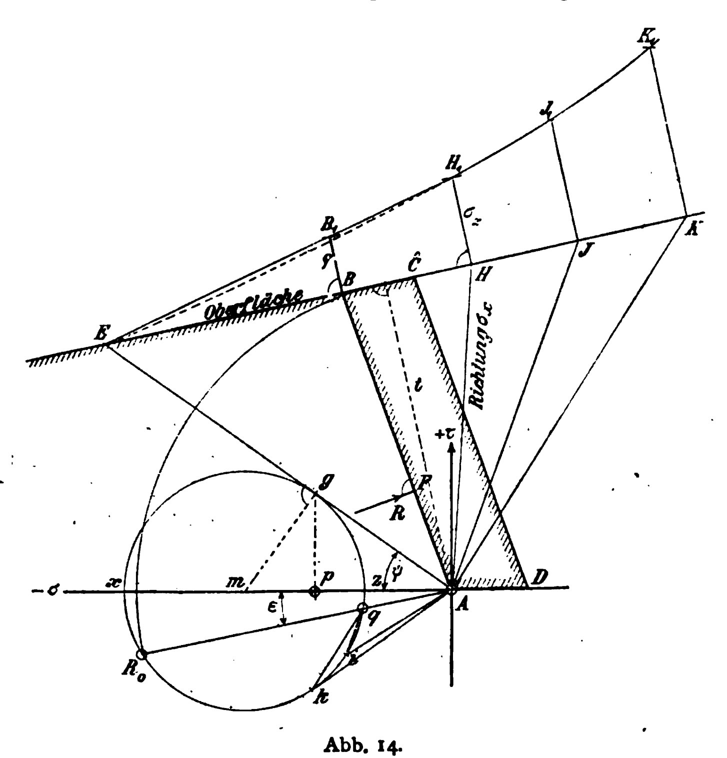


Abb. 14.

stimmen. Man lasse die Wandfläche nacheinander die Lagen AE, AH, AJ, AK annehmen. Die Spannung ϱ der Wandfläche im Punkte A hat in der mit der natürlichen Böschung zusammenfallenden Lage AE die Größe null und in den Lagen AH, AJ, AK die Größen: $Az = HH_1$, $Ai = JJ_1$, $Ak = KK_1$, wenn die Kreis-

sehnen qz, qi, qk parallel zu den Wandflächen AH, AJ, AK gezogen werden. Die Kurve $EH_1 J_1 K_1$, welche die Abhängigkeit der Spannung ϱ von der Lage der Wandfläche darstellt, ist schwach gekrümmt und zeigt mit ihrer konvexen Seite nach unten. Weiteres läßt sich über den gestrichelten Teil EH_1 der Kurve nicht aussagen. Man wird also den Erddruck R etwas zu groß bestimmen, wenn man den Kurventeil EH_1 durch die *Gerade* EH_1 ersetzt, demnach die Spannung ϱ der Wandfläche AB im Punkte A

$$\varrho = BB_1$$

und den Erddruck R für 1 m Wandlänge gleich

$$R = \frac{1}{2} \gamma \, AB \; BB_1$$

annimmt. Es ist ferner zu berücksichtigen, daß in den meisten praktischen Fällen der Winkel HAB noch kleiner ist als in dem vorliegenden Beispiele. Man wird also keinen erheblichen Fehler begehen, wenn man annimmt, daß der Wanddruck R *rechtwinklig* zur Wandfläche AB gerichtet ist, wie es *genau* der Fall sein würde, wenn die Wandfläche AB mit AH zusammenfiele. Aus demselben Grunde ist anzunehmen, daß die Lage des Angriffspunktes F des resultierenden Druckes R durch die Bedingung

$$AF = \frac{1}{3} AB$$

bestimmt wird.

Wir unterlassen es, weitere Beispiele hier vorzuführen, weil die Uebertragung des Verfahrens auf andere Fälle, in denen z. B. die Wandfläche und die Erdoberfläche nicht eben sind, oder die Oberfläche belastet ist, keine Schwierigkeiten bietet.

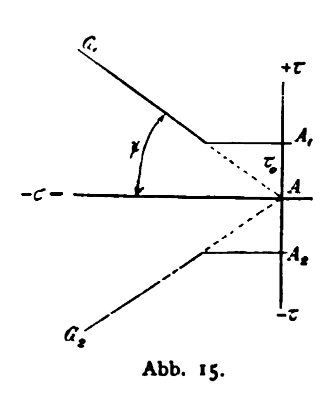


Abb. 15.

10. Die Grenzzustände des Gleichgewichtes in einem unbegrenzten Erdkörper mit Kohäsion. Ueber den Einfluß der Kohäsion oder der Schubfestigkeit der Erde auf die Grenzzustände des Gleichgewichtes gehen die Meinungen auseinander. Manche sind der Ansicht, daß der Reibungswiderstand erst zur Tätigkeit kommen kann, nachdem die Kohäsion überwunden ist, und daß nach Ueberschreiten dieser Grenze das Gesetz der Reibung unverändert zur Geltung kommt. Nach dieser Annahme müßten die Grenzlinien der Hauptkreise die unstetige Form der Abb. 15

haben, in der τ_0 die Größe der Kohäsion und ψ den Reibungswinkel darstellt. Aus allgemeinen Gründen ist es wahrscheinlicher, daß der Grenzwert der Schubspannung mit dem Normaldruck der Trennungsfläche *stetig* wächst, und daß die Grenzlinie also die in Abb. 16 angedeutete *stetige* Form hat. Erfahrungen, welche diese Frage entscheiden könnten, liegen nicht vor. Es ist vielmehr zu beachten, daß das Gesetz der Reibung, nach dem der Grenzwert der Schubspannung einer Trennungsfläche dem Normaldruck proportional sein soll, selbst für den kohäsionslosen Erdkörper eine allgemeine und genaue Gültigkeit nicht beanspruchen kann.

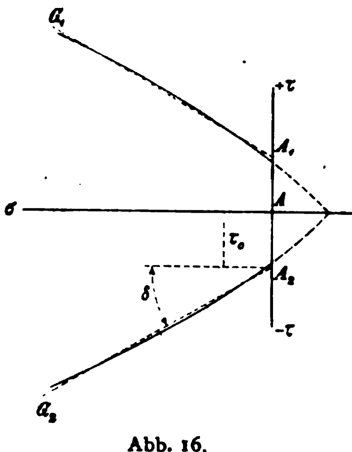


Abb. 16.

Wir setzen voraus, daß die beiden auf der linken Seite der τ-Achse liegenden Zweige der Grenzkurve, die hier allein in Betracht kommen, durch zwei gerade Linien ersetzt werden können, daß jene Kurve also annähernd durch eine Gleichung von der Form

$$\tau_{max} = \pm (\tau_0 - \sigma \operatorname{tg} \delta) \tag{8}$$

dargestellt wird. Die Erfahrung muß zeigen, ob diese Voraussetzung zulässig ist, und wie groß die Werte von τ_0 und δ für die verschiedenen Erdarten anzusetzen sind. Unter der Bezeichnung δ braucht nicht der Reibungswinkel der kohäsionslosen Erde verstanden zu werden.

Die Grenzzustände eines Punktes A im gleichartigen Erdkörper mit ebener Oberfläche werden dann durch Abb. 17 dargestellt. Es erscheint unnötig, diese graphische Darstellung von neuem zu beschreiben, weil die Bedeutung der Punkte R_0, Q, q, P, p, G_1, g_1 unverändert dieselbe bleibt wie in der Darstellung für den kohäsionslosen Erdkörper. Nur auf *eine* Aenderung ist aufmerksam zu machen: Die graphischen Darstellungen für Punkte in verschiedenen Abständen t von der Oberfläche sind *nicht* geometrisch ähnlich, weil die Strecken

$$AA_1 = AA_2 = \tau_0$$

von *unveränderlicher* Größe sind. Infolgedessen sind die Spannungen der Punkte einer ebenen Trennungsfläche nicht wie im kohäsionslosen

Erdkörper genau proportional ihren Abständen t von der Oberfläche. Um den resultierenden Druck R nach Größe und Lage zu ermitteln, müssen daher die Spannungen für eine Anzahl von Punkten der

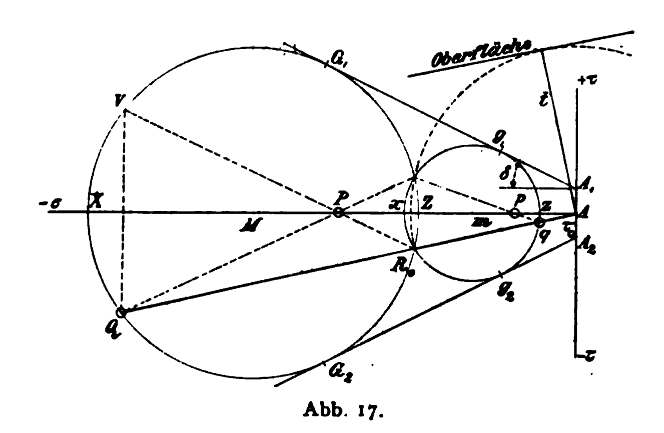


Abb. 17.

Wandfläche bestimmt werden. Auch die Gleitflächen qg_1, qg_2 eines Grenzzustandes ändern mit der Tiefe t ihre Stellungen, wenn die Oberfläche nicht wagerecht ist. Die Gleitflächen haben daher im allgemeinen eine schwach gekrümmte Form.

11. Literarische Notizen. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung ist folgenden Aufsätzen entnommen:

Beiträge zur Theorie des Erddrucks; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1871, S. 344, und 1872, S. 67 und 245.

Die neue Theorie des Erddrucks, d. h. die Bestimmung der Spannungszustände in einem unbegrenzten gleichartigen Erdkörper, wurde begründet durch *Rankine* in der Abhandlung: *On the stability of loose earth*; Philosophical Transactions of the London Royal Society 1856/57, die auch übergegangen ist in das Lehrbuch von Rankine, *A Manual of applied mechanics*, London 1861.

Analytische Darstellungen dieser Theorie gaben:

1. *Lévy*, *Essai sur une théorie nouvelle de l'équilibre des terres* etc.; Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées 1873. Ein Bericht von de St. Venant über diese Abhandlung findet sich in den Comptes rendus vom 7. Februar 1870.

2. *Considère*, *Note sur la poussée des terres;* Annales des ponts et chaussées 1870, I, p. 547.

3. *Winkler, Neue Theorie des Erddrucks*; Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins 1871, Heft 5.

Eine graphische Darstellung der neuen Theorie gab:

Weyrauch, Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Anschauungen; Allgemeine Bauzeitung 1881.

Unsere graphische Darstellung der Theorie des Erddrucks wird wiedergegeben von:

Ceradini, Exposé élémentaire de la théorie de l'équilibre des terres; Revue universelle des mines 1876, 2, p. 378, und von

Swain, Mohrs Graphical Theory of Earth Pressure; Journal of the Franklin Institute 1882, p. 241.

Vollständigere geschichtliche und literarische Angaben über die Theorie des Erddrucks finden sich in der oben genannten Schrift von Winkler, ferner bei:

Kötter, Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck; Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung II, 1893, und

Mehrtens, Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen, Bd. II, 1904.

Abhandlung VII.

Die Spannungen im prismatischen Balken.

1. Die Gleichgewichtsbedingungen. Die folgende Mitteilung bezieht sich auf einen elastischen Balken von prismatischer Form, auf den eine Gleichgewichtsgruppe von gegebenen äußeren

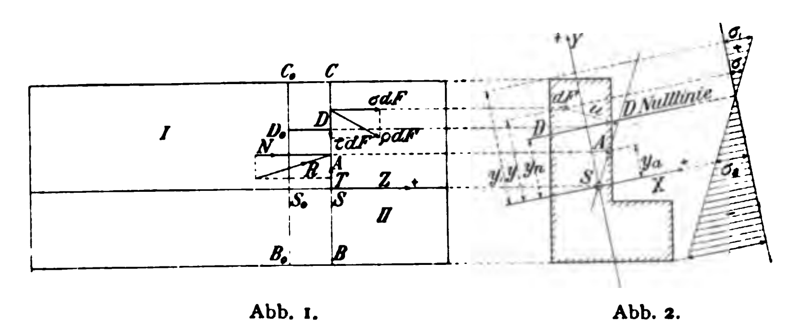


Abb. 1. Abb. 2.

Kräften einwirkt. Wir zerlegen den Balken (Abb. 1) durch einen Querschnitt, d. h. durch eine zu seiner Achse normal gestellte Ebene BC in zwei Teile I, II und bezeichnen mit R die Resultante der äußeren Kräfte, welche der links vom Querschnitt BC liegende Balkenteil I aufnimmt. Diese Kraft R befindet sich im Gleichgewicht mit den unendlich vielen und unendlich kleinen Kräften $\varrho\, dF$, welche in den Teilen dF der Querschnittsfläche F von dem Balkenteil II auf den Balkenteil I übertragen werden. Wir zerlegen die Kraft R und jede der Kräfte $\varrho\, dF$ in zwei Seitenkräfte, von denen

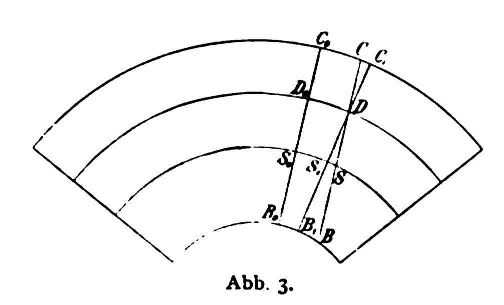


Abb. 3.

eine in die Querschnittsebene fällt, während die andere zu dieser Ebene rechtwinklig gerichtet ist. Hierdurch entstehen zwei Kräftegruppen: die Gruppe der *Normalkräfte* N, $\sigma\,dF$ und die Gruppe der *Scherkräfte* oder *Schubkräfte* T, $\tau\,dF$. Die Bedingungen des Gleichgewichtes sämtlicher Kräfte können dargestellt werden durch *sechs* Gleichungen, welche ausdrücken, daß in bezug auf jede der drei Achsen x, y, z irgend eines rechtwinkligen Koordinatensystems die Summe der Projektionen und die Summe der statischen Momente der Kräfte gleich null sind. Legt man *zwei* dieser Achsen, z. B. x, y, in die Querschnittsebene, so enthalten *drei* der sechs Gleichungen nur die Normalkräfte und die drei anderen nur die Schubkräfte. *Jede dieser beiden Kräftegruppen bildet also eine Gleichgewichtsgruppe.*

2. Die Bestimmung der Normalspannungen σ. Der Biegungslehre liegt die von der Erfahrung bestätigte Annahme zugrunde, daß die materiellen Punkte, die im spannungslosen Zustande des Balkens in einer Querschnittsebene liegen, auch nach der elastischen Formänderung eine zur gebogenen Balkenachse normal gestellte Querschnittsebene bilden. Die Abb. 3 gibt in starker Verzerrung ein Bild der Formänderung des kurzen Balkenstücks zwischen den benachbarten Querschnitten B_0C_0 und BC. Der Querschnitt B_0C_0 wurde in seiner Lage festgehalten, während BC nach B_1C_1 sich bewegte. Die Längenänderungen BB_1, SS_1, CC_1 .... der gleich langen Balkenfasern B_0B, S_0S, C_0C .... sind demnach proportional ihren Abständen von der Geraden DD (Abb. 2), in der die Ebenen BC, B_1C_1 sich schneiden. Diese Gerade DD in der Ebene des Balkenquerschnitts wird die *neutrale Achse* oder die *Nullinie* des Querschnitts genannt, weil die von ihr geschnittenen Balkenfasern keine Längenänderungen und daher auch keine Spannungen erleiden. Nach dem Hookeschen Gesetze sind die Normalspannungen σ den relativen Längenänderungen der betreffenden Balkenfasern proportional. Die Spannungen sind Zug- oder Druckspannungen, je nachdem die Längenänderungen positiv oder negativ sind, und demgemäß gibt man den *Zugspannungen* das *positive*, den *Druckspannungen* das *negative* Vorzeichen.

Für die Bildung der Gleichgewichtsbedingungen wählen wir den Schwerpunkt S des Balkenquerschnitts BC als Anfangspunkt der Koordinaten und legen die von I nach II zeigende z-Achse auf die ungebogene Balkenachse. Die x-Achse hat die noch unbekannte Richtung der Nullinie, und die y-Achse zeigt nach dem Querschnittsteil, welcher *Zugspannungen* aufzunehmen hat.

Wir bezeichnen die Ordinate der Nullinie mit y_n, die Ordinate des Punktes A, in dem die Querschnittsebene BC von den Kräften R und N geschnitten wird, mit y_a, die Ordinate des Flächenteils dF mit y und endlich die Ordinate irgend eines bestimmten Querschnittspunktes, z. B. des Punktes von der größten positiven Ordinate, mit y_1. Um allgemein gültige algebraische Beziehungen zu erhalten, wird bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen zunächst angenommen, daß alle diese Ordinaten das positive Vorzeichen tragen. Die Normalkraft N erhält das positive Vorzeichen, wenn sie den Sinn der Achse z hat, also von I nach II zeigt. Zwischen der Spannung σ_s der Schwerpunktsfaser, der Spannung σ des Flächenteils dF und der Spannung σ_1 in dem Punkte von der gegebenen Ordinate y_1 besteht nach den obigen Angaben die algebraische Beziehung:

$$\sigma_s : \sigma : \sigma_1 = y_n : (y_n - y) : (y_n - y_1)$$

oder

$$\sigma = \sigma_s \left(1 - \frac{y}{y_n}\right) = \sigma_1 \frac{y_n - y}{y_n - y_1}. \quad (1)$$

Wir bilden die *erste* Gleichgewichtsbedingung, indem wir die Summe der Projektionen der Kräfte auf die z-Achse gleich null setzen:

$$0 = N + \int \sigma \, dF = N + \sigma_s \int \left(1 - \frac{y}{y_n}\right) dF. \quad (2)$$

Beachtet man, daß das Integral über die ganze Fläche F sich erstreckt, und daß das Moment dieser Fläche in bezug auf ihre *Schwerpunktsachse* SX:

$$\int y \, dF = 0$$

ist, so ergibt sich:

$$0 = N + \sigma_s F$$

oder

$$\sigma_s = -\frac{N}{F}. \quad (3)$$

Die Spannung σ_s *der Schwerpunktsfaser ist also unabhängig von der Lage der Nullinie und von der Lage der Kraft* N; sie ist ebenso groß wie in dem Falle, wenn die Kraft N sich gleichmäßig über den Querschnitt F verteilt. Die Spannung σ_s ist eine *Druckspannung*, wenn N *positiv* ist, d. h. wenn die Resultante R der auf den Balkenteil I wirkenden äußeren Kräfte von I nach II zeigt. Die Normalspannungen σ sind durch die Gleichungen 1) und 3) vollkommen bestimmt, sobald y_n, d. h. die Lage der Nullinie be-

kannt ist. Die beiden folgenden Gleichgewichtsbedingungen haben daher den Zweck, die Lage jener Achse zu bestimmen.

Die *zweite* Gleichgewichtsbedingung fordert, daß die Momentensumme der Kräftegruppe N, $\sigma\, dF$ in bezug auf die Achse SA (Abb. 2) gleich null sein muß. Die Ordinate des Flächenteils dF in bezug auf diese Achse möge mit u bezeichnet werden. Es ist zu beachten, daß sowohl das Moment der Kraft N als auch die Momentensumme der Flächenteile dF, also das Integral $\int u\, dF$ gleich null ist. Die Momentengleichung:

$$0 = \int u\sigma\, dF = \sigma_s \int u \left(1 - \frac{y}{y_n}\right) dF \tag{4}$$

führt also zu der Bedingung:

$$\int u\, y\, dF = 0. \tag{5}$$

Die Richtung der Nullinie wird demnach bestimmt durch die Bedingung, daß SA und SX konjugierte Schwerpunktsachsen der Fläche F sein müssen (vergl. III, 7, 2). Um endlich die Ordinate y_n und hierdurch die *Lage* der Nullinie zu bestimmen, setzen wir als *dritte* Gleichgewichtsbedingung das statische Moment der Kräftegruppe in bezug auf die x-Achse gleich null:

$$0 = y_a N + \int y\, \sigma\, dF = y_a N + \sigma_s \int y \left(1 - \frac{y}{y_n}\right) dF \tag{6}$$

oder

$$0 = -y_a \sigma_s F - \frac{\sigma_s}{y_n} i_x^2 F,$$

wenn

$$\int y^2\, dF = i_x^2 F$$

gesetzt, mit i_x also der Trägheitshalbmesser der Fläche F in bezug auf die Achse SX bezeichnet wird. Aus der vorstehenden Gleichung folgt:

$$y_n = -\frac{i_x^2}{y_a}. \tag{7}$$

Die beiden Ordinaten y_a und y_n des Angriffspunktes A der Normalkraft N und der Nullinie haben also nicht, wie in der Zeichnung willkürlich angenommen wurde, *gleiche*, sondern *entgegengesetzte* Vorzeichen, mit anderen Worten: *Der Angriffspunkt A und die zugehörige Nullinie DD werden durch die Schwerpunktsachse SX voneinander getrennt.*

3. **Graphische Lösung.** Die Abb. 4 gibt die graphische Lösung der Aufgabe: *für die gegebene Lage des Angriffspunktes A der Normalkraft N die Lage der Nullinie DD zu bestimmen.* Um die Genauigkeit und die Deutlichkeit der Zeichnung zu erhöhen, wurde der Trägheitskreis SXB für den Schwerpunkt S der Querschnittsfläche F nach Anleitung der Abhandlung III, 8 in *doppeltem* Maßstabe aufgetragen. Demnach ist nicht der Durchmesser, sondern der Halbmesser OX des Kreises gleich dem polaren Trägheitshalbmesser p. Indem man die Kreissehne BTX durch den Trägheitsschwerpunkt T zieht, bestimmt man die zur Achse SAB konjugierte Schwerpunktsachse SX, zu der die Nullinie DD parallel gerichtet ist (III, 7). Man bestimmt ferner den Trägheitshalbmesser für die Achse SX:

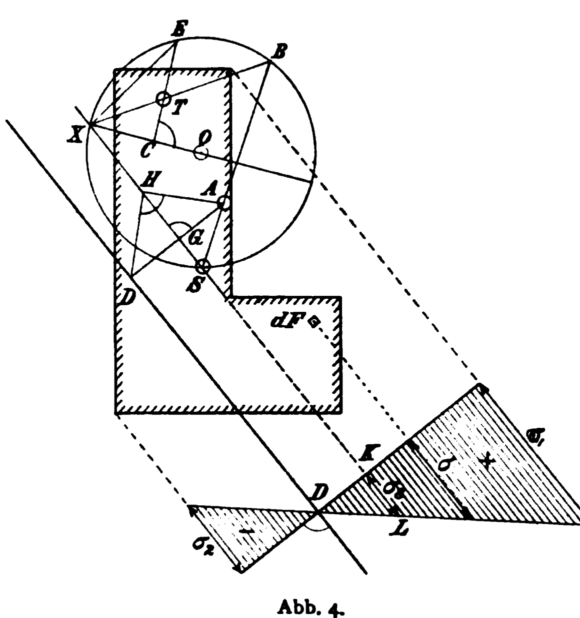


Abb. 4.

$$i_x = \frac{1}{2} XE,$$

indem man

$$CTE \perp OX$$

zieht (III, 7, 4). Darauf ist, um die Lage der Nullinie zu bestimmen,

$$AGD \perp SX, \quad GH = i_x, \quad HD \perp AH \quad \text{und} \quad DD \parallel SX$$

aufzutragen. Man erkennt leicht, daß die Bedingungen des vorigen Abschnitts durch diese Konstruktion erfüllt werden.

Um ferner die Verteilung der Normalspannungen σ graphisch darzustellen, zieht man

$$DK \perp DD, \quad SKL \parallel DD$$

und trägt nach einem willkürlich zu wählenden Spannungsmaßstabe die Strecke

$$KL = \sigma_s = -\frac{N}{F}$$

auf. Die Ordinate der Geraden DL bestimmt für jeden Querschnittsteil dF die Normalspannung σ, also auch die Spannungen σ_1 und σ_2 in den Punkten des Querschnitts, die von der Nullinie die größten Abstände haben.

4. Besondere Fälle. *1. Der Angriffspunkt A der Normalkraft N fällt mit dem Schwerpunkt S zusammen.* Es ist also

$$y_a = 0, \quad \text{folglich} \quad y_n = \infty,$$

und daher nach Gleichung 1):

$$\sigma = \sigma_s = -\frac{N}{F},$$

d. h. die Normalkraft N verteilt sich gleichmäßig über den Querschnitt F.

2. Der Angriffspunkt A der unendlich kleinen Normalkraft N liegt auf der gegebenen Geraden SA (Abb. 5) *in der unendlich großen Entfernung*

$$SA = b.$$

Auf den Balkenquerschnitt wirkt also in der zu ihm rechtwinklig gestellten Ebene SA ein *Biegungsmoment* von der Größe

$$M = -Nb. \quad (8)$$

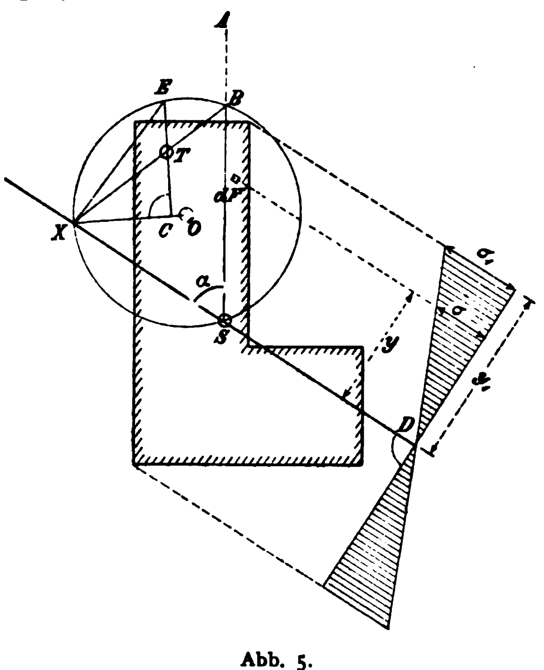


Abb. 5.

Nach Gleichung 7) ist y_n gleich null, d. h. *die Nullinie fällt mit der zu SA konjugierten Schwerpunktsachse SX zusammen.* Ferner folgt aus Gleichung 1):

$$\sigma = \sigma_1 \frac{y}{y_1} \quad (9)$$

und aus Gleichung 6):

$$0 = y_a N + \frac{\sigma_1}{y_1} \int y^2 \, dF = y_a N + \frac{\sigma_1 F i_x^2}{y_1}.$$

Bezeichnet man den Winkel ASX mit α, so ist

$$y_a = b \sin \alpha,$$

folglich

$$\sigma_1 = \frac{M \sin \alpha \, y_1}{F i_x^2} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{M \sin \alpha \, y}{F i_x^2}. \tag{10}$$

In betreff der Vorzeichen ist bei Anwendung dieser Formeln zu beachten, daß die Spannungen der *verlängerten* Balkenfasern das *positive* Vorzeichen tragen. In der Regel ist die Balkenachse wagerecht, der Balkenquerschnitt also lotrecht gestellt. Man gibt dann nach den Bestimmungen der Abhandlung II, 8 dem Biegungsmoment das *positive* Vorzeichen, wenn die *konkave* Seite des gebogenen Balkens nach *oben* gekehrt ist. Demgemäß zeigt die y-Achse des Balkenquerschnitts nach *unten*, wenn das Biegungsmoment M *positiv* ist.

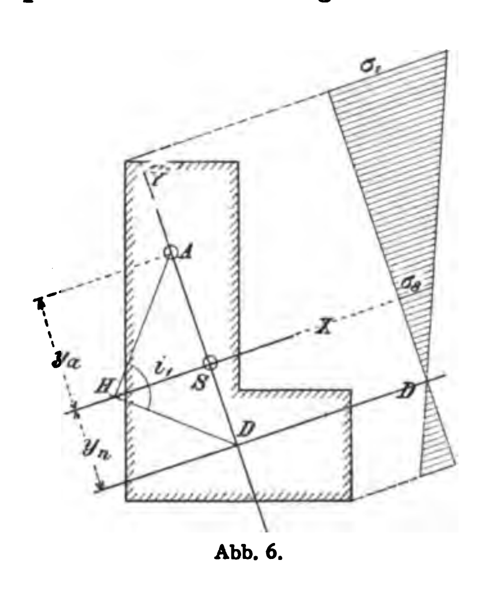


Abb. 6.

3. *Der Angriffspunkt A liegt auf einer Schwerpunktshauptachse*, z. B. wie in Abb. 6 auf der *zweiten* Hauptachse SY. Die Nullinie DD ist in diesem Falle parallel zur *ersten* Hauptachse SX gerichtet, für die der Trägheitshalbmesser die Größe i_1 hat. Die Lage der Nullinie wird durch ihre Ordinate

$$y_n = -\frac{i_1^2}{y_a} \tag{11}$$

bestimmt. Nach Gleichung 1) ist also

$$\sigma = \sigma_s \left(1 - \frac{y}{y_n}\right) = -\frac{N}{F}\left(1 + \frac{y\, y_a}{i_1^2}\right). \tag{12}$$

5. Eine andere Bestimmung der Normalspannungen, Abb. 7 und 8. In diesem Abschnitt bezeichnen SX und SY die beiden Schwerpunktshauptachsen, und zwar SX die *erste* Hauptachse mit dem Trägheitshalbmesser i_1 und SY die *zweite* mit dem Trägheitshalbmesser i_2. Der Angriffspunkt A der Normalkraft N ist gegeben durch seine Koordinaten

$$SB = x_a, \quad SC = y_a.$$

Durch den Punkt A ist die Gerade $A_1 A_2$ gelegt, die auf den Hauptachsen die Strecken

$$SA_1 = 2x_a, \quad SA_2 = 2y_a$$

abschneidet. Man kann die Kraft N zerlegen in zwei Normalkräfte

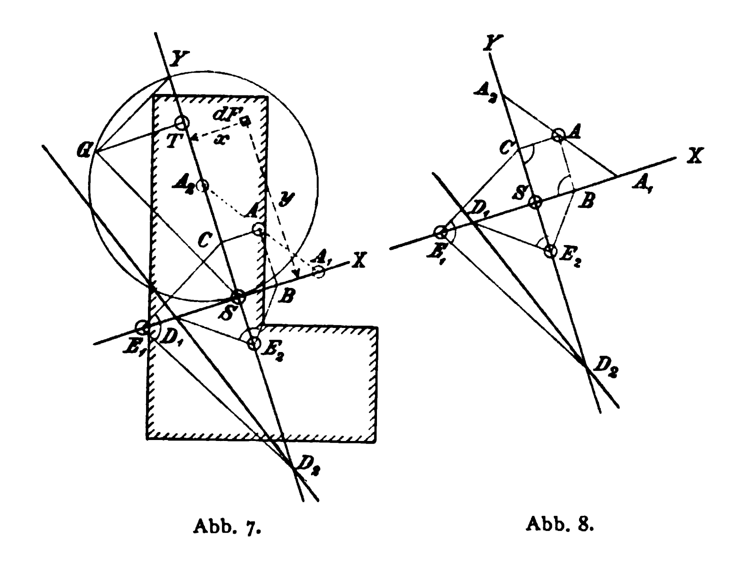


Abb. 7. Abb. 8.

N_1, N_2, die in den Punkten A_1, A_2 angreifen, den Sinn von N und die Größe

$$N_1 = N_2 = \frac{1}{2} N$$

haben. In dem Querschnittsteil dF von den Koordinaten x, y wird nach Gleichung 12) von der Normalkraft N_1 die Spannung

$$\sigma = -\frac{N}{2F}\left(1 + \frac{2xx_a}{i_2^2}\right)$$

und von der Normalkraft N_2 die Spannung

$$\sigma = -\frac{N}{2F}\left(1 + \frac{2yy_a}{i_1^2}\right)$$

hervorgerufen. Die von beiden Normalkräften oder von ihrer Resultanten N in dem Teil dF erzeugte Normalspannung hat daher die Größe

$$\sigma = -\frac{N}{F}\left(1 + \frac{xx_a}{i_2^2} + \frac{yy_a}{i_1^2}\right). \tag{13}$$

Die Nullinie ist der geometrische Ort der Punkte, in welchen die

Normalspannung σ gleich null ist; daher ist die Gleichung dieser Linie:

$$0 = 1 + \frac{x x_a}{i_2^2} + \frac{y y_a}{i_1^2}.$$

Sie schneidet auf den Hauptachsen die Strecken

$$SD_1 = -\frac{i_2^2}{x_a}, \qquad SD_2 = -\frac{i_1^2}{y_a}$$

ab. Um die Nullinie $D_1 D_2$ zu bestimmen, trägt man demnach

$$SE_1 = i_1 = \frac{1}{2} SG, \quad SE_2 = i_2 = \frac{1}{2} YG$$

auf und zieht

$$E_2 D_1 \perp BE_2, \quad E_1 D_2 \perp CE_1.$$

Umgekehrt wird aus der gegebenen Lage der Nullinie $D_1 D_2$ der zugehörige Angriffspunkt A der Normalkraft N bestimmt, indem man (Abb. 8)

$$E_1 C \perp E_1 D_2, \quad E_2 B \perp E_2 D_1,$$
$$CA \parallel SX, \qquad BA \parallel SY$$

aufträgt.

Die Gleichung 13 ist auch anwendbar, wenn die unendlich kleine Normalkraft N in dem unendlich fernen Punkte A der gegebenen Schwerpunktsachse SA angreift. Bezeichnet man wie im vorigen Abschnitt mit b die unendlich große Strecke SA, mit M das Biegungsmoment $-bN$ des Balkenquerschnitts und mit α den Winkel ASX, so kann man der Gleichung 13) die Form geben:

$$\sigma = -\frac{Nb}{F}\left(\frac{1}{b} + \frac{x x_a}{i_2^2 b} + \frac{y y_a}{i_1^2 b}\right)$$

oder

$$\sigma = \frac{M}{F}\left(\frac{x \cos\alpha}{i_2^2} + \frac{y \sin\alpha}{i_1^2}\right). \tag{14}$$

Die Achsen x und y zeigen nach dem Querschnittsteil, welcher *Zugspannungen* aufzunehmen hat.

6. Der Kern der Querschnittsfläche F. Mit Rücksicht auf die Beschaffenheit des Baumaterials wird zuweilen die Bedingung gestellt, daß kein Teil der Querschnittsfläche *Zugspannungen* aufnehmen darf. Es wird also gefordert, daß die Spannung σ_s der Schwerpunktsfaser *negativ* sei, und daß die Nullinie die Querschnittsfläche F nicht schneide. Die Angriffspunkte A der Normalkraft N, deren zugehörige Nullinien die zuletzt genannte Bedingung erfüllen,

bedecken eine begrenzte Fläche, die man den *Kern* der Querschnittsfläche nennt. Läßt man nämlich den Angriffspunkt A auf einer Schwerpunktsachse SA vom Schwerpunkt S sich *entfernen*, so behält die zugehörige neutrale Achse DD die Richtung der zu SA konjugierten Schwerpunktsachse SX (Abb. 4) und *nähert* sich dem Schwerpunkt nach Gleichung 7) in der Weise, daß das Produkt $y_a y_n$ den unveränderlichen Wert $-i_x^2$ behält. Der Punkt A erreicht also die Grenze des Kernes, sobald die zugehörige Nullinie den Querschnittsumfang *berührt*. Um die Kerngrenze darzustellen, müssen demnach für eine genügende Anzahl von Nullinien, welche den Querschnittsumfang berühren, die zugehörigen Angriffspunkte A bestimmt werden, was durch die in Abb. 8 angegebene Konstruktion ohne große Mühe geschehen kann.

Wenn der Querschnittsumfang polygonförmig ist, so wird eine wesentliche Vereinfachung noch durch folgende Beziehung herbeigeführt: *Läßt man die Nullinie UU* (Abb. 9) *um einen gegebenen festen Punkt A_v sich drehen, so bewegt sich der zugehörige Angriffspunkt A_u auf der zum Angriffspunkt A_v gehörenden Nullinie VV.* Wir bestimmen, um den Beweis zu geben, die Ordinate v_0 des Punktes A_u vermittels der Momentengleichung für die Achse VV. In bezug auf die beiden Achsen UU und VV werden die Ordinaten des Schwerpunktes S mit u_s und v_s und die Ordinaten des Flächenteils dF mit u und v bezeichnet.

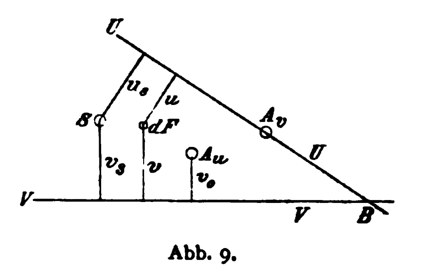


Abb. 9.

Wenn die Nullinie die Lage UU hat, so hat der Flächenteil dF die Normalkraft $\frac{\sigma_s}{u_s} u \, dF$ aufzunehmen. Die Gleichung, welche ausdrückt, daß in bezug auf die Achse VV das Moment der Gleichgewichtsgruppe der Normalkräfte gleich null sein muß, lautet also:

$$0 = N v_0 + \frac{\sigma_s}{u_s} \int u \, v \, dF. \tag{15}$$

Ist dagegen VV die Nullinie, so hat der Flächenteil dF die Normalkraft $\frac{\sigma_s}{v_s} v \, dF$ aufzunehmen, und die Momentengleichung für die Achse UU lautet:

$$0 = \frac{\sigma_s}{u_s} \int u \, v \, dF = \int u \, v \, dF, \tag{16}$$

weil die im Punkte A_v angreifende Normalkraft N die Momentenachse UU schneidet. Aus den Gleichungen 15) und 16) folgt:

$$v_0 = 0,$$

wie oben behauptet wurde. Wir ersehen aus Gleichung 16), daß die beiden Achsen UU, VV in bezug auf ihren Schnittpunkt B *konjugierte* Achsen sind (vergl. III, 7).

Um den Kern 1, 2, 3, 4, 5 einer gegebenen polygonförmigen Querschnittsfläche F (Abb. 10) zu bilden, bestimmt man also entweder die Angriffspunkte 1, 2, 3, 4, 5 für die Nullinien I, II, III,

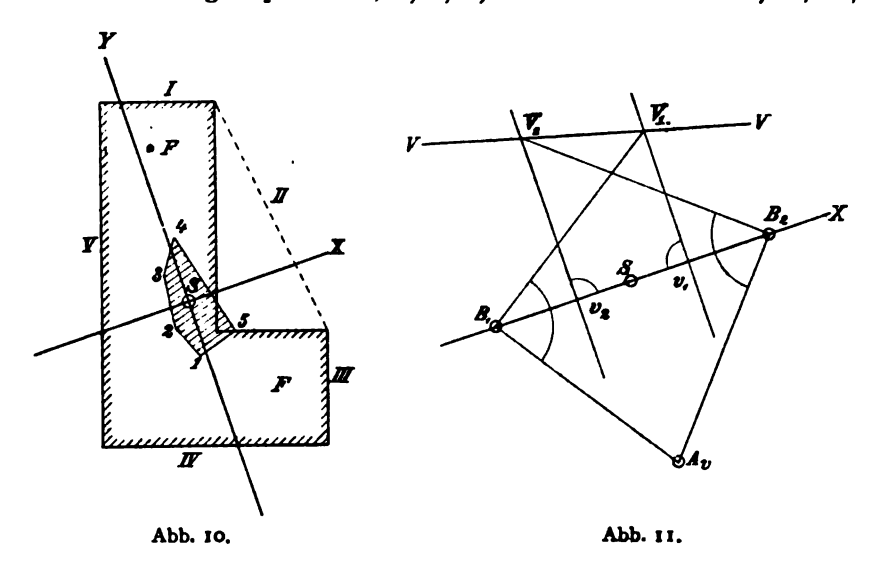


Abb. 10. Abb. 11.

IV, V, oder die Nullinien 1 2, 2 3, 3 4, 4 5, 5 1 für die Angriffspunkte, welche mit den Schnittpunkten der Achsen I II, II III, III IV, IV V, V I zusammenfallen.

Wenn die zu bestimmenden Punkte und Achsen unbequeme Lagen annehmen, so kann man zum Ersatz das in Abb. 11 dargestellte Verfahren anwenden. Man bestimmt die beiden Brennpunkte B_1, B_2 der Fläche F auf der ersten Schwerpunktshauptachse SX durch die Strecken

$$SB_1 = SB_2 = \sqrt{i_1^2 - i_2^2}$$

(vergl. III, 9, 6) und die zu den Angriffspunkten B_1, B_2 gehörenden Nullinien $v_1 V_1$, $v_2 V_2$ durch die Strecken

$$Sv_1 = Sv_2 = \frac{i_2^2}{\sqrt{i_1^2 - i_2^2}}.$$

Wir erinnern an die im 9. Abschnitt der Abhandlung III beschriebenen Eigenschaften der Brennpunkte, insbesondere daran, daß je zwei in einem Brennpunkte rechtwinklig sich schneidende Achsen ein konjugiertes Paar bilden (III, 7, 6). Um die zu einem gegebenen Angriffspunkt A_v gehörende Nullinie $V V_1 V_2 V$ zu bestimmen, zieht man daher

$$B_1 V_1 \perp A_v B_1 \quad \text{und} \quad B_2 V_2 \perp A_v B_2.$$

In gleicher Weise ergibt sich die Lage von A_v, wenn die Nullinie VV gegeben ist.

Die Bedingung, daß die Achse SA_v und die zur neutralen Achse VV parallel gerichtete Schwerpunktsachse ein konjugiertes Achsenpaar bilden, kann als Probe für die Genauigkeit der Zeichnung benutzt werden.

7. Druckspannungen in einem prismatischen Körper ohne Zugfestigkeit. Liegt der Angriffspunkt A der *positiven* Normalkraft N, Abb. 12, *außerhalb* des Kerns, so zerlegt die neutrale Achse die Querschnittsfläche F in zwei Teile I, II, von denen der den Schwerpunkt S enthaltende Teil I Druckspannungen aufzunehmen hat. Wenn nun der andere Teil II der Querschnittsfläche nicht imstande ist, *Zugspannungen* zu widerstehen, wie es z. B. bei Mauerwerk in der Regel der Fall ist, so werden die Spannungen dieses Querschnittsteiles gleich null, wodurch selbstverständlich eine andere Lage der Nullinie bedingt wird.

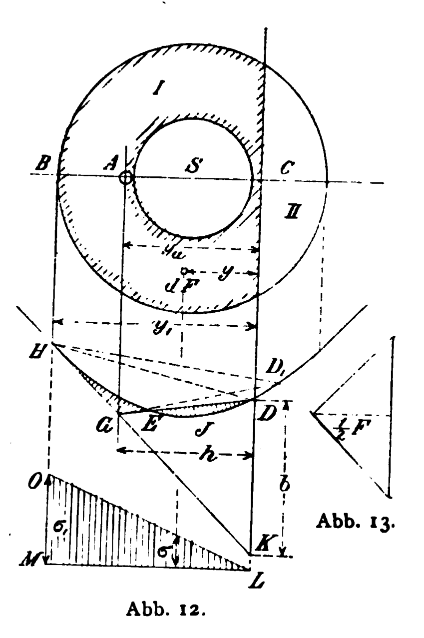


Abb. 12.

Abb. 13.

Ein einfaches Verfahren zur Bestimmung dieser Lage läßt sich nur für den Fall angeben, wenn die Fläche F in Parallelstreifen zerlegt werden kann, auf deren Halbierungsgeraden der Angriffspunkt A liegt, wenn also z. B. A auf einer Symmetrieachse des Querschnitts liegt. In diesen Fällen ist die *Richtung* der Nullinie durch die Richtung der Parallelstreifen gegeben, und es ist nur ihr Abstand vom Schwerpunkt zu bestimmen. In jedem anderen Falle

ist man genötigt, die Richtung der Nullinie durch *Probieren* zu ermitteln, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll.

Von den drei Gleichgewichtsbedingungen der Gleichungen 2), 5) und 6) ist die zweite:

$$\int u\,y\,dF = 0$$

erfüllt, wenn der Nullinie die eben bezeichnete Richtung gegeben wird. Um den beiden anderen Gleichgewichtsbedingungen für den vorliegenden Zweck die bequemste Form zu geben, beziehen wir die Momente auf die noch unbekannte Nullinie. Es bezeichnen also in bezug auf diese Achse y_a, y, y_1 die Ordinaten des Punktes A, des Flächenteils dF und des Querschnittspunktes B, dessen Abstand von der Nullinie am größten ist, ferner σ und σ_1 die Normalspannungen in den Querschnittsteilen dF und B. Die beiden Gleichgewichtsbedingungen nehmen hiernach die Form an:

$$0 = N + \frac{\sigma_1}{y_1}\int y\,dF \qquad (17)$$

$$0 = N y_a + \frac{\sigma_1}{y_1}\int y^2\,dF. \qquad (18)$$

Um die Integrale, *welche sich nicht auf die ganze Querschnittsfläche F, sondern nur auf den Teil I beziehen,* auf geometrischem Wege zu bestimmen, zerlegt man die Fläche I in Streifen parallel zur Nullinie und bildet die Seilkurve HED, deren Belastungen durch die Flächenstreifen dargestellt werden, und deren Normalkraft (Abb. 13) gleich $\frac{1}{2}\,F$ ist. Wäre die Lage der Nullinie CD bekannt, so würde die Fläche $HEDK$, welche von der Seilkurve HED, ihrer Tangente HK und der Nullinie DK begrenzt wird, verwandelt werden können in das Dreieck DKG von der Basis

$$DK = b$$

und der Höhe h. Nach bekannten Eigenschaften der Seilkurve (vergl. II, 7 und II, 12) ist nun

$$\int y\,dF = b\,\frac{F}{2}$$

und

$$\int y^2\,dF = F\,\frac{b\,h}{2}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen 17) und 18) ein, so ergibt die erste Gleichung:

$$\sigma_1 = -\frac{N}{F}\frac{2y_1}{b} \tag{19}$$

und die zweite:

$$h = y_a. \tag{20}$$

Um die Lage der Nullinie zu bestimmen, zieht man demnach die Gerade AG parallel zur gegebenen Richtung der Nullinie und legt durch den Punkt G die Gerade GD so, daß

$$\text{Fläche } HGE = \text{Fläche } DEJ$$

wird. ***Die Nullinie CD ist darauf durch den Punkt D der Seilkurve zu legen.*** Man wählt, um den Punkt D genau zu bestimmen, den Punkt D_1 der Seilkurve so, daß die Fläche HJD_1 augenscheinlich etwas größer ist als das Dreieck HGD_1. Man mißt dann diese beiden Flächen und bestimmt den Punkt D aus der Bedingung:

$$\text{Fläche } GDD_1 = \text{Fläche } HJD_1 - \text{Fläche } HGD_1;$$

denn aus dieser Bedingung folgt:

$$GDD_1 + HGD_1 - HEDD_1 = HJD_1 - HEDD_1$$

oder

$$HGE = EJD.$$

Die Verteilung der Normalspannungen σ wird durch das Dreieck LMO (Abb. 12) dargestellt, dessen Höhe

$$MO = \sigma_1 = -\frac{N}{F}\frac{2y_1}{b}$$

nach einem willkürlich zu wählenden Spannungsmaßstabe aufzutragen ist.

8. Die Schubspannungen im Balkenquerschnitt. Die Schubspannungen der Balkenquerschnitte haben für die Anwendungen der Festigkeitslehre auf die Berechnung der Baukonstruktionen eine viel geringere Wichtigkeit als die Normalspannungen, weil Form und Größe der Querschnitte aus praktischen Gründen in der Regel so gewählt werden müssen, daß die Schubspannungen die zulässige Grenze bei weitem nicht erreichen und für die Wahl der Querschnittsgrößen also nicht maßgebend sind. Aus diesem Grunde beschränken wir uns in den folgenden Betrachtungen auf die einfachsten und für die Anwendung wichtigsten Fälle. Der in Betracht gezogene, in den Abb. 14 und 15 dargestellte Balken hat eine lot-

recht gestellte Symmetrieebene, in der die sämtlichen ***äußeren***, lotrechten Kräfte auf den Balken einwirken. V_1 bezeichnet die Resultante der von dem Balkenteil I aufzunehmenden äußeren Kräfte.

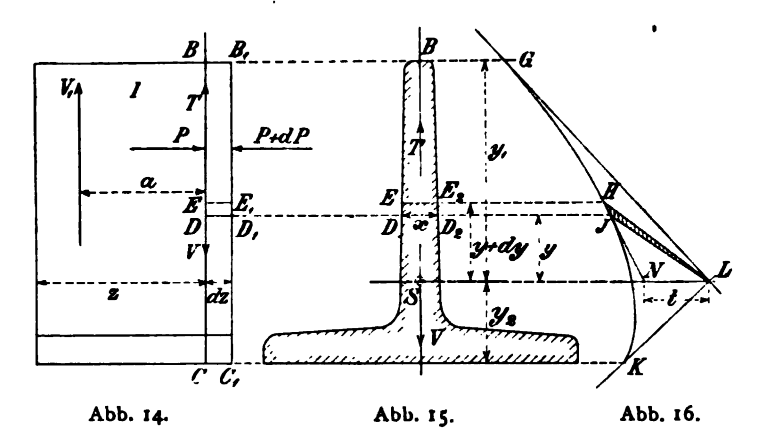


Abb. 14. Abb. 15. Abb. 16.

Wir zerlegen die Kraft V_1 in das Kräftepaar V_1, V und die Kraft T. V und T bezeichnen zwei Kräfte, welche in der Symmetrieachse des Querschnitts BC wirken (Abb. 14 und 15), gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind. Das Moment

$$M = Va$$

ist das vom Querschnitt BC aufzunehmende ***Biegungsmoment***, welches mit den Normalkräften $\sigma\, dF$ eine Gleichgewichtsgruppe bildet. Das Biegungsmoment trägt das positive Vorzeichen, wenn der Drehsinn des Kräftepaares V_1, V mit dem Sinn der Uhrzeigerbewegung übereinstimmt (vergl. II, 8). Die Kraft T heißt die ***Schubkraft*** oder die ***Querkraft*** des Querschnittes; sie bildet eine Gleichgewichtsgruppe mit den Schubkräften $\tau\, dF$, welche von dem Balkenteil II auf den Balkenteil I übertragen werden. Wir legen der Schubkraft T das ***positive*** Vorzeichen bei, wenn sie nach *oben* zeigt.

Das Biegungsmoment M ist immer eine stetige Funktion der Abszisse z, d. h. der unendlich kleine Balkenteil BCC_1B_1 zwischen den Abszissen z und $z + dz$ ist nicht imstande, äußere Kräfte von ***endlicher*** Größe aufzunehmen, weil in einem solchen Falle in diesem Balkenteil unendlich große Spannungen eintreten müßten. Daher hat das Biegungsmoment $M + dM$ des Balkenquerschnittes B_1C_1 (Abb. 14) die Größe

$$M + dM = V_1 (a + dz).$$

Da M gleich $V_1 a$ ist, so folgt hieraus

$$dM = V_1\, dz.$$

Zwischen dem Biegungsmoment M des Balkenquerschnittes und seiner Schubkraft T besteht demnach die Beziehung:

$$V_1 = T = \frac{dM}{dz}. \tag{21}$$

Wir bestimmen nun die auf den Balkenteil BB_1D_1D (Abb. 14 und 17) einwirkenden Kräfte und nehmen an, es seien gegeben: das Biegungsmoment M und die Schubkraft T des Balkenquerschnitts BC, ferner die vertikal nach unten gerichteten Belastungen $q_1\,dz$ und $q\,dz$, welche auf die Balkenteile BB_1C_1C und BB_1D_1D einwirken. Der Balkenteil BB_1D_1D hat die in Abb. 17 eingetragenen sieben Kräfte aufzunehmen: die gegebene Belastung $q\,dz$, die Normalkräfte P und $P + dP$, die Schubkräfte Q und $Q + dQ$ der Querschnittsteile BD und B_1D_1, endlich die Normalkraft $\sigma_1\,x\,dz$ und die Schubkraft $\tau_1\,x\,dz$ der Fläche DD_1 von der Breite x und der Länge dz. Die unbekannten Spannungen σ_1 und τ_1 sind in die Zeichnung in *positivem* Sinne eingetragen.

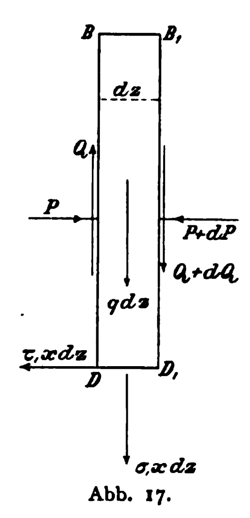


Abb. 17.

Der Querschnittsteil DD_2E_2E (Abb. 15) von der Breite x und der Höhe dy nimmt nach Gleichung 10) eine Druckspannung σ von der Größe

$$\sigma = \frac{My}{FF_1} \tag{22}$$

auf, wenn mit F_1 die Seilpolygonfläche $GHJKL$ (Abb. 16) bezeichnet wird, welche das Trägheitsmoment

$$J = FF_1$$

der Querschnittsfläche F in bezug auf die horizontale Schwerpunktsachse SL bestimmt (II, 12). Daher ist die Druckkraft

$$P = \frac{M}{FF_1}\int_y^{y_1} y\,x\,dy. \tag{23}$$

Das Integral bezeichnet das Moment des Querschnittsteils BDD_2 (Abb. 15) in bezug auf die Nullinie SL. Um dieses Moment auf graphischem Wege zu bestimmen, zieht man in Abb. 16 an die Seilkurve die Tangente JN und multipliziert die Länge

$$LN = t$$

mit der Normalkraft $\frac{F}{2}$ der Seilkurve. Daher ist

$$P = \frac{Mt}{2\,F_1}. \tag{24}$$

In gleicher Weise ergibt sich der Druck $P + dP$ gegen den Querschnittsteil $B_1 D_1$ (Abb. 14 und 17):

$$P + dP = \frac{(M + dM)\, t}{2\, F_1}.$$

Das Gleichgewicht des Balkenteils $B B_1 D_1 D$ fordert, daß die algebraische Summe der Horizontalkräfte gleich null sei:

$$0 = P + dP - P + \tau_1\, x\, dz.$$

Da

$$\frac{dM}{dz} = T$$

ist, so folgt hieraus:

$$\tau_1 = -\frac{T t}{2 F_1 x}. \qquad (25)$$

Zwischen der wagerechten Schubspannung τ_1 der Fläche $D D_1$ und der lotrechten Schubspannung τ des Querschnittselements $D D_2 E_2 E$ (Abb. 15) besteht die einfache Beziehung

$$\tau = -\tau_1, \qquad (26)$$

welche in der Abhandlung V, Gleichung 4) abgeleitet worden ist; demnach ist

$$\tau = +\frac{T t}{2 F_1 x}. \qquad (27)$$

Wenn, wie im vorliegenden Falle, die Schubkraft T nach oben gerichtet, also positiv ist, so hat τ_1 den negativen, τ dagegen den positiven Drehsinn. Der Querschnittsteil $E E_2 D_2 D$, Abb. 15, hat eine Schubkraft von der Größe

$$\tau\, x\, dy = \frac{T}{F_1} \frac{t\, dy}{2} \qquad (28)$$

aufzunehmen. Daher ist (Abb. 17)

$$Q = \frac{T}{F_1} \int_y^{y_1} \frac{t\, dy}{2}. \qquad (29)$$

Die Größe $\frac{t\, dy}{2}$ bezeichnet die Fläche des unendlich kleinen Dreiecks LJH in Abb. 16; das Integral wird also durch die Fläche

$$LJHG = F'$$

dargestellt. Demnach ist

$$Q = \frac{T F'}{F_1}, \qquad (30)$$

und ebenso ergibt sich

$$Q + dQ = \frac{(T + dT)\, F'}{F_1}. \qquad (31)$$

Es ist zu beachten, daß die Schubkraft $(T + dT)$ des Querschnitts $B_1 C_1$ durch die Gleichgewichtsbedingung für den Balkenteil $BB_1 C_1 C$:

$$T + dT = T - q_1 \, dz \qquad (32)$$

bestimmt wird.

Das Gleichgewicht des Balkenteils $BB_1 D_1 D$ (Abb. 17) fordert ferner, daß die algebraische Summe der Vertikalkräfte gleich null sei:

$$0 = Q + dQ - Q + q \, dz + \sigma_1 \, x \, dz.$$

In Verbindung mit den Gleichungen 31) und 32) folgt hieraus:

$$\sigma_1 = \frac{q_1 F - q F_1}{x F_1}. \qquad (33)$$

In der Regel sind die Belastungen q_1 und q der unendlich kleinen Balkenlängen dz nicht genau gegeben, sondern können nur schätzungsweise ermittelt werden, und in vielen Fällen sind die Werte von σ_1 so klein, daß sie vernachlässigt werden, d. h. gleich null gesetzt werden können.

Aus der Gleichung 28) gewinnt man das folgende Bild von der Verteilung der Schubkraft T über die Querschnittsfläche F. Man denke sich die Kraft T *gleichmäßig* verteilt über die von der Seilkurve $GHJK$ und ihren Tangenten GL, KL eingeschlossene Fläche F_1, so daß die Flächeneinheit mit der Kraft $\frac{T}{F_1}$ belegt ist. Läßt man nun die Horizontale DJ (Abb. 15 und 16) durch Parallelverschiebung die Querschnittsfläche F bestreichen, während der zugehörige, um den Punkt L sich drehende Vektor LJ die Fläche F_1 beschreibt, so ist die Schubkraft, welche der von DJ bestrichene Querschnittsteil aufzunehmen hat, gleich der Kraft, welche gleichzeitig von dem Vektor LJ auf der Fläche $GHJKL$ bestrichen wird; denn die gleichzeitig von DJ und LJ bestrichenen Flächenteile sind $x \, dy$ und $\frac{t \, dy}{2}$.

9. **Die graphische Darstellung des Spannungszustandes eines unendlich kleinen Balkenteils.** Nachdem für den unendlich kleinen Balkenteil EDD_1E_1 (Abb. 14) von der Länge dz, der Höhe dy und der Breite x die Spannungen σ, τ der Seitenfläche DE und die Spannungen σ_1, τ_1 der Seitenfläche DD_1 durch die Gleichungen 22), 27), 33) und 25) bestimmt worden sind, kann der Spannungszustand dieses Balkenteils nach dem in der Abhandlung V, 5 beschriebenen Verfahren graphisch dargestellt werden.

Die Abb. 18 zeigt diese Darstellung. In bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem σ, τ, dessen wagerechte σ-Achse nach

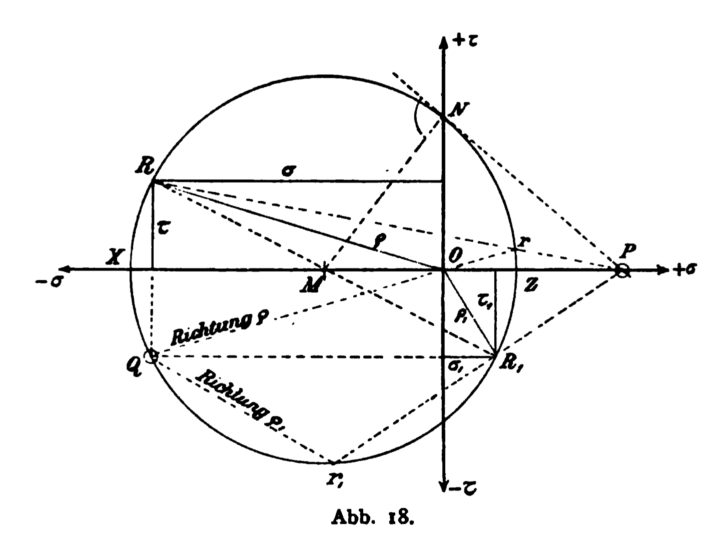


Abb. 18.

rechts und dessen lotrechte τ-Achse nach oben zeigt, sind die beiden Punkte R und R_1 durch ihre Koordinaten σ, τ und σ_1, τ_1 bestimmt. Der Pol Q der Darstellung ergibt sich, indem man (Abb. 14 und 18)

$$RQ \parallel DE \quad \text{und} \quad R_1Q \parallel DD_1$$

zieht. RR_1Q ist der Hauptkreis des darzustellenden Spannungszustandes. Sein Mittelpunkt M ist der Schnittpunkt der σ-Achse mit der Geraden RR_1. Sein Durchmesser hat die Größe

$$RR_1 = \sqrt{(\sigma - \sigma_1)^2 + 4\tau^2},$$

wobei im vorliegenden Beispiel zu beachten ist, daß nicht nur τ und τ_1, sondern auch σ und σ_1 verschiedene Vorzeichen haben. Der Punkt P ist der Pol der τ-Achse in bezug auf den Hauptkreis; um ihn zu bestimmen, zieht man die Tangente NP. Die *Größen* der Spannungen ϱ und ϱ_1 der Flächenelemente DE und DD_1 (Abb. 14) werden durch die Strecken OR und OR_1 bestimmt. Die Richtungen dieser Spannungen ergeben sich, indem man die Geraden PrR und PR_1r_1 zieht: ϱ ist parallel zu Qr und ϱ_1 parallel zu Qr_1 gerichtet. Die graphische Darstellung gibt in gleicher Weise Größe und Richtung der Spannung für jeden anderen, normal zur Bildfläche durch den Punkt D gelegten Schnitt.

Die *Grenzwerte der Schubspannungen* werden durch den Halbmesser des Hauptkreises dargestellt:

$$\left.\begin{aligned} \tau_{\max} &= +\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma-\sigma_1)^2+4\tau^2} \\ \tau_{\min} &= -\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma-\sigma_1)^2+4\tau^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Ferner haben die *Grenzwerte der Normalspannungen* die Größen:

$$\sigma_x = \frac{\sigma+\sigma_1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma-\sigma_1)^2+4\tau^2} = OX$$

und

$$\sigma_z = \frac{\sigma+\sigma_1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma-\sigma_1)^2+4\tau^2} = OZ. \qquad (35)$$

10. Literarische Notiz. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung wurde folgenden Aufsätzen entnommen:

1. *Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen;* Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, 1870, S. 41, und 1877, S. 51.

2. *Ueber die Verteilung der exzentrischen Druckbelastung eines Mauerwerkskörpers;* Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, 1883, S. 163.

3. *Ueber die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen;* Zivilingenieur 1887, S. 43.

Wir verweisen im übrigen auf die Lehrbücher der Baumechanik und der Festigkeitslehre.

Abhandlung VIII.

Der kontinuierliche Balken.

1. Gegenstand der Untersuchung und ihre Voraussetzungen. Die folgenden Rechnungen beziehen sich auf einen geraden, vollkommen elastischen Balken, auf den nur lotrechte und in *einer* Ebene liegende Kräfte, die Belastungen und die Stützkräfte, einwirken. Die Kraftebene ist eine *Symmetrieebene* des Balkens; infolgedessen verwandelt sich die ursprünglich gerade Balkenachse bei der Biegung in eine *ebene* Kurve, *die elastische Linie.* Eine mathematisch genaue Bestimmung der Formänderung ist unausführbar. Rechnung und Beobachtung haben aber zu der Erkenntnis geführt, daß von den inneren Kräften, welche die Formänderung erzeugen, nur die *Normalspannungen* der Balkenquerschnitte berücksichtigt zu werden brauchen, weil hiergegen der Einfluß aller übrigen Spannungen verschwindet.

Um die Querschnittsmaße eines auszuführenden Balkens so wählen zu können, daß die Inanspruchnahme seiner Festigkeit die zulässigen Grenzen nicht überschreitet, müssen aus den gegebenen Belastungen die unbekannten Stützkräfte oder die von ihnen abhängigen Biegungsmomente und Schubkräfte der Balkenquerschnitte berechnet werden. Diese Kräfte und Momente sind in höchst empfindlicher Weise abhängig von der Stützenlage, insbesondere von der Höhenlage der Stützen. Es ergeben sich demnach die Fragen: Welche Stützenlage ist die vorteilhafteste, und welche Nachteile und Gefahren sind mit einer zufälligen Aenderung der Stützenlage verbunden? Endlich sind in manchen Fällen die größten Formänderungen des Balkens, besonders die größten Einsenkungen zwischen den Stützen von Interesse.

Die angedeuteten Aufgaben können durch Rechnung oder auf graphischem Wege gelöst werden. Es erscheint zweckmäßig, beide

Verfahren voneinander zu trennen und zunächst den Weg der Rechnung einzuschlagen. Das graphostatische Verfahren soll in der nächstfolgenden Abhandlung beschrieben werden.

2. Die Differentialgleichung der elastischen Linie. Wir beziehen die Lage der elastischen Linie auf ein festes Koordinatensystem, dessen horizontale x-Achse nach *rechts* und dessen vertikale y-Achse nach *unten* zeigt. Wir nehmen an, daß die Achse des ungebogenen Balkens wagerecht ist, und daß die Neigung $\frac{dy}{dx}$ der elastischen Linie gegen die Horizontale in allen Punkten sehr gering ist, so daß, wenn die Gleichung der elastischen Linie bekannt wäre, ihr Krümmungshalbmesser mit großer Annäherung durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad (1)$$

bestimmt werden könnte. Ein zweiter Wert des Krümmungshalbmessers ergibt sich aus der Formänderung des Balkenstückes $ABDC$ (Abb. 1) zwischen den Abszissen x und $x + dx$, die in der Abhandlung VII bestimmt und beschrieben worden ist. Die Formänderung besteht darin, daß sich der Balkenquerschnitt CD gegen den Nachbarquerschnitt AB um einen unendlich kleinen Winkel $d\varphi$ von CD nach C_1D_1 dreht. Die Drehung erfolgt um die Nullinie des Querschnittes CD, welche durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und die Bildfläche im Punkte F schneidet. Der Krümmungsmittelpunkt O des Bogenelements EF der elastischen Linie ist daher der Schnittpunkt der Symmetrieebene des Balkens mit den beiden Querschnitten AB und C_1D_1. Der unendlich kleine Winkel

Abb. 1.

$$d\varphi = \frac{HK}{FH}$$

wird bestimmt durch die elastische Längenänderung HK irgend einer Balkenfaser GH von der ursprünglichen Länge dx. Wir bezeichnen mit M das Biegungsmoment, welches von dem Balkenquerschnitt AB aufzunehmen ist, mit J das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in bezug auf seine wagerechte Schwerpunktsachse, mit ε den Elastizitätsmodul des Balkenmaterials und mit a den Ab-

stand der Faser GH von der neutralen Faserschicht EF. Da die Spannung der Faser GH nach Gleichung 10) der Abhandlung VII die Größe

$$\sigma = \frac{Ma}{J}$$

hat, so ist ihre elastische Längenänderung

$$HK = \frac{Ma\,dx}{\varepsilon\,J}.$$

Folglich ist

$$d\varphi = \frac{M\,dx}{\varepsilon\,J} \tag{2}$$

und

$$\varrho = \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\varepsilon\,J}{M}. \tag{3}$$

Wir haben dem Biegungsmoment M das ***positive*** Vorzeichen beigelegt, wenn die ***konkave*** Seite des gebogenen Balkens nach ***oben*** gekehrt ist (II, 8); in diesem Falle ist d^2y und folglich ϱ ***negativ***. Demnach ist die Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{\varepsilon J}. \tag{4}$$

Die vorstehende Betrachtung enthält nicht die Voraussetzung, daß der Balkenquerschnitt nach Form und Größe unveränderlich sei; sie gilt also für den allgemeinen Fall, in welchem das Trägheitsmoment J eine veränderliche Größe hat.

3. Die Biegungsmomente und die Schubkräfte der Querschnitte eines kontinuierlichen Balkens. Man kann jeden kontinuierlichen Balken (Abb. 3) ansehen als einen *einfachen* Balken, der nur in seinen Endpunkten 1 und 5 gestützt ist und außer den wirklichen, nach unten zeigenden positiven Lasten $P_1, P_2, P_3 \ldots$ als *negative* Lasten die nach oben zeigenden Drücke der *Mittelstützen* Q_2, Q_3, Q_4 aufnimmt. Wenn alle diese Lasten bekannt sind, so ergibt sich die graphische Darstellung der Biegungsmomente nach (II, 8), indem man das Seilpolygon der Lasten P, Q aufträgt und die Schlußlinie $A\,J$ zieht. Die Ordinaten der in Abb. 2 *unter* der Schlußlinie liegenden Seilpolygonflächen bestimmen die *positiven* Biegungsmomente der nach unten gekrümmten Balkenstrecken, während die *über* der Schlußlinie liegenden Flächen die *negativen* Biegungsmomente der in der Nähe der Mittelstützen liegenden, nach oben gekrümmten Balkenteile darstellen. In den Ordinaten der

Querschnitte, in welchen M gleich null wird, liegen die *Wendepunkte* der elastischen Linie. Ist der Längenmaßstab der Zeichnung z. B. 1 : 200 und die Horizontalkraft H des Seilpolygons

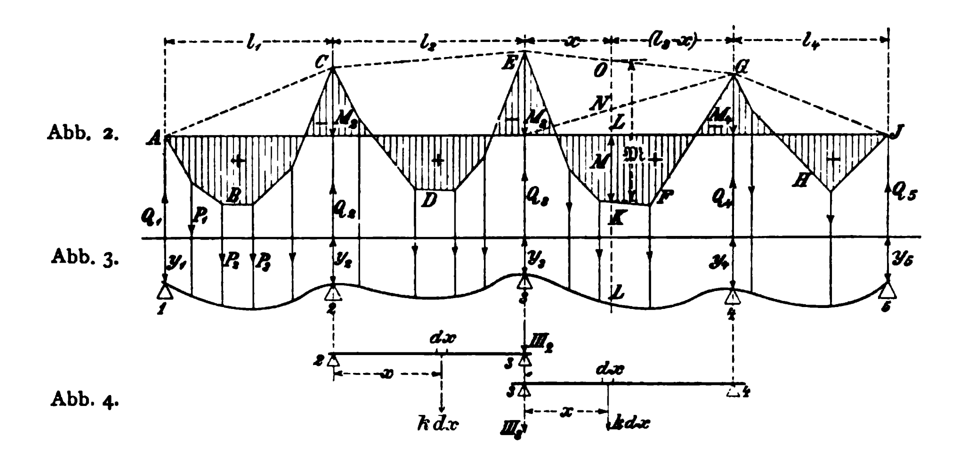
$$H = 1500 \text{ kg},$$

so sind die Ordinaten des Seilpolygons als Darstellung der Biegungsmomente mit dem Maßstabe

$$1 \text{ cm} = 200 \text{ cm} \cdot 1500 \text{ kg} = 300\,000 \text{ cm kg}$$

zu messen.

Würde der Balken über jeder Mittelstütze durchschnitten, so daß jedes Balkenfeld an seinen Enden *frei* unterstützt wäre, so



würden die *positiven* Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ der vier Balkenfelder nach (II, 8) durch die Ordinaten der Flächen ABC, CDE, EFG, GHJ dargestellt werden.

Wir fassen irgend einen Balkenquerschnitt ins Auge, z. B. den Querschnitt L im dritten Balkenfelde, dessen Abstand von der dritten Stütze mit x bezeichnet wird. Die Stützweite des dritten Feldes hat die wagerechte Länge l_3, und die Biegungsmomente der Balkenquerschnitte über der dritten und der vierten Stütze haben die algebraischen Werte M_3 und M_4. Das Biegungsmoment M des Querschnittes L des kontinuierlichen Balkens wird bestimmt durch die Strecken:

$$M = LK = OK - ON - NL.$$

Die Strecke OK bestimmt das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$, das der Querschnitt L aufnehmen müßte, wenn der Balken über den Stützen 3

und 4 durchschnitten und von diesen Stützen also frei unterstützt würde. Die beiden anderen Strecken ON und NL haben die Werte:

$$ON = -\frac{l_3 - x}{l_3} M_3$$

$$NL = -\frac{x}{l_3} M_4,$$

und folglich ist

$$M = \mathfrak{M} + \frac{l_3 - x}{l_3} M_3 + \frac{x}{l_3} M_4. \qquad (5)$$

Die Schubkraft V des Balkenquerschnittes L, d. h. die Resultante aller *links* vom Querschnitt L von dem kontinuierlichen Balken aufzunehmenden Lasten und Stützendrücke hat nach (VII, 8, Gleichung 21) die Größe

$$V = \frac{dM}{dx}$$

oder

$$V = \frac{d\mathfrak{M}}{dx} + \frac{M_4 - M_3}{l_3}. \qquad (6)$$

Die Schubkraft V trägt nach (VII, 8) das *positive* Vorzeichen, wenn die bezeichnete Resultante nach *oben* zeigt. Wir bezeichnen die Grenzwerte von V innerhalb eines Balkenfeldes, also für die Abszissen 0 und l mit A und B, demnach für das dritte Feld mit A_3, B_3, für das vierte Feld mit A_4, B_4 usf., ferner die nach oben zeigenden Drücke der Stützen 1, 2, 3 ... gegen den Balken mit Q_1, Q_2, Q_3 ... Die Schubkraft A_4 des Querschnitts unmittelbar rechts neben der vierten Stütze bildet also die Summe aus der Schubkraft B_3 unmittelbar links neben jener Stütze und der Stützkraft Q_4:

$$A_4 = B_3 + Q_4;$$

daher haben die Stützkräfte Q die Größen:

$$Q_1 = A_1, \; Q_2 = A_2 - B_1, \; Q_3 = A_3 - B_2, \; Q_4 = A_4 - B_3 \text{ usf.} \qquad (7)$$

Als Beispiel zur Erläuterung der vorstehenden Beziehungen wählen wir den Fall, in welchem die Belastung eines jeden Balkenfeldes über dessen Länge l *gleichmäßig* verteilt ist. Das dritte Feld trägt die gleichmäßig verteilte Last $p_3 l_3$ und daher ist für dieses Feld:

$$\mathfrak{M} = \frac{p_3}{2}(l_3 x - x^2)$$

$$M = M_3 + \left(\frac{M_4 - M_3}{l_3} + \frac{p_3 l_3}{2}\right) x - \frac{p_3}{2} x^2 \qquad (8)$$

$$V = \frac{M_4 - M_3}{l_3} + \frac{p_3 l_3}{2} - p_3 x. \qquad (9)$$

Für x gleich null und gleich l_3 nimmt V die Werte an:

$$A_3 = \frac{M_4 - M_3}{l_3} + \frac{p_3 l_3}{2} \tag{10}$$

$$B_3 = \frac{M_4 - M_3}{l_3} - \frac{p_3 l_3}{2}. \tag{11}$$

Ebenso ist

$$A_4 = \frac{M_5 - M_4}{l_4} + \frac{p_4 l_4}{2}$$

und folglich nach Gleichung 7)

$$Q_4 = A_4 - B_3 = \frac{M_5 - M_4}{l_4} - \frac{M_4 - M_3}{l_3} + \frac{p_4 l_4}{2} + \frac{p_3 l_3}{2}. \tag{12}$$

Das größte *positive* Biegungsmoment M'_3 innerhalb des dritten Feldes ist von dem Balkenquerschnitt aufzunehmen, für den

$$\frac{dM}{dx} = V = 0,$$

also

$$x = \frac{l_3}{2} + \frac{M_4 - M_3}{p_3 l_3} = \frac{A_3}{p_3} \tag{13}$$

ist. Da nach Gleichung 8):

$$M = M_3 + A_3 x - \frac{p_3 x^2}{2} \tag{14}$$

ist, so ergibt sich durch Einsetzen des Wertes von x

$$M'_3 = M_3 + \frac{A_3^2}{2 p_3}. \tag{15}$$

Diese Maximalmomente und die größten Stützenmomente kommen bei der Wahl der Balkenquerschnitte hauptsächlich in Betracht.

4. Die Berechnung der Stützenmomente. Wir numerieren wie im vorigen Abschnitt die Stützen und die Balkenfelder von links nach rechts, so daß z. B. das dritte Balkenfeld zwischen den Stützen 3 und 4 liegt, und bezeichnen: die Stützweiten der Balkenfelder 1, 2, 3 . . . mit l_1, l_2, l_3 . . ., die Ordinaten der Stützen 1, 2, 3 . . ., bezogen auf das im Abschnitt 2 beschriebene Koordinatensystem, mit y_1, y_2, y_3 . . . und die Neigungen $\frac{dy}{dx}$ der elastischen Linie über den Stützen 1, 2, 3 . . . mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . . .; die Zahlen α tragen also das positive Vorzeichen, wenn die elastische Linie von links nach rechts

fällt. Wir nehmen an, *daß das Trägheitsmoment J des Balkenquerschnittes veränderlich ist,* und setzen zur Abkürzung die im übrigen nach Gleichung 5) zu bestimmende Größe

$$\frac{M}{\varepsilon J} = k, \tag{16}$$

wodurch die Differentialgleichung der elastischen Linie die Form

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = -k$$

annimmt. Die hier in Frage kommende Beziehung ergibt sich, indem man diese Gleichung *für zwei aufeinanderfolgende Balkenfelder,* z. B. für die Felder 2 und 3 integriert. Für das *zweite* Balkenfeld legen wir die y-Achse durch die Stütze 2 und erhalten, indem wir einmal von 0 bis x, das zweite Mal von 0 bis l_2 integrieren, die beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{dx} - \alpha_2 = -\int_0^x k\, dx = w \tag{17}$$

und

$$\alpha_3 - \alpha_2 = -\int_0^{l_2} k\, dx = w_2. \tag{18}$$

Aus Gleichung 17) folgt durch eine zweite Integration von 0 bis l_2:

$$y_3 - y_2 - l_2 \alpha_2 = \int_0^{l_2} w\, dx. \tag{19}$$

Da nach einer bekannten Formel der Integralrechnung:

$$\int_0^{l_2} w\, dx = l_2 w_2 - \int_{x=0}^{x=l_2} x\, dw$$

und nach Gleichung 17)

$$dw = -k\, dx$$

ist, so folgt aus Gleichung 19)

$$y_3 - y_2 = l_2 \alpha_2 + l_2 (\alpha_3 - \alpha_2) + \int_0^{l_2} x\, k\, dx$$

oder

$$\frac{y_3 - y_2}{l_2} = \alpha_3 + \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} x\, k\, dx. \tag{20}$$

In gleicher Weise ergibt sich für das *dritte* Balkenfeld, wenn

die x-Achse in ihrer Lage bleibt, die y-Achse aber durch die Stütze 3 gelegt wird, nach den Gleichungen 18) und 20):

$$\alpha_4 - \alpha_3 = -\int_0^{l_3} k\,dx \tag{21}$$

und

$$\frac{y_4 - y_3}{l_3} = \alpha_4 + \frac{1}{l_3}\int_0^{l_3} x\,k\,dx. \tag{22}$$

Wir folgern aus den Gleichungen 20) und 22):

$$\frac{y_3 - y_2}{l_2} - \frac{y_4 - y_3}{l_3} = \alpha_3 - \alpha_4 + \frac{1}{l_2}\int_0^{l_2} x\,k\,dx - \frac{1}{l_3}\int_0^{l_3} x\,k\,dx \tag{23}$$

und aus den Gleichungen 21) und 23):

$$\frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3} = \frac{1}{l_2}\int_0^{l_2} x\,k\,dx + \int_0^{l_3} k\,dx - \frac{1}{l_3}\int_0^{l_3} x\,k\,dx. \tag{24}$$

Diese Beziehung läßt sich durch Abb. 2 und 4 in folgender Weise veranschaulichen. Man belastet einen Balken, der an seinen Enden von den Stützen 2 und 3 frei gestützt wird, auf jeder unendlich kleinen Strecke dx mit der zugehörigen unbenannten Zahl

$$k\,dx = \frac{M\,dx}{\varepsilon\,J}$$

und gibt diesen Lasten den Sinn nach unten oder nach oben, je nachdem M für die Strecke dx positiv oder negativ ist. Dann bezeichnet das Integral

$$\frac{1}{l_2}\int_0^{l_2} x\,k\,dx = \mathrm{III}_2 \tag{25}$$

den Stützendruck, den das Balkenfeld 2 auf die Stütze 3 überträgt. Ebenso bezeichnet die unbenannte Zahl

$$\int_0^{l_3} k\,dx - \frac{1}{l_3}\int_0^{l_3} x\,k\,dx = \mathrm{III}_3 \tag{26}$$

den Stützendruck, den das Balkenfeld 3 (Abb. 4) auf die Stütze 3 überträgt. Die algebraische Summe dieser beiden Stützendrücke muß also gleich der auf der linken Seite der Gleichung 24) angegebenen algebraischen Zahl sein:

$$\frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3} = \mathrm{III}_2 + \mathrm{III}_3. \tag{27}$$

Liegen alle Stützen in *gleicher* Höhe, so wird

$$III_2 + III_3 = 0.$$

Die beiden Stützendrücke sind dann also der Größe nach gleich, dem Sinne nach einander entgegengesetzt.

Indem man die Gleichung 24) für je zwei aufeinanderfolgende Balkenfelder bildet und die Integrale mit Hilfe der Gleichung 5) und der gegebenen Werte von J berechnet, ergeben sich ebenso viele Bedingungen, wie unbekannte Stützenmomente vorhanden sind.

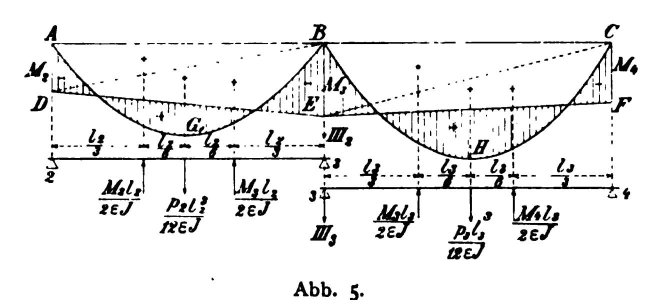


Abb. 5.

Als Beispiel der Anwendung betrachten wir einen kontinuierlichen Balken *konstanten* Querschnittes, dessen Felder 1, 2, 3 ... die gleichmäßig verteilten Lasten $p_1 l_1$, $p_2 l_2$, $p_3 l_3$ ... tragen (Abb 5). Die von der Ordinate

$$k = \frac{M}{\varepsilon J}$$

beschriebene Belastungsfläche des zweiten Balkenfeldes läßt sich zerlegen in das positive Parabelsegment

$$AGB = \frac{2}{3} l_2 \frac{p_2 l_2^2}{8 \varepsilon J} = \frac{p_2 l_2^3}{12 \varepsilon J}$$

und die beiden negativen Dreiecke

$$ADB = \frac{M_2 l_2}{2 \varepsilon J} \quad \text{und} \quad BED = \frac{M_3 l_2}{2 \varepsilon J}.$$

Diese drei Teilflächen erzeugen einen Druck III_2 des Balkens 2, 3 auf die Stütze 3 von der Größe

$$III_2 = \frac{1}{2} \frac{p_2 l_2^3}{12 \varepsilon J} + \frac{1}{3} \frac{M_2 l_2}{2 \varepsilon J} + \frac{2}{3} \frac{M_3 l_2}{2 \varepsilon J},$$

also

$$III_2 = \frac{p_2 l_2^3 + 4 M_2 l_2 + 8 M_3 l_2}{24 \varepsilon J}, \tag{28}$$

wobei zu beachten ist, daß die Stützenmomente mit ihren ***negativen***

Werten einzusetzen sind. In gleicher Weise ergibt sich der Druck III_3, der von den Belastungsflächen $\frac{p_3 l_3^3}{12\,\varepsilon J}$, $\frac{M_3 l_3}{2\,\varepsilon J}$, $\frac{M_4 l_3}{2\,\varepsilon J}$ des dritten Balkenfeldes auf die Stütze 3 übertragen wird:

$$\mathrm{III}_3 = \frac{p_3 l_3^3 + 8\,M_3 l_3 + 4\,M_4 l_3}{24\,\varepsilon J}. \tag{29}$$

Werden diese Größen in die Gleichung 27) eingesetzt, so entsteht für die beiden Balkenfelder 2 und 3 die Bedingung:

$$24\,\varepsilon J\left(\frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3}\right) = p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3 + 4\,M_2 l_2 + 8\,M_3\,(l_2 + l_3) + 4\,M_4 l_3. \tag{30}$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{24\,\varepsilon J\,(y_3 - y_2)}{l_2^4} = u_2, \qquad \frac{24\,\varepsilon J\,(y_4 - y_3)}{l_3^4} = u_3 \quad \text{usf.} \tag{31}$$

und geben der Bedingung hierdurch die Form:

$$0 = (p_2 - u_2)\,l_2^3 + (p_3 + u_3)\,l_3^3 + 4\,M_2 l_2 + 8\,M_3\,(l_2 + l_3) + 4\,M_4 l_3. \tag{32}$$

Liegen alle Stützen in *gleicher* Höhe, so werden die Größen u_2, u_3 . . . gleich null, und die Gleichungen zur Bestimmung der Stützenmomente erhalten die Form:

$$0 = p_2 l_2^3 + p_3 l_3^3 + 4\,M_2 l_2 + 8\,M_3\,(l_2 + l_3) + 4\,M_4 l_3. \tag{33}$$

5. Der kontinuierliche Balken konstanten Querschnittes mit zwei Feldern von gleicher Länge (Abb. 6, 7, 8). Der in Abb. 6 dargestellte Balken hat die Länge

$$L = 2 l_1 = 2 l_2.$$

Seine Mittelstütze 2 liegt um y tiefer als die beiden in gleicher Höhe liegenden Endstützen 1 und 3. Die beiden Felder 1 und 2 sind mit $p_1 l_1$ und $p_2 l_2$ gleichmäßig belastet. Da die beiden Stützenmomente für die Endstützen:

Abb. 6.

Abb. 7.

Abb. 8.

$$M_1 = M_3 = 0$$

sind, so ergibt Gleichung 32) zur Bestimmung des Stützenmoments M_2 die Bedingung

$$0 = (p_1 - u_1)\, l_1^3 + (p_2 + u_2)\, l_2^3 + 8 M_2 (l_1 + l_2). \tag{34}$$

Die Größen u_1, u_2 haben nach Gleichung 31) die Werte

$$u_1 = -u_2 = \frac{24\, \varepsilon J y}{l_1^4} = \frac{384\, \varepsilon J y}{L^4} = u. \tag{35}$$

Folglich ist

$$M_2 = -\frac{L^2}{64}(p_1 + p_2 - 2u). \tag{36}$$

Hierdurch wird die graphische Darstellung der Biegungsmomente (Abb. 7) bestimmt; denn die Pfeilhöhen der beiden Parabelsegmente

$$\frac{p_1 l_1^2}{8} = \frac{p_1 L^2}{32} \quad \text{und} \quad \frac{p_2 l_2^2}{8} = \frac{p_2 L^2}{32}$$

sind gegeben.

Um die graphische Darstellung der Schubkräfte V (Abb. 8) auftragen zu können, müssen nach den Gleichungen 10) und 11) die Kräfte:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{M_2}{l_1} + \frac{p_1 l_1}{2} = \frac{L}{32}(7p_1 - p_2 + 2u) \\ B_1 &= \frac{M_2}{l_1} - \frac{p_1 l_1}{2} = \frac{L}{32}(-9p_1 - p_2 + 2u) \\ A_2 &= -\frac{M_2}{l_2} + \frac{p_2 l_2}{2} = \frac{L}{32}(p_1 + 9p_2 - 2u) \\ B_2 &= -\frac{M_2}{l_2} - \frac{p_2 l_2}{2} = \frac{L}{32}(p_1 - 7p_2 - 2u) \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

berechnet werden. Hieraus ergeben sich die Größen der Stützkräfte nach den Gleichungen 7):

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= A_1 = \frac{L}{32}(7p_1 - p_2 + 2u) \\ Q_2 &= A_2 - B_1 = \frac{L}{32}(10p_1 + 10p_2 - 4u) \\ Q_3 &= -B_2 = \frac{L}{32}(-p_1 + 7p_2 + 2u). \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Man bestimmt endlich die größten positiven Biegungsmomente der beiden Felder nach Gleichung 15):

$$\left.\begin{aligned} M'_1 &= \frac{A_1^2}{2p_1} = \frac{L^2}{2048}\,\frac{(7p_1 - p_2 + 2u)^2}{p_1} \\ M'_2 &= M_2 + \frac{A_2^2}{2p_2} = \frac{B_2^2}{2p_2} = \frac{L^2}{2048}(-p_1 + 7p_2 + 2u)^2. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Die Belastungen der Längeneinheit p_1, p_2 schwanken in der Regel zwischen zwei *gegebenen* Grenzen p und q, und es sind dann die größten Werte zu ermitteln, die von den Biegungsmomenten M_2, M'_1 und M'_2 innerhalb jener Grenzen angenommen werden können. Aus der Gleichung 36) geht hervor, daß das Stützenmoment M_2 seinen größten negativen Wert erreicht, wenn p_1 und p_2 möglichst groß werden, wenn also

$$p_1 = p_2 = q$$

ist. Dann wird

$$M_{2\,\max} = -\frac{L^2}{32}(q-u). \tag{40}$$

Das Biegungsmoment M'_1 nimmt dagegen, wie aus Gleichung 39) hervorgeht, seinen größten Wert an, wenn

$$p_1 = q \quad \text{und} \quad p_2 = p$$

ist:

$$M'_{1\,\max} = \frac{L^2(7q-p+2u)^2}{2048\,q} \tag{41}$$

Ebenso groß ist der Maximalwert von M'_2.

Die Senkung y der Mittelstütze ist zweckmäßig so zu wählen, daß der numerisch größte Wert der beiden Biegungsmomente $M_{2\,\max}$ und $M'_{1\,\max}$ möglichst klein wird. Da mit wachsendem u der negative Wert von $M_{2\,\max}$ abnimmt, der positive Wert von $M'_{1\,\max}$ dagegen zunimmt, so ergibt sich der *vorteilhafteste* Wert von u aus der Bedingung

$$-M_{2\,\max} = +M'_{1\,\max} \tag{42}$$

oder

$$\frac{q-u}{32} = \frac{(7q-p+2u)^2}{2048\,q}.$$

Da hier nur eine *Senkung* der Mittelstütze, also ein *positiver* Wert von

$$u = \frac{24\,\varepsilon J y}{l_1^4} = \frac{384\,\varepsilon J y}{L^4}$$

in Betracht kommt, so gilt die positive Wurzel

$$u = \frac{-23q+p}{2} + 2\sqrt{34q^2-2pq}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{p}{q} = r,$$

so ergibt sich als vorteilhafteste Senkung der Mittelstütze

$$y = \frac{q L^4\left(r-23+4\sqrt{34-2r}\right)}{768\,\varepsilon J}. \tag{43}$$

Die folgende Tabelle enthält zur besseren Uebersicht für verschiedene Werte von r die zugehörigen Werte von y und M_{max} nach den Gleichungen 43) und 40).

Tabelle 1.

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$y : \frac{q L^4}{1\,000\,000\, \varepsilon . J} =$	421	503	583	662	740	817
$M_{max} : \frac{q L^2}{32} =$	0,838	0,807	0,776	0,746	0,716	0,686

Demnach bestehen mit großer Annäherung die folgenden einfacheren Beziehungen:

$$M_{max} = \frac{L^2}{32} (0{,}84\, q - 0{,}15\, p) \tag{44}$$

und

$$y = \frac{L^4 (0{,}42\, q + 0{,}40\, p)}{1000\, \varepsilon . J}. \tag{45}$$

Die dritte Reihe der vorstehenden Tabelle läßt den Vorteil erkennen, der durch eine Senkung der Mittelstütze erreicht werden kann. Liegen alle drei Stützen in *gleicher* Höhe, ist also u gleich null, so nehmen nach den Gleichungen 40) und 41) das größte negative und das größte positive Biegungsmoment die folgenden Werte an:

$$M_{2\,max} = - \frac{q L^2}{32} \tag{46}$$

und

$$M_{1\,max} = \frac{L^2 (7 q - p)^2}{2048\, q}. \tag{47}$$

Von diesen beiden Werten ist numerisch der erste stets der größere, und für die Wahl des Balkenquerschnittes ist daher $\frac{q L^2}{32}$ das maßgebende Biegungsmoment. Durch eine Senkung der Mittelstütze kann man, wie die Tabelle zeigt, das maßgebende Biegungsmoment um 16 bis 31 vH. vermindern, und zwar wächst der Vorteil mit der Größe des Verhältnisses von p zu q. Der Ausnutzung dieses Vorteils steht freilich der Umstand entgegen, daß die Senkung *sehr klein* und daher schwierig herzustellen und zu erhalten ist, so daß durch kleine zufällige Veränderungen der Stützenlage der Vorteil

beseitigt und in einen Nachteil verwandelt werden kann. Man bringt dies in folgender Weise zur Anschauung. Beseitigt man die Mittelstütze ganz, so wird

$$Q_2 = 0 = \frac{L}{32}(10\,p_1 + 10\,p_2 - 4\,u)$$

oder

$$u = \frac{10\,p_1 + 10\,p_2}{4} = \frac{384\;\varepsilon J y_2}{L^4},$$

also die Senkung des Balkens in der Mitte:

$$y_2 = \frac{5}{768}\,\frac{(p_1 + p_2)\,L^4}{\varepsilon J}.$$

In den beiden Grenzfällen, wenn nämlich $(p_1 + p_2)$ gleich $2p$ und gleich $2q$ wird, erhält diese Senkung die Werte:

$$y' = \frac{10}{768}\,\frac{p\,L^4}{\varepsilon J} = 0{,}013\,\frac{p\,L^4}{\varepsilon J}$$

und

$$y'' = 0{,}013\,\frac{q\,L^4}{\varepsilon J}.$$

Die durch Gleichung 45) bestimmte vorteilhafteste Senkung der Mittelstütze beträgt demnach:

$$y = \frac{40\,y' + 42\,y''}{1300} = \frac{y'}{33} + \frac{y''}{31}.$$

Diese Senkung ist offenbar so klein, daß auf eine dauernde Erhaltung derselben und der mit ihr verbundenen Vorteile in der Regel nicht gerechnet werden kann.

Wenn in Ausnahmefällen dieses Bedenken nicht besteht, so kann man die vorteilhafteste Senkung y vermittels der vorstehenden Gleichung bestimmen, indem man eine Beobachtung zu Hilfe nimmt. Man beobachtet die Senkung y', die bei der Belastung durch das Eigengewicht oder durch eine gleichmäßig verteilte Belastung pL des Balkens eintritt, und da

$$y'' = \frac{q\,y'}{p} = \frac{y'}{r}$$

ist, so erhält man

$$y = y'\left(\frac{1}{33} + \frac{1}{31\,r}\right).$$

Man macht sich hierdurch frei von den Ungenauigkeiten, die mit der Bestimmung der Größen ε und J stets verbunden sind.

6. Der kontinuierliche Balken konstanten Quer schnittes auf vier zur Balkenmitte symmetrisch liegenden Stützen (Abb. 9, 10 und 11). Die Symmetrie fordert:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{l_2}{l_3} = m, \quad u_2 = 0, \quad u_1 = -u_3 = u.$$

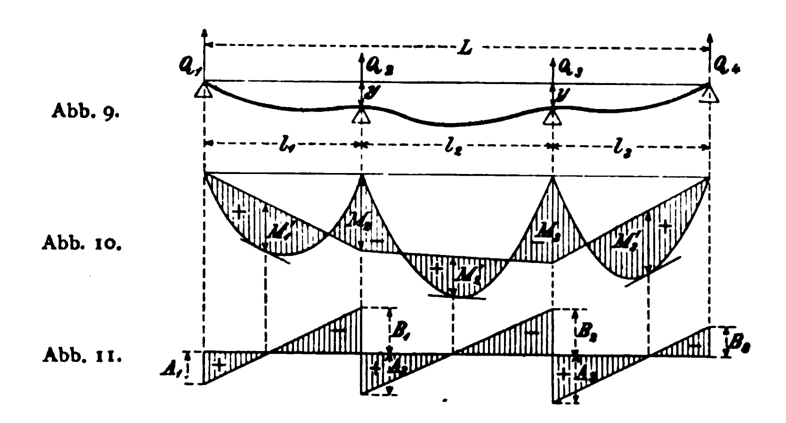


Abb. 9.

Abb. 10.

Abb. 11.

Die beiden unbekannten Stützenmomente M_2 und M_3 werden bestimmt durch die Hauptgleichung 32) für die Felder 1, 2 und 2, 3:

$$8M_2(l_1 + l_2) + 4M_3 l_2 + l_1^3(p_1 - u) + l_2^3 p_2 = 0$$

$$4M_2 l_2 + 8M_3(l_2 + l_3) + l_2^3 p_2 + l_3^3(p_3 - u) = 0.$$

Bezeichnet man wieder mit L die ganze Länge des Balkens, so ist

$$l_1 = \frac{L}{2+m}, \quad l_2 = \frac{Lm}{2+m},$$

und aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned} M_2 &= -\frac{L^2}{4}\,\frac{p_1(2+2m) + p_2 m^3(2+m) - p_3 m - u(2+m)}{(2+m)^3(2+3m)} \\ M_3 &= -\frac{L^2}{4}\,\frac{-p_1 m + p_2 m^3(2+m) + p_3(2+2m) - u(2+m)}{(2+m)^3(2+3m)}. \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Durch die Gleichungen 10) und 11) ergeben sich hieraus die Schubkräfte der Balkenquerschnitte neben den Stützen:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{L}{4}\,\frac{p_1(6+14m+6m^2)-p_2m^3(2+m)+p_3m+u(2+m)}{(2+m)^2\,(2+3m)}\\
B_1 &= -\frac{L}{4}\,\frac{p_1(10+18m+6m^2)+p_2m^3(2+m)-p_3m-u(2+m)}{(2+m)^2\,(2+3m)}\\
A_2 &= \frac{L}{4}\,\frac{p_1+2p_2m^2(2+m)-p_3}{m(2+m)^2}\\
B_2 &= -\frac{L}{4}\,\frac{-p_1+2p_2m^2(2+m)+p_3}{m(2+m)^2}\\
A_3 &= \frac{L}{4}\,\frac{-p_1m+p_2m^3(2+m)+p_3(10+18m+6m^2)-u(2+m)}{(2+m)^2\,(2+3m)}\\
B_3 &= -\frac{L}{4}\,\frac{p_1m-p_2m^3(2+m)+p_3(6+14m+6m^2)+u(2+m)}{(2+m)^2\,(2+3m)}
\end{aligned}\right\}\quad (49)$$

Mit Hilfe dieser Werte berechnet man nach den Gleichungen 7) die Stützkräfte:

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 &= A_1\\
Q_2 &= A_2 - B_1\\
Q_3 &= A_3 - B_2\\
Q_4 &= -B_3\,.
\end{aligned}\right\}\quad (50)$$

Endlich bestimmt man die größten positiven Biegungsmomente innerhalb der drei Balkenfelder nach Gleichung 15):

$$\left.\begin{aligned}
M'_1 &= \frac{A_1^2}{2p_1}\\
M'_2 &= M_2 + \frac{A_2^2}{2p_2}\\
M'_3 &= \frac{B_3^2}{2p_3} = M_3 + \frac{A_3^2}{2p_3}\,.
\end{aligned}\right\}\quad (51)$$

Die Senkung y der beiden Mittelstützen und das Verhältnis m der Stützweite l_2 zu l_1 sind zweckmäßig so zu wählen, daß die größten positiven und negativen Biegungsmomente $M'_{1\,max}$, $M'_{2\,max}$, $M'_{3\,max}$, $M_{2\,max}$, $M_{3\,max}$ numerisch einander gleich werden; denn jede Aenderung dieser Stützenlage führt eine Vergrößerung von wenigstens einem dieser Momente herbei. Da der Symmetrie wegen $M'_{1\,max}$ und $M'_{3\,max}$ sowie $M_{2\,max}$ und $M_{3\,max}$ gleiche Werte haben, so lauten die beiden Bedingungen:

$$M'_{1\,max} = M'_{2\,max} \quad (52)$$

und

$$M'_{2\,max} = -M_{2\,max}. \quad (53)$$

Das Stützenmoment M_2 erreicht seinen größten Wert, wenn die

beiden ersten Balkenfelder eine möglichst große Last tragen, während das dritte Balkenfeld möglichst wenig belastet ist, wenn also

$$p_1 = p_2 = q \quad \text{und} \quad p_3 = p$$

ist:

$$M_{2\,max} = -\frac{L^2}{4}\,\frac{q(2+2m+2m^3+m^4) - pm - u(2+m)}{(2+m)^3(2+3m)}. \tag{54}$$

Das positive Biegungsmoment M'_1 wird möglichst groß, wenn

$$p_1 = p_3 = q \quad \text{und} \quad p_2 = p$$

ist:

$$M'_{1\,max} = \frac{L^2}{35\,q}\left(\frac{q(3+6m) - pm^3 + u}{(2+m)(2+3m)}\right)^2. \tag{55}$$

Endlich erreicht M'_2 seinen größten Wert in dem Belastungsfalle

$$p_1 = p_3 = p,\ p_2 = q:$$

$$M'_{2\,max} = \frac{L^2}{8}\,\frac{q(2+m)m^2 - 2p + 2u}{(2+m)^2(2+3m)}. \tag{56}$$

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\frac{p}{q} = r \quad \text{und} \quad \frac{u}{q} = z$$

und erhalten durch Einsetzen der Werte 54), 55), 56) in die Bedingungen 53) und 52):

$$z = \frac{4 + 4m - 4m^2 + m^4 + 4r}{4(2+m)} \tag{57}$$

$$(3 + 6m - rm^3 + z)^2 = 4(2+3m)(2m^2 + m^3 - 2r + 2z) \tag{58}$$

und durch Verbindung dieser beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 = {} & (272 + 2048m + 3296m^2 + 128m^3 - 2360m^4 - 1408m^5 - 248m^6 + m^8) \\ & + r(736 + 2048m + 1568m^2 - 64m^3 - 1240m^4 - 832m^5 - 160m^6 \\ & - 16m^7 - 8m^8) + r^2(16 - 64m^3 - 32m^4 + 64m^6 + 64m^7 + 16m^8). \end{aligned} \tag{59}$$

Berechnet man nach den vorstehenden Gleichungen für verschiedene Werte von r die entsprechenden Werte von m, z und M_{max}, so findet man, wie aus der folgenden Tabelle zu ersehen ist, daß diese drei Größen nahezu gleichmäßig mit r sich verändern:

Tabelle 2.

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$m = \frac{l_2}{l_1} =$	1,13	1,14	1,15	1,16	1,165	1,17
$z = \frac{u}{q} =$	0,40	0,47	0,53	0,59	0,65	0,72
$M_{max} : \frac{qL^2}{72} =$	0,82	0,78	0,74	0,69	0,65	0,61

Man kann also mit großer Annäherung die obigen verwickelten Beziehungen durch die folgenden einfacheren ersetzen:

$$m = 1{,}13 + \frac{p}{25\,q} \tag{60}$$

$$u = 0{,}40\,q + 0{,}32\,p = \frac{24\,\varepsilon J y}{l_1^4} \tag{61}$$

$$M_{max} = \frac{L^2}{72}\,(0{,}82\,q - 0{,}21\,p). \tag{62}$$

Für einen einfachen Balken von der Feldlänge $\frac{L}{3}$ ist das größte Biegungsmoment gleich $\frac{qL^2}{72}$. Die letzte Reihe der Tabelle zeigt im Vergleich hiermit, daß bei einem kontinuierlichen Balken mit drei Feldern von der Gesamtlänge L das maßgebende Biegungsmoment um 18 bis 39 vH. herabgemindert werden könnte, wenn es möglich wäre, die vorteilhafteste Stützenlage dauernd zu erhalten.

7. Der kontinuierliche Balken konstanten Querschnittes auf vier Stützen, die zur Balkenmitte symmetrisch und in gleicher Höhe liegen. Die für den vorhergehenden allgemeinen Fall entwickelten Formeln für die Größen der Biegungsmomente und der Schubkräfte gelten auch in dem vorliegenden Falle, wenn u gleich null gesetzt wird. Nach den Gleichungen 54), 55) und 56) ist also:

$$M_{2\,max} = -\frac{qL^2}{4}\,\frac{2 + 2m + 2m^3 + m^4 - rm}{(2+m)^3\,(2+3m)} \tag{63}$$

$$M'_{1\,max} = \frac{qL^2}{32}\left(\frac{3 + 6m - rm^3}{(2+m)\,(2+3m)}\right)^2 \tag{64}$$

$$M'_{2\,max} = \frac{qL^2}{8}\,\frac{(2+m)\,m^2 - 2r}{(2+m)^2\,(2+3m)}. \tag{65}$$

Wählt man die Verhältniszahl m so, daß die größten Stützenmomente M_2 und M_3 möglichst klein werden, so findet man, wie die folgende Tabelle zeigt, daß die zugehörigen Werte von M'_1 und M'_2 *kleiner* als die Stützenmomente sind. Für die Wahl des Balkenquerschnittes ist daher stets das Stützenmoment M_2 maßgebend. Die Bedingung des Minimums

$$\frac{dM_{2\,max}}{dm} = 0$$

führt zu der Gleichung

$$0 = 14m^4 + 40m^3 + 6m^2 - 32m - 16 + r\,(9m^2 + 4m - 4), \tag{66}$$

welche für alle in Betracht kommenden Werte von r nur *eine* reelle positive Wurzel hat. Die nachstehende Tabelle enthält diese Wurzeln und die zugehörigen Werte der größten Biegungsmomente.

Tabelle 3.

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$m = \frac{l_2}{l_1} =$	0,91	0,90	0,89	0,88	0,87	0,86
$M_{2\,max} : -\frac{qL^2}{72} =$	0,93	0,90	0,87	0,84	0,81	0,78
$M'_{1max} : \frac{qL^2}{72} =$	0,85	0,82	0,80	0,78	0,76	0,74
$M'_{2max} : \frac{qL^2}{72} =$	0,54	0,44	0,34	0,24	0,14	0,03

Man pflegte früher schätzungsweise anzunehmen, daß es auch bei wagerechter Stützenlage zweckmäßig sei, das Mittelfeld l_2 *größer* zu wählen als die beiden Seitenfelder l_1 und l_3. Die zweite Reihe der Tabelle zeigt, daß diese Annahme nicht richtig war.

Nimmt man, wie schon oben geschehen ist, beim Vergleich das Biegungsmoment $\frac{qL^2}{72}$ als Einheit an, so ersieht man aus der

dritten Reihe der Tabelle, daß in den beiden Grenzfällen p gleich null und gleich q eine Herabminderung des maßgebenden Biegungsmoments um 7 und um 22 vH. erreicht werden kann. Der Vorteil in gleichem Sinne, den man durch eine Senkung der Mittelstützen erreichen kann, wurde im vorigen Abschnitt zu 18 bis 39 vH. ermittelt. Die Senkung der Mittelstützen ermöglicht demnach einen Vorteil von 11 bis 17 vH.

Um eine Uebersicht darüber zu geben, in welchem Maße das Verhältnis der Feldlängen

$$m = \frac{l_2}{l_1}$$

auf das größte Biegungsmoment einwirkt, sind die nach Gleichung 63) berechneten Werte von M_{max} bezogen auf $\frac{qL^2}{72}$ als Einheit für verschiedene Werte von m in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 4.

Werte von $M_{max} : \frac{1}{72} qL^2$ bei horizontaler Stützenlage.

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
m nach Tabelle 3	0,93	0,90	0,87	0,84	0,81	0,78
$m = 1$	0,93	0,91	0,88	0,85	0,83	0,80
$m = 7 : 6$	0,97	0,94	0,92	0,89	0,87	0,85
$m = 6 : 5$	0,97	0,95	0,93	0,90	0,88	0,86
$m = 5 : 4$	0,99	0,97	0,95	0,93	0,90	0,88

Man kann hieraus den Nutzen ersehen, den die vorteilhaftesten Größen von m im Vergleich mit den Werten gewähren, welche in der Praxis bei Balken konstanten Querschnitts am meisten angewandt worden sind.

8. Senkung der Mittelstützen bei bereits ausgeführten Balken mit drei Feldern. Es kann in Frage kommen, welchen Nutzen die Senkung der Mittelstützen zu gewähren imstande ist, wenn für das Verhältnis m nicht der vorteilhafteste, durch Gleichung 60) angegebene Wert gewählt wurde.

Bei einer Senkung der beiden Mittelstützen wachsen die Biegungsmomente $M'_{1\,max}$ und $M'_{2\,max}$, während der numerische Wert von $M_{2\,max}$ abnimmt. Um das größte Biegungsmoment möglichst klein zu machen, ist also die Senkung bis zu dem *kleineren* der beiden Werte von y fortzusetzen, welche den beiden Bedingungen

$$M'_{1\,max} = -M_{2\,max} \quad \text{und} \quad M'_{2\,max} = -M_{2\,max}$$

entsprechen. Welche von diesen beiden Bedingungen zur Anwendung kommt, erkennt man, wenn man den vorliegenden Fall mit der Anordnung vergleicht, die *beide* Bedingungen erfüllt. Liegt z. B. der Fall

$$\frac{p}{q} = 0{,}4 \quad \text{und} \quad \frac{l_2}{l_1} = 1{,}25$$

vor, so ersieht man aus der Tabelle 2, daß die Bedingung

$$M_{2\,max} = M'_{2\,max}$$

anzuwenden ist, da im Vergleich mit der vorteilhaftesten Anordnung, welche

$$\frac{l_2}{l_1} = 1{,}15$$

fordert, in dem vorliegenden Falle l_2 zu groß und l_1 zu klein ist, und daß infolgedessen

$$M'_{2\,max} > M'_{1\,max}$$

ist. Aus der Bedingung

$$-M_{2\,max} = M'_{1\,max}$$

folgt nach den Gleichungen 54) und 55):

$$\left.\begin{array}{l} 8\,(2+3m)\left(2+2m+2m^3+m^4-rm-z\,(2+m)\right) = \\ \quad (2+m)\,(3+6m-rm^3+z)^2, \end{array}\right\} \quad (67)$$

während die Bedingung:

$$-M_{2\,max} = M'_{2\,max}$$

nach den Gleichungen 54) und 56) fordert:

$$z = \frac{4+4m-4\,m^2+m^4+4\,r}{4\,(2+m)}. \qquad (68)$$

Nach diesen beiden Gleichungen sind für die in der Praxis gebräuchlichen Werte von m die Größen von

$$z = \frac{24\,\varepsilon\,J y}{q\,l_1^4}$$

berechnet und in der nachstehenden Tabelle 5 zusammengestellt. Für m gleich 1 gilt nach der obigen Bemerkung die Bedingung 67), während in den anderen Fällen Gleichung 68) zur Anwendung kommt.

Tabelle 5.

Werte von $\frac{24\,\varepsilon\,Jy}{q l_1^4}$.

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$m = 1$	0,21	0,23	0,24	0,26	0,27	0,28
$m = 7:6$	0,40	0,46	0,53	0,59	0,65	0,72
$m = 6:5$	0,40	0,46	0,52	0,59	0,65	0,71
$m = 5:4$	0,40	0,46	0,52	0,58	0,65	0,71

Wenn die Senkung der Mittelstützen nach den Angaben dieser Tabelle ausgeführt wird, so nimmt das nach den Gleichungen 54) und 63) berechnete Verhältnis: (M_{max} bei gesenkten Mittelstützen) zu (M_{max} bei gleicher Höhe der Stützen) die in Tabelle 6 zusammengestellten Werte an.

Tabelle 6.

Werte von $\frac{M_{max} \text{ bei gesenkten Mittelstützen}}{M_{max} \text{ bei gleich hohen Stützen}}$.

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$m = 1$	0,91	0,90	0,89	0,88	0,87	0,86
$m = 7:6$	0,87	0,84	0,81	0,79	0,76	0,72
$m = 6:5$	0,87	0,85	0,83	0,80	0,77	0,74
$m = 5:4$	0,88	0,86	0,84	0,81	0,79	0,76

Durch die Senkung der Mittelstützen kann also das größte Biegungsmoment verkleinert werden:

um 9—14 vH., wenn $l_2 = l_1$ ist;
„ 13—28 „ „ $l_2 : l_1 = 7:6$ ist;
„ 13—26 „ „ $l_2 : l_1 = 6:5$ „
„ 12—24 „ „ $l_2 : l_1 = 5:4$ „

Endlich sind in Tabelle 7 die größten Biegungsmomente bei vorteilhaftester Höhenlage der Stützen und bezogen auf $q\frac{L^2}{72}$ als Einheit zusammengestellt worden.

Tabelle 7.

Werte von $M_{max} : \frac{1}{72} q L^2$ bei vorteilhaftester Höhenlage der Stützen.

$r = \frac{p}{q} =$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$m = 1$	0,85	0,81	0,78	0,75	0,72	0,69
m nach Tabelle 2	0,82	0,78	0,74	0,69	0,65	0,61
$m = 7:6$	0,84	0,79	0,75	0,70	0,66	0,61
$m = 6:5$	0,85	0,81	0,77	0,72	0,68	0,63
$m = 5:4$	0,87	0,83	0,79	0,75	0,71	0,67

Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, daß das Verhältnis der Feldweiten auf die Größe des Maximalmomentes einen empfindlichen Einfluß nicht ausübt; denn die Werte in einer Spalte weichen nur um wenige Prozente voneinander ab.

9. Schädliche Folgen einer zufälligen Aenderung der Stützenhöhen. Bei der Berechnung eines kontinuierlichen Balkens wird in der Regel vorausgesetzt, daß die Stützen genau in gleicher Höhe liegen, und daß die Punkte des Balkens, welche von den Stützen berührt werden, im spannungslosen Zustande des Balkens ebenfalls genau in einer Geraden liegen. Abweichungen von der ersten Voraussetzung haben ihren Grund in mancherlei Zufälligkeiten, denen das Bauwerk ununterbrochen ausgesetzt ist, wie Nachgeben des Fundaments, Sackungen des Mauerwerks, Temperaturänderungen usw. Solche Fehler können beobachtet und nötigenfalls beseitigt werden. Dagegen haben Abweichungen von der zweiten Annahme ihren Grund allein in einer mangelhaften Ausführung und können, wenn sie nicht *vor* der Aufstellung des Balkens bemerkt und unschädlich gemacht worden sind, nicht mehr entdeckt und also auch nicht verbessert werden. In ihrem Einfluß auf die Aenderung der Biegungsmomente und Schubkräfte sind beide Ab-

weichungen einander gleich; denn es leuchtet ein, daß z. B. ein Balken auf drei Stützen, dessen Mittelstütze sich um 1 cm gesenkt hat, genau in derselben Lage sich befindet wie unter sonst gleichen Umständen ein anderer, der auf gleich hohen Stützen ruht, dessen Unterkante aber im spannungslosen Zustande des Balkens in der Mitte um 1 cm überhöht ist (Abb. 12). Man bringt also den Einfluß beider Abweichungen gleichzeitig in Rechnung, wenn man die Höhenänderungen auf die Linie bezieht, die von der Unterkante des Balkens in seinem spannungslosen Zustande gebildet wird.

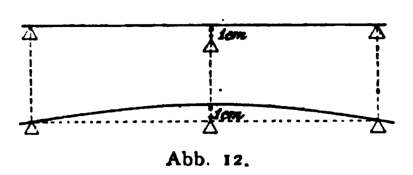


Abb. 12.

Um ein Maß für den Nachteil solcher Abweichungen zu erhalten, wird man zunächst annehmen müssen, daß die Aenderungen innerhalb gewisser Grenzen bleiben. Das gesuchte Maß ergibt sich dann, wenn man das größte Biegungsmoment, welches bei der ungünstigsten Stützenlage innerhalb jener Grenzen sich bilden kann, vergleicht mit dem Maximalmoment bei wagerechter Stützenlage. Diese Rechnung soll beispielsweise für einen kontinuierlichen Balken mit drei gleich langen Feldern ausgeführt werden.

In diesem Falle ist, wenn l die Stützweite der Felder bezeichnet, nach Gleichung 32):

$$16\,M_2 + 4\,M_3 + l^2(p_1 - u_1 + p_2 + u_2) = 0$$
$$4\,M_2 + 16\,M_3 + l^2(p_2 - u_2 + p_3 + u_3) = 0,$$

folglich

$$M_2 = -\frac{l^2}{60}(4\,p_1 + 3\,p_2 - p_3 - 4\,u_1 + 5\,u_2 - u_3) \tag{69}$$

$$M_3 = -\frac{l^2}{60}(-\,p_1 + 3\,p_2 + 4\,p_3 + u_1 - 5\,u_2 + 4\,u_3). \tag{70}$$

Ferner ist nach Gleichung 10):

$$A_1 = \frac{l}{60}(26\,p_1 - 3\,p_2 + p_3 + 4\,u_1 - 5\,u_2 + u_3)$$

$$A_2 = \frac{l}{60}(5\,p_1 + 30\,p_2 - 5\,p_3 - 5\,u_1 + 10\,u_2 - 5\,u_3)$$

und nach Gleichung 15):

$$M'_1 = \frac{l^2}{7200\,p_1}(26\,p_1 - 3\,p_2 + p_3 + 4\,u_1 - 5\,u_2 + u_3)^2 \tag{71}$$

$$M'_2 = \frac{l^2}{7200\,p_2}(5p_1 + 30p_2 - 5p_3 - 5u_1 + 10u_2 - 5u_3)^2 - \frac{l^2}{60}(4p_1 + 3p_2 - p_3 - 4u_1 + 5u_2 - u_3). \quad (72)$$

Wir bezeichnen mit $+u$ und $-u$ die Grenzen, zwischen welchen die Größen u_1, u_2, u_3 sich verändern können. Innerhalb dieser Grenzen erreicht das Stützenmoment M_2 seinen größten negativen Wert, wenn

$$p_1 = p_2 = q, \quad p_3 = p, \quad u_1 = u_3 = -u, \quad u_2 = +u$$

ist:

$$M_{2\,max} = -\frac{l^2}{60}(7q - p + 10u). \quad (73)$$

Das Biegungsmoment M'_1 erhält, wie aus Gleichung 71) zu ersehen ist, seinen größten Wert, wenn

$$p_1 = p_3 = q, \quad p_2 = p, \quad u_1 = u_3 = +u, \quad u_2 = -u$$

ist:

$$M'_{1\,max} = \frac{l^2}{7200\,q}(27q - 3p + 10u)^2. \quad (74)$$

Aus der Gleichung 72) ergeben sich die Bedingungen des Maximums für M'_2 nicht so unmittelbar; berücksichtigt man jedoch, daß das größte Moment in der Mitte des Mittelfeldes nur bei einer symmetrischen Stützenlage und bei einer symmetrischen Belastung entstehen kann, daß also

$$p_1 = p_3, \quad u_1 = -u_3, \quad u_2 = 0$$

sein muß, so erkennt man, daß das Maximum eintritt, wenn

$$p_1 = p_3 = p, \quad p_2 = q, \quad u_1 = +u, \quad u_3 = -u\ .$$

ist:

$$M'_{2\,max} = \frac{l^2}{40}(3q - 2p + 2u). \quad (75)$$

Die vorstehenden Gleichungen zeigen, daß $M_{2\,max}$ unter allen Umständen größer ist als $M'_{2\,max}$, und daß $M_{2\,max}$ auch größer als $M'_{1\,max}$ bleibt, solange

$$u < 6{,}76\,q$$

ist. Diese Grenze kann in Wirklichkeit nicht erreicht werden, weil der Balken vorher brechen würde; denn er müßte nach Gleichung 73) ein Biegungsmoment aufnehmen von der Größe

$$M = -\frac{l^2}{60}(7q - p + 68q).$$

Innerhalb der hier in Betracht kommenden Grenzen hat demnach das Stützenmoment $M_{2\,max}$ den *größten* Wert:

$$M_2 = -\frac{l^2}{60}(7q - p + 10u).$$

Bei *gleicher* Höhe der Stützen hat dieses Stützenmoment nach Gleichung 63) den Wert $-\frac{l^2}{60}(7q - p)$.

Als das oben bezeichnete Maß für den Nachteil von Höhenänderungen, welche den Grenzen $+u$ und $-u$ entsprechen, ergibt sich also das Verhältnis

$$\frac{7q - p + 10u}{7q - p} = 1 + \frac{10u}{7q - p}. \tag{76}$$

In diesem Verhältnis kann das bei der Querschnittsberechnung zugrunde gelegte Biegungsmoment überschritten werden.

Wir wählen als Beispiel einen schmiedeisernen Balken, dessen Höhe h gleich $\frac{1}{10}l$ und dessen Querschnitt so gewählt wurde, daß das größte Biegungsmoment bei gleich hohen Stützen die zulässige Spannung von 800 kg/qcm hervorruft:

$$800 = \frac{l^2}{60}(7q - p)\frac{h}{2J},$$

woraus folgt:

$$7q - p = \frac{960J}{h^3}.$$

Bezeichnet y den größten Höhenunterschied zwischen zwei Stützen, so ist nach Gleichung 31):

$$u = \frac{24\,\varepsilon Jy}{l^4} = \frac{24 \cdot 2\,000\,000\,Jy}{10\,000\,h^4} = \frac{4800\,Jy}{h^4}.$$

Demnach ist in diesem Beispiele:

$$1 + \frac{10u}{7q - p} = 1 + \frac{50y}{h}.$$

Der Balken würde also der Gefahr ausgesetzt sein, anstatt der zulässigen 800 kg/qcm eine doppelt so große Spannung aufnehmen zu müssen, wenn die Höhenunterschiede der Stützen nur $\frac{1}{50}$ der Balkenhöhe erreichen könnten.

Die vorstehende Untersuchung zeigt, daß der Vorteil der kontinuierlichen Balken von Bedingungen abhängt, die praktisch unerfüllbar sind.

10. **Die Berechnung des kontinuierlichen Balkens von veränderlichem Querschnitt.** Große Balken aus Schmiedeisen erhalten in der Regel nicht die prismatische Form, weil es aus wirtschaftlichen Gründen vorteilhaft ist, das Material so zu verteilen, daß die zulässige Grenze der Spannungen in allen Querschnitten des Balkens nahezu erreicht wird. In manchen Teilen des Balkens, nämlich dort, wo die Biegungsmomente und Schubkräfte ihren kleinsten Werten sich nähern, ist jene Anordnung freilich nur unvollkommen zu erreichen, weil man aus anderen praktischen Rücksichten genötigt ist, dem Balken an diesen Stellen erheblich größere Querschnitte zu geben, als die Festigkeitsbedingungen verlangen. Für die bezeichneten Balkenteile ist eine genaue Bestimmung der größten Momente und Kräfte daher unnötig. Es genügt vielmehr, nur die *volle* Belastung der einzelnen Balkenfelder zu berücksichtigen, weil bei diesen Belastungen die größten Momente und Schubkräfte eintreten, welche bei der Wahl der Querschnittsmaße in Betracht kommen. Beim Entwerfen eines solchen Balkens wählt man die Querschnitte zunächst nach Maßgabe der Kräfte, die unter sonst gleichen Umständen von einem prismatischen Balken aufzunehmen sein würden. Für den auf diesem Wege bestimmten Balken veränderlichen Querschnittes werden alsdann die genaueren Werte der größten Biegungsmomente und Schubkräfte nach dem im folgenden beschriebenen Verfahren berechnet. Wenn die Querschnittsänderungen, die sich hierbei als nötig ergeben, beträchtlich sind, so muß die Rechnung von neuem ausgeführt werden. In der Regel aber sind die Aenderungen nicht erheblich, so daß die einmalige Rechnung ausreicht.

Der Gang der Rechnung ist bereits in den Abschnitten 3 und 4 beschrieben worden. Man bildet zunächst, um die Stützenmomente zu bestimmen, für je zwei aufeinanderfolgende Balkenfelder, z. B. für die beiden Felder 2 und 3 die Gleichung 27):

$$\frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3} = \mathrm{III}_2 + \mathrm{III}_3,$$

also nach den Gleichungen 25), 26) und 8) die Größen:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{III}_2 = \frac{1}{l_2}\int_0^{l_2} xk\,dx = \frac{M_2}{\varepsilon l_2^2}\int_0^{l_2}\frac{l_2 x - x^2}{J}\,dx \\ + \frac{M_3}{\varepsilon l_2^2}\int_0^{l_2}\frac{x^2}{J}\,dx + \frac{p_2}{2\varepsilon l_2}\int_0^{l_2}\frac{l_2 x^2 - x^3}{J}\,dx \end{aligned}\right\} \quad (77)$$

und

$$\mathrm{III}_3 = \int_0^{l_3} k\,dx - \frac{1}{l_3}\int_0^{l_3} xk\,dx = \frac{1}{l_3}\int_0^{l_3} k\,(l_3 - x)\,dx,$$

folglich

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{III}_3 = \frac{M_3}{\varepsilon l^2_3}\int_0^{l_3}\frac{(l_3 - x)^2}{J}\,dx + \frac{M_4}{\varepsilon l^2_3}\int_0^{l_3}\frac{l_3 x - x^2}{J}\,dx \\ + \frac{p_3}{2\varepsilon l_3}\int_0^{l_3}\frac{x\,(l_3 - x)^2}{J}\,dx.\end{aligned}\right\} \quad (78)$$

Demnach sind für jedes Balkenfeld die folgenden vier Integrale zu berechnen:

$$\left.\begin{aligned} S = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{l}\frac{dx}{J}, \quad S' = \frac{1}{\varepsilon l}\int_0^{l}\frac{x\,dx}{J}, \\ S'' = \frac{1}{\varepsilon l^2}\int_0^{l}\frac{x^2\,dx}{J}, \quad S''' = \frac{1}{\varepsilon l^3}\int_0^{l}\frac{x^3\,dx}{J}.\end{aligned}\right\} \quad (79)$$

Durch Anfügung der Kennziffer 2 oder 3 an den Buchstaben S wird angegeben, ob sich das Integral auf das Feld 2 oder auf das Feld 3 bezieht. Mit Hilfe dieser Größen ergeben sich aus den Gleichungen 77) und 78) die Werte:

$$\mathrm{III}_2 = M_2\,(S'_2 - S''_2) + M_3 S''_2 + \frac{p_2 l_2^2}{2}\,(S''_2 - S'''_2) \quad (80)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{III}_3 = M_3\,(S_3 - 2S'_3 + S''_3) + M_4\,(S'_3 - S''_3) \\ + \frac{p_3 l_3^2}{2}\,(S'_3 - 2S''_3 + S'''_3).\end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Gleichung 27) enthält also für die beiden Balkenfelder 2 und 3 die Bedingung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3} = M_2\,(S'_2 - S''_2) + M_3\,(S''_2 + S_3 - 2S'_3 + S''_3) \\ + M_4\,(S'_3 - S''_3) + \frac{p_2 l_2^2}{2}\,(S''_2 - S'''_2) + \frac{p_3 l_3^2}{2}\,(S'_3 - 2S''_3 + S'''_3).\end{aligned}\right\} \quad (82)$$

Indem man für je zwei aufeinanderfolgende Balkenfelder eine Bedingung von dieser Form bildet, entstehen die Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Stützenmomente M_2, M_3, M_4 . . . Im übrigen können wir auf die Abschnitte 3 und 4 verweisen.

In dem besonderen Falle, wenn das Trägheitsmoment des Balkenquerschnittes konstant ist, wird nach den Gleichungen 79):

$$S_2 = 2S'_2 = 3S''_2 = 4S'''_2 = \frac{l_2}{\varepsilon J}$$

$$S_3 = 2S'_3 = 3S''_3 = 4S'''_3 = \frac{l_3}{\varepsilon J}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung 82), so entsteht die Gleichung 30):

$$24\varepsilon J\left(\frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3}\right)$$
$$= 4M_2l_2 + 8M_3(l_2 + l_3) + 4M_4l_3 + p_2l_2^3 + p_3l_3^3.$$

11. Die Annäherungswerte der Größen S, S', S'', S''' für ein Balkenfeld. Um die Gleichungen 82) bilden zu können, müssen für jedes Balkenfeld oder, wenn der Balken in bezug auf seine Mitte symmetrisch geformt ist, für die Felder einer Balkenhälfte die vier Größen S, S', S'', S''' annähernd berechnet werden, wozu man die Simpsonsche Regel benutzen kann. Man teilt zu diesem Zweck die Länge l des Balkenfeldes (Abb. 11) durch die Teilpunkte 0, 1, 2, 3 ... 8, 9, 10 in eine *gerade* Anzahl, z. B. in 10 gleiche Teile, bestimmt die Trägheitsmomente J_0, J_1, J_2, J_3 ... J_8, J_9, J_{10} der Balkenquerschnitte in den Teilpunkten und bezeichnet die Größen $\frac{1}{J_0}, \frac{4}{J_1}, \frac{2}{J_2}, \frac{4}{J_3} \cdots \frac{2}{J_8}, \frac{4}{J_9}, \frac{1}{J_{10}}$ mit $i_0, i_1, i_2, i_3 \ldots i_8, i_9, i_{10}$.

Dann ist bekanntlich nach Simpsons Regel annähernd:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon S &= \int_0^l \frac{dx}{J} = \frac{l}{3\cdot 10}(i_0 + i_1 + i_2 + i_3 \ldots + i_8 + i_9 + i_{10}) \\
\varepsilon S' &= \frac{1}{l}\int_0^l \frac{x\,dx}{J} = \frac{l}{3\cdot 10^2}(i_1 + 2i_2 + 3i_3 + \ldots + 8i_8 + 9i_9 + 10i_{10}) \\
\varepsilon S'' &= \frac{1}{l^2}\int_0^l \frac{x^2dx}{J} = \frac{l}{3\cdot 10^3}(i_1 + 2^2i_2 + 3^2i_3 + \ldots + 8^2i_8 + 9^2i_9 + 10^2i_{10}) \\
\varepsilon S''' &= \frac{1}{l^3}\int_0^l \frac{x^3dx}{J} = \frac{l}{3.10^4}(i_1 + 2^3i_2 + 3^3i^3 + \ldots + 8^3i_8 + 9^3i_9 + 10^3i_{10}).
\end{aligned}\right\} \quad (83)$$

In manchen Fällen, insbesondere bei schmiedeisernen Balken, ändern sich die Balkenquerschnitte nicht stetig, sondern in einzelnen

Punkten plötzlich durch Hinzufügung neuer Gurtungsplatten, so daß die graphische Darstellung der Trägheitsmomente J die Treppenform annimmt. Diese Form ist schätzungsweise zu berichtigen, wie in Abb. 13 angedeutet ist, indem man berücksichtigt, daß das Ende der neuen Gurtungsplatte spannungslos ist, und daß die Spannungen durch die Nietverbindungen allmählich auf die Platte übertragen werden.

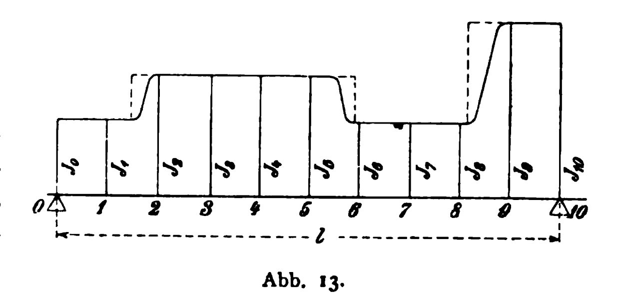


Abb. 13.

12. Einfluß der Veränderlichkeit des Balkenquerschnittes. Im Abschnitt 10 wurde angedeutet, daß die Biegungsmomente und Schubkräfte, welche von einem kontinuierlichen Balken

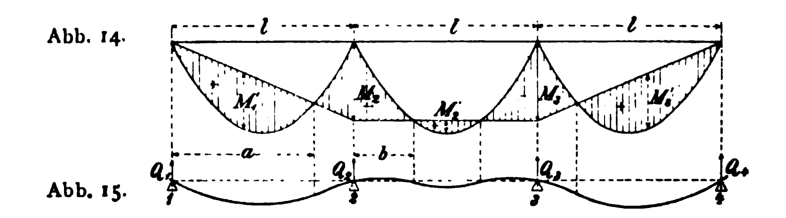


Abb. 14.

Abb. 15.

konstanten Querschnittes aufzunehmen sind, sich nicht erheblich ändern, wenn man die Balkenquerschnitte so anordnet, daß $\frac{M}{\varepsilon J}$ und bei konstanter Balkenhöhe auch die Spannungen der äußersten Balkenfasern annähernd eine unveränderliche Größe erhalten. Um diese Behauptung an einem einfachen Beispiel zu prüfen, berechnen wir für einen gleichmäßig belasteten Balken mit drei gleichen Feldern die in Betracht kommenden Größen einmal für konstanten Querschnitt und das zweitemal unter der Voraussetzung, daß

$$k = \frac{M}{\varepsilon J}$$

von genau konstanter Größe sei. Im *ersten* Falle ergeben die Gleichungen 73), 74), 75), wenn q die konstante Belastung der

Längeneinheit bezeichnet, und wenn die Stützen in gleicher Höhe liegen:

$$\left.\begin{aligned} M_2 &= -0{,}100\, ql^2 \\ M'_1 &= 0{,}080\, ql^2 \\ M'_2 &= 0{,}025\, ql^2 \\ Q_1 &= 0{,}400\, ql = Q_4 \\ Q_2 &= 1{,}100\, ql = Q_3. \end{aligned}\right\} \qquad (84)$$

Im *zweiten* Falle, wenn k konstant ist, bezeichnen wir mit a und b (Abb. 14 und 15) die Abszissen der beiden Balkenquerschnitte neben der zweiten Stütze, für die das Biegungsmoment gleich null wird. Zwischen diesen beiden Abszissen ergibt sich die Beziehung

$$a = l - b + \frac{b^2}{l}, \qquad (85)$$

wenn man Gleichung 8) für die Balkenfelder 1 und 2 bildet, in die erste Gleichung

$$x = a, \quad M = 0$$

und in die zweite Gleichung

$$x = b, \quad M = 0$$

einsetzt, wobei zu beachten ist, daß der Symmetrie wegen M_2 und M_3 gleich groß sind. Eine zweite Beziehung folgt aus Gleichung 27):

$$0 = \mathrm{II}_1 + \mathrm{II}_2.$$

Da k konstant ist, so ist

$$\mathrm{II}_1 = \frac{k}{2l}\left(a^2 - (l-a)(l+a)\right) = \frac{k}{2l}(2a^2 - l^2)$$

und

$$\mathrm{II}_2 = k\left(\frac{l}{2} - b - b\right) = \frac{k}{2}(l - 4b).$$

Folglich ist

$$a^2 = 2bl. \qquad (86)$$

Die beiden Bedingungen 85) und 86) führen zu der Gleichung:

$$\frac{b^4}{l^4} - \frac{2b^3}{l^3} + \frac{3b^2}{l^2} - \frac{4b}{l} + 1 = 0, \qquad (87)$$

die zwischen 0 und + 1 nur die *eine* Wurzel

$$\frac{b}{l} = +0{,}309$$

hat. Demnach ist

$$a = 0{,}7865\, l$$

$$\left.\begin{aligned}
M_2 &= \frac{q\,(b^2 - lb)}{2} = -\ 0{,}1067\ q l^2 \\
Q_1 &= \frac{q a}{2} = 0{,}3933\ q l \\
M'_1 &= \frac{Q_1^{\,2}}{2 q_1} = 0{,}0773\ q l^2 \\
M'_2 &= \frac{1}{8}\ q l^2 + M_2 = 0{,}0183\ q l^2 \\
Q_2 &= 1{,}50\ q l - Q_1 = 1{,}1067\ q l.
\end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

Vergleicht man diese Werte mit denen in den Gleichungen 84), so zeigt sich, daß der Unterschied sehr gering ist. Es ist jedoch keineswegs zulässig, dieses Ergebnis zu verallgemeinern und etwa anzunehmen, daß der Einfluß der Veränderlichkeit des Balkenquerschnittes stets geringfügig sei. In solchen Fällen, die *nicht* zwischen den beiden Grenzen liegen, in denen die Größen J oder $\frac{M}{J}$ konstant sind, kann der bezeichnete Einfluß sehr beträchtlich werden.

13. Literarische Notizen. Die vorstehende Abhandlung enthält in erheblich gekürzter Form den Inhalt der *Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen* in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1860, S. 323 und 407, und 1862, S. 245.

Die Beziehung zwischen den drei Stützenmomenten für den Fall, in dem die Stützen in gleicher Höhe liegen (Gleichung 33) wurde zuerst von *Bertot* veröffentlicht; Comptes rendus de la Société des Ingénieurs civils 1855, p. 278.

Die Gleichung 30), welche die Höhenlage der Stützen berücksichtigt, kommt zuerst in meiner Abhandlung vom Jahre 1860 (S. 328) vor.

Beide Gleichungen werden in Deutschland irrtümlicherweise die *Clapeyronschen Gleichungen* genannt. Die von Clapeyron in den Comptes rendus vom Dezember 1857 mitgeteilte Gleichung stimmt mit der von Bertot überein.

Der Einfluß der Höhenlage der Stützen wurde zuerst untersucht von:

Köpcke, Ueber die Dimensionen von Balkenlagen: Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1856.

Scheffler, Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, Braunschweig 1857.

Grashof, Ueber die relative Festigkeit mit Rücksicht auf deren möglichste Vergrößerung durch angemessene Unterstützung; Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1857—1859.

Ferner sind zu nennen:

Winkler, Beiträge zur Theorie der kontinuierlichen Brückenträger; Zivilingenieur 1862.

Bresse, Cours de Mécanique appliquée, Troisième Partie; Paris 1865.

Weyrauch, Allgemeine Theorie der kontinuierlichen und einfachen Träger; Leipzig 1873.

Handbuch der Ingenieurwissenschaften, Bd. II, Der Brückenbau, 3. Auflage, 1901, S. 364.

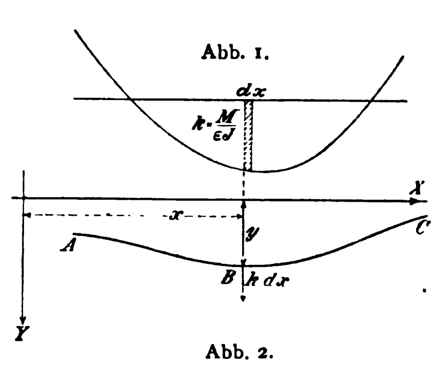
Abhandlung IX.

Die elastische Linie.

1. Darstellung der elastischen Linie eines geraden Balkens als Seilkurve. Im Abschnitt 2 der Abhandlung VIII wurde die Differentialgleichung der elastischen Linie eines geraden Balkens:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{\varepsilon J} \tag{1}$$

abgeleitet. In dieser Gleichung bezeichnen x, y die Koordinaten eines Punktes B der elastischen Linie ABC (Abb. 1 und 2), bezogen auf eine nach rechts zeigende wagerechte x-Achse und eine nach unten zeigende lotrechte y-Achse; ferner bezeichnet M das Biegungsmoment und J das Trägheitsmoment des Balkenquerschnittes B, endlich ε den Elastizitätsmodul des Balkenmaterials. Das Biegungsmoment M ist positiv, wenn die konkave Seite des gebogenen Balkens nach oben gekehrt ist.



Eine Differentialgleichung von derselben Form:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{k}{H} \tag{2}$$

hat nach (II, 11) die Seilkurve, deren lotrechte Belastung auf der unendlich kleinen Strecke dx die veränderliche Größe $k\,dx$ hat, und deren Horizontalkraft mit H bezeichnet wird. Die Koordinatenachsen sind dieselben wie für Gleichung 1), und die Lasten $k\,dx$ sind positiv, wenn sie nach unten zeigen.

Aus der Uebereinstimmung der beiden Differentialgleichungen geht hervor, ***daß die elastische Linie als eine Seilkurve angesehen werden kann,*** wenn entweder

$$\frac{M}{\varepsilon J} = k \quad \text{und} \quad H = 1 \tag{3}$$

oder

$$\frac{M}{J} = k \quad \text{und} \quad H = \varepsilon \tag{4}$$

oder

$$M = k \quad \text{und} \quad H = \varepsilon J \tag{5}$$

gesetzt wird.

Die Ordinaten y der elastischen Linie sind in den meisten Fällen der Anwendung so klein, daß sie nicht darstellbar wären, wenn man sie in demselben Maßstabe auftragen müßte wie die Abszissen x. Man kann aber nach (II, 7) die Ordinaten einer Seilkurve in einem beliebigen Verhältnis *vergrößern*, indem man die Horizontalkraft H in dem gleichen Verhältnis *verkleinert*. Trägt man also z. B. die Belastungen k gleich $\frac{M}{\varepsilon J}$ und die Horizontalkraft H anstatt eins gleich $\frac{1}{1000}$ auf, so ergibt die Seilkurve die Ordinaten y der elastischen Linie in *tausendfacher Vergrößerung*. In manchen Fällen ist es zweckmäßig, die Ordinaten y *in natürlicher Größe* darzustellen. Ist der Maßstab der Abszissen $1:n$, so hat man zu diesem Zweck die Horizontalkraft H anstatt gleich eins

$$H = \frac{1}{n}$$

aufzutragen. Diese Eigenschaft der Seilkurve ermöglicht die Anwendung des graphischen Verfahrens auf die Darstellung der elastischen Formänderungen eines geraden Balkens. Aber auch für die *Berechnung* dieser Formänderungen bietet die oben beschriebene Beziehung wesentliche Vorteile, wie im nächsten Abschnitt an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

2. Beziehungen zwischen der elastischen Linie und den Biegungsmomenten und Stützkräften eines Balkens.

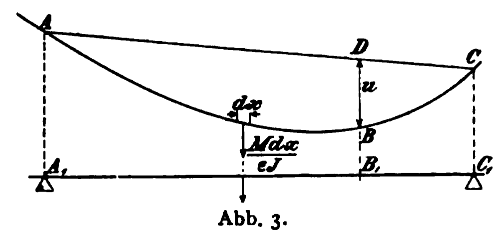


Abb. 3.

1) In Abb. 3 bezeichnen A, B, C drei beliebige Punkte einer elastischen Linie und u die lotrechte Ordinate BD des Punktes B in bezug auf die Sehne AC. Ferner ist $A_1 C_1$ ein wage-

rechter Balken, der lotrecht unter A und C in den Punkten A_1 und C_1 frei unterstützt ist. Wir lassen die Belastungen $\frac{M\,dx}{\varepsilon J}$ der elastischen Linie auf den Balken einwirken und bestimmen das hierdurch erzeugte Biegungsmoment m im Balkenquerschnitt B_1. Zu diesem Zweck ist nach (II, 8) die Seilkurve der Lasten $\frac{M\,dx}{\varepsilon J}$, also die elastische Linie ABC zu bilden, und die Ordinate u im Lote des Balkenquerschnittes B_1 zu messen. Es ist dann

$$m = Hu$$

oder, weil

$$H = 1$$

ist:

$$m = u. \tag{6}$$

Demnach ist u das Biegungsmoment, das im Balkenquerschnitt B_1 von den Lasten $\frac{M\,dx}{\varepsilon J}$ des Balkens $A_1 C_1$ erzeugt wird.

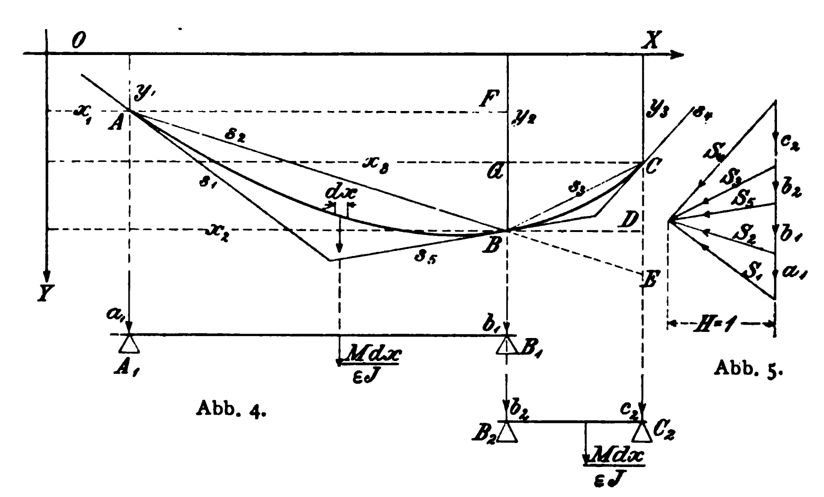


Abb. 4.

Abb. 5.

2) In Abb. 4 sind A, B, C drei beliebige Punkte einer elastischen Linie, die in bezug auf eine wagerechte nach rechts zeigende x-Achse und eine lotrechte nach unten zeigende y-Achse die Koordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) haben. Ferner sind $A_1 B_1$ und $B_2 C_2$ zwei wagerechte, an ihren Enden *frei unterstützte* Balken, deren Stützen in den Loten der Punkte A, B, C liegen. Wir lassen auf diese Balken die Belastungen $\frac{M\,dx}{\varepsilon J}$ der elastischen Linie einwirken und bestimmen die beiden Stützkräfte b_1 und b_2,

die von den beiden Balken auf die Stützen B_1 und B_2 übertragen werden. Zu dem Zweck ist nach (II, 4) und (II, 10) die Seilkurve ABC zu bilden. Die Tangenten der Punkte A, B, C sind mit s_1, s_5, s_4, die Schlußlinien AB, BC mit s_2, s_3 bezeichnet. Der Kräfteplan (Abb. 5) bestimmt die Kräfte a_1, b_1, b_2, c_2, die von den Balken auf die Stützen übertragen werden. Aus der Aehnlichkeit des Dreiecks $S_3 b_2 b_1 S_4$ im Kräfteplan mit dem Dreieck BCE im Lageplan und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke BDE, AFB folgt:

$$\frac{b_1 + b_2}{H} = \frac{DE}{BD} + \frac{CD}{BD} = \frac{FB}{AF} + \frac{CD}{BD}$$

oder, weil H gleich eins ist:

$$b_1 + b_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_2 - y_3}{x_3 - x_2}. \qquad (7)$$

Die *Koordinaten der drei Punkte A, B, C bestimmen also die Summe der beiden Stützkräfte* b_1, b_2 (vergl. VIII, 4). Bei Anwendung der vorstehenden Beziehungen ist zu beachten, daß die Balkenlasten $\frac{M\,dx}{\varepsilon J}$ *unbenannte* Zahlen sind. Daher sind auch die Stützkräfte b_1, b_2 unbenannte Zahlen, und das Biegungsmoment m ist wie die Ordinate u eine *Strecke*.

Beispiel 1. Ein Balken AC (Abb. 7) von prismatischer Form und der Stützweite l ist gleichmäßig mit pl belastet; es ist die elastische Einsenkung

$$BD = y_2$$

in der Balkenmitte zu berechnen. Die Belastungsfläche (Abb. 6) $A_1 E_1 C_1$ der elastischen Linie ist ein Parabelsegment von der Scheitelhöhe

$$B_1 E_1 = \frac{pl^2}{8\,\varepsilon J}.$$

Abb. 6.

Abb. 7.

Jeder der beiden Balken $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ trägt also eine Belastungsfläche

$$A_1 B_1 E_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{pl^2}{8\,\varepsilon J} = \frac{pl^3}{24\,\varepsilon J},$$

deren Schwerpunkte von den Stützen A_1, C_1 um die Strecken

$$A_1 F_1 = C_1 G_1 = \frac{5}{16}\, l$$

abstehen. Daher haben die Stützkräfte b_1, b_2 die Größen

$$b_1 = b_2 = \frac{5}{8} \frac{pl^3}{24 \varepsilon J} = \frac{5 p l^3}{192 \varepsilon J},$$

und da die Ordinaten der Punkte A, C:

$$y_1 = y_3 = 0$$

sind, so ist nach Gleichung 7):

$$\frac{2 y_2}{l} + \frac{2 y_2}{l} = b_1 + b_2,$$

also

$$y_2 = \frac{5 p l^4}{384 \varepsilon J}.$$

Beispiel 2. Ein prismatischer Balken AB (Abb. 8) von der Stützweite l trägt in dem Punkte C von der Abszisse

$$AC = c > \frac{l}{2}$$

die Last P; es sind die Koordinaten

$A_1 E_1 = x_1$, $E_1 F_1 = y_1$

des tiefsten Punktes F_1 seiner elastischen Linie $A_1 F_1 B_1$ (Abb. 9) zu bestimmen. Wir betrachten die Ordinaten y als Darstellung der Biegungsmomente des Balkens, die von der Belastungsfläche ADB hervorgerufen werden. Dieses Dreieck hat die Höhe

Abb. 8.

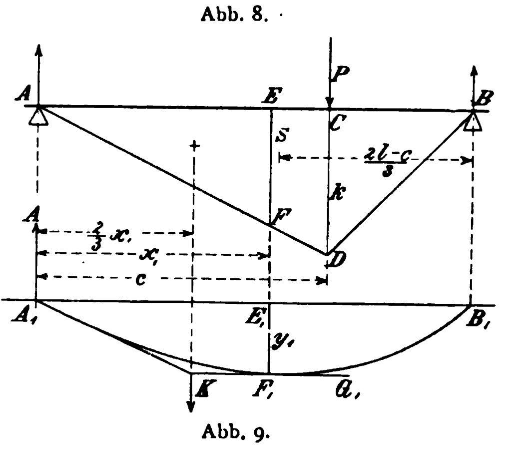


Abb. 9.

$$CD = k = \frac{Pc\,(l - c)}{l \varepsilon J},$$

und da sein Schwerpunkt S von der Stütze B den wagerechten Abstand $\frac{2l - c}{3}$ hat, so ist die von ihm in A erzeugte Stützkraft:

$$A = \frac{2l - c}{3l} \cdot \frac{kl}{2} = \frac{k(2l - c)}{6}.$$

Die Tangente $F_1 G_1$ der elastischen Linie im tiefsten Punkte F_1 ist zur Schlußlinie $A_1 B_1$ parallel; daher ist die von dem Dreieck AEF

dargestellte Belastung K der Strecke AE gleich der Stützkraft A. Da die Strecke

$$EF = \frac{x_1}{c} k$$

ist, so folgt:

$$A = \frac{k(2l-c)}{6} = K = \frac{x_1}{2} \frac{x_1 k}{c}$$

und hieraus

$$x_1 = \sqrt{\frac{c(2l-c)}{3}}.$$

Das von den beiden Kräften A und K erzeugte Biegungsmoment y_1 hat die Größe

$$y_1 = A x_1 - K \frac{x_1}{3} = \frac{2}{3} K x_1 = \frac{k x_1^3}{3c}$$

oder, wenn die Werte von k und x_1 eingesetzt werden:

$$y_1 = \frac{P(l-c)}{9 l \varepsilon J} \sqrt{\frac{c^3 (2l-c)^3}{3}}.$$

Ist der Balken in seiner *Mitte* belastet, also

$$c = \frac{l}{2},$$

so wird bekanntlich

$$x_1 = \frac{l}{2} \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{Pl^3}{48 \varepsilon J}.$$

3. Graphische Bestimmung der elastischen Linie eines geraden Balkens. *Beispiel 1.* Für den Balken sind gegeben: die im Maßstabe 1 : 200 dargestellte Stützweite

$$AC = 1200 \text{ cm},$$

ferner die graphische Darstellung der Trägheitsmomente J des Balkenquerschnittes (Abb. 10) im Maßstabe

$$1 \text{ cm} = 60\,000 \text{ cm}^4$$

und die graphische Darstellung der Biegungsmomente M (Abb. 11) im Maßstabe

$$1 \text{ cm} = 1\,000\,000 \text{ cm kg},$$

endlich der Elastizitätsmodul

$$\varepsilon = 2\,000\,000 \text{ kg cm}^{-2}.$$

Hieraus ergab sich die Belastungsfläche der elastischen Linie (Abb. 12), d. h. die graphische Darstellung von

$$k = \frac{M}{\varepsilon J}$$

im Maßstabe

$$200\,000 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^{-1}.$$

Die Belastungsfläche wurde in vier Flächenteile 1, 2, 3, 4 zerlegt, deren Größen durch unbenannte Zahlen ausgedrückt werden und im Kräfteplan (Abbildung 13) in dem Maßstabe

$$500 \text{ cm} = 1$$

dargestellt worden sind. Die Horizontalkraft des Seilpolygons wurde

$$H = \frac{1}{400} = 1{,}25 \text{ cm}$$

gewählt. Da der Maßstab der Abszissen

$$1 \text{ cm} = 200 \text{ cm}$$

Abb. 10.

Abb. 11.

Abb. 12.

Abb. 13.

Abb. 14.

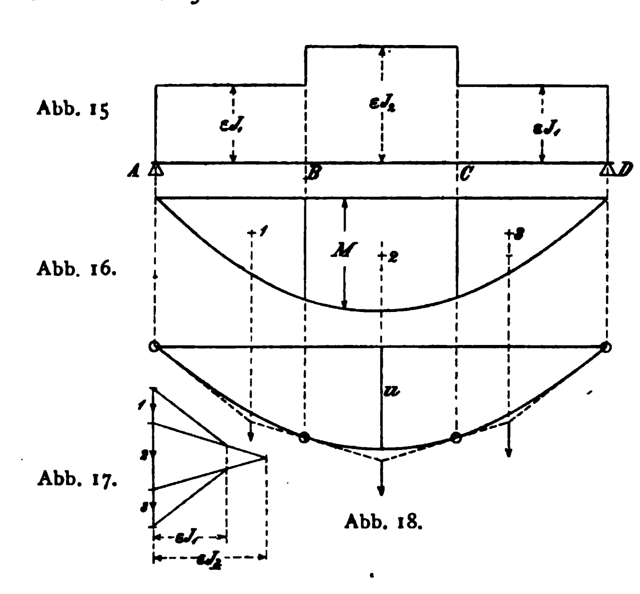
ist, so werden die Ordinaten der elastischen Linie im Maßstabe

$$1 \text{ cm} = 200 \text{ cm} \cdot \frac{1}{400} = \frac{1}{2} \text{ cm}$$

dargestellt. Die elastische Linie berührt nach (II, 10) das Seilpolygon der Lasten 1, 2, 3, 4 in den Ordinaten, welche diese Flächenteile voneinander trennen. Die zur Schlußlinie $A_1 C_1$ parallel gerichtete Tangente $B_1 E_1$ bestimmt den Punkt B_1 der tiefsten Einsenkung u der elastischen Linie.

Beispiel 2. Der gleichmäßig belastete Balken AD (Abb. 15) besteht aus drei prismatischen Teilen, deren Querschnitte die Träg-

heitsmomente J_1, J_2, J_1 haben. Es wurden dargestellt: die Größen εJ durch Abb. 15 im Maßstabe 1 cm $= 16 \cdot 10^{10}$ cm² kg, die Größen M in Abb. 16 im Maßstabe 1 cm $= 12 \cdot 10^5$ cm kg. Diese Belastungsfläche wurde der Deutlichkeit wegen nur in drei Teile zerlegt, deren Größen 1, 2, 3 im Kräfteplan Abb. 17 im Maßstabe 1 cm $= 8 \cdot 10^8$ cm²kg aufgetragen wurden. Für die Horizontalkräfte εJ diente der 200-fach kleinere Maßstab 1 cm $= 16 \cdot 10^{10}$ cm² kg. Da der Maßstab der Abszissen 1 : 200 ist, so erhielten die Ordinaten u der elastischen Linie in Abb. 18 *ihre natürliche Größe.*



4. Gegenseitige Beziehung zwischen den Senkungen zweier Punkte eines an seinen Enden frei unterstützten Balkens. In Abb. 19 bezeichnet AD einen in den Punkten A und D frei unterstützten Balken von veränderlichem oder konstantem Querschnitt. B und C sind zwei beliebige Punkte der Balkenachse. Wird der Balken im Punkte B mit einer gegebenen Last P belastet, so entsteht die elastische Linie AC_1D und im Punkte C eine elastische Einsenkung

$$CC_1 = y_c.$$

Wird dagegen dieselbe Last P im Punkte C angebracht, so entsteht die elastische Linie AB_1D und im Punkte B eine elastische Einsenkung

$$BB_1 = y_b.$$

Die zu beweisende Beziehung besteht darin, daß

$$y_c = y_b$$

ist, daß also *die Senkung des Punktes C infolge einer Belastung P*

des Punktes B eben so groß ist wie die Senkung des Punktes B infolge der Belastung P des Punktes C.

Um diese Behauptung zu beweisen, bestimmen wir zuerst die Senkung y_b und betrachten, wie im Abschnitt 2 beschrieben wurde, y_b als das Biegungsmoment des Balkenquerschnittes B, das von den Lasten

$$k\,dx = \frac{M\,dx}{\varepsilon J}$$

der elastischen Linie AB_1D erzeugt wird. Wir bezeichnen die

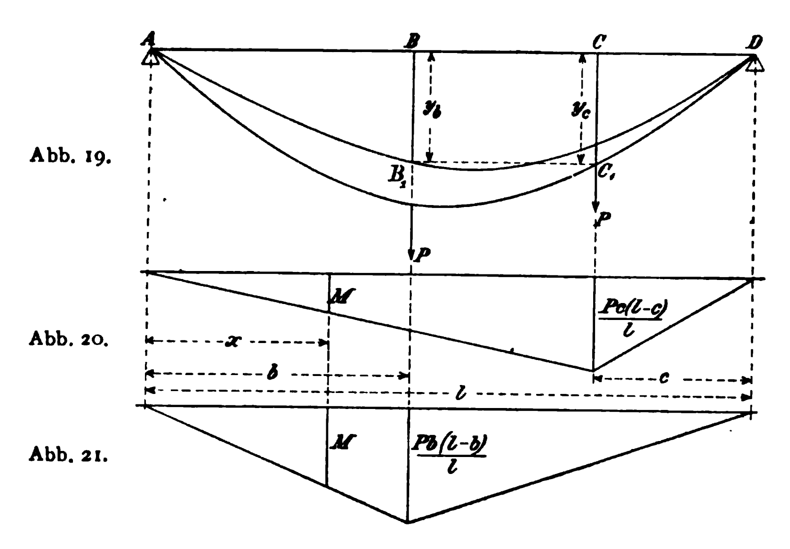


Abb. 19.

Abb. 20.

Abb. 21.

Strecken AB, CD, AD (Abb. 19) mit b, c und l und die Abszisse irgend einer Last $k\,dx$ mit x. Die Darstellung von M wird durch Abb. 20 gegeben. M hat die Größe

$$M = \frac{Pcx}{l} \quad \text{oder} \quad M = \frac{P(l-c)(l-x)}{l}$$

je nachdem $\quad x < l - c \quad$ oder $\quad x > l - c$

ist. *Eine* der unendlich kleinen Lasten $k\,dx$ von der Abszisse x erzeugt in dem Balkenquerschnitt B das unendlich kleine Biegungsmoment

$$dy_b = k\,dx\,\frac{x}{l}\,(l-b) \quad \text{oder} \quad dy_b = k\,dx\,\frac{l-x}{l}\,b,$$

je nachdem $\quad x < b \quad$ oder $\quad x > b \quad$ ist.

Für jeden Punkt der Strecke AB ist $x < l - c$ und $x < b$
" " " " " BC " $x < l - c$ " $x > b$
" " " " " CD " $x > l - c$ " $x > b$.

Demnach erzeugt jede Last $k\,dx$ der Strecke

$$AB \text{ das Biegungsmoment } dy_b = \frac{Pcx}{l\varepsilon J}\,dx\,\frac{x}{l}\,(l-b)$$

$$BC \quad ,, \quad ,, \quad dy_b = \frac{Pcx}{l\varepsilon J}\,dx\,\frac{l-x}{l}\,b$$

$$CD \quad ,, \quad ,, \quad dy_b = \frac{P(l-c)(l-x)}{l\varepsilon J}\,dx\,\frac{l-x}{l}\,b.$$

Die Integration ergibt also:

$$y_b = \frac{P}{\varepsilon l^2}\left\{(l-b)\,c\int_0^b \frac{x^2\,dx}{J} + b\,c\int_b^{(l-c)} \frac{x\,(l-x)\,dx}{J}\right.$$
$$\left. + \, b\,(l-c)\int_{(l-c)}^{l} \frac{(l-x)^2\,dx}{J}\right\} \tag{8}$$

Im *zweiten* Falle, wenn der Punkt B die Last P trägt und die Größen M durch Abb. 21 dargestellt werden, ist

$$M = \frac{P(l-b)\,x}{l} \quad \text{oder} \quad M = \frac{Pb\,(l-x)}{l},$$

je nachdem $\quad x < b \quad$ oder $\quad x > b$

ist. Eine Last $k\,dx$ von der Abszisse x erzeugt im Balkenquerschnitt C ein Biegungsmoment

$$dy_c = k\,dx\,\frac{x}{l}\,c \quad \text{oder} \quad dy_c = k\,dx\,\frac{l-x}{l}\,(l-c),$$

je nachdem $\quad x < l-c \quad$ oder $\quad x > l-c$

ist. Demnach erzeugt jede Last $k\,dx$ der Strecke

$$AB \text{ das Biegungsmoment } dy_c = \frac{P(l-b)\,x}{l\varepsilon J}\,dx\,\frac{x}{l}\,c$$

$$BC \quad ,, \quad ,, \quad dy_c = \frac{Pb\,(l-x)}{l\varepsilon J}\,dx\,\frac{x}{l}\,c$$

$$CD \quad ,, \quad ,, \quad dy_c = \frac{Pb\,(l-x)}{l\varepsilon J}\,dx\,\frac{l-x}{l}\,(l-c),$$

woraus durch Integration folgt:

$$y_c = \frac{P}{\varepsilon l^2}\left\{(l-b)\,c\int_0^b \frac{x^2\,dx}{J} + b\,c\int_b^{(l-c)} \frac{x\,(l-x)\,dx}{J}\right.$$
$$\left. + \, b\,(l-c)\int_{(l-c)}^{l} \frac{(l-x)^2\,dx}{J}\right\} \tag{9}$$

Die Gleichungen 8) und 9) zeigen, daß

$$y_b = y_c$$

ist, wie oben behauptet wurde.

5. **Bestimmung der elastischen Senkungen eines Balkenpunktes bei verschiedenen Belastungen des Balkens.** Es kommt nicht selten die Aufgabe vor, die Senkungen eines bestimmten Balkenpunktes C (Abb. 22) für eine Reihe von gegebenen, einfachen oder zusammengesetzten Belastungen des Balkens zu bestimmen. In einem solchen Falle kann das im Abschnitt 3 beschriebene Verfahren durch ein einfacheres ersetzt werden, das

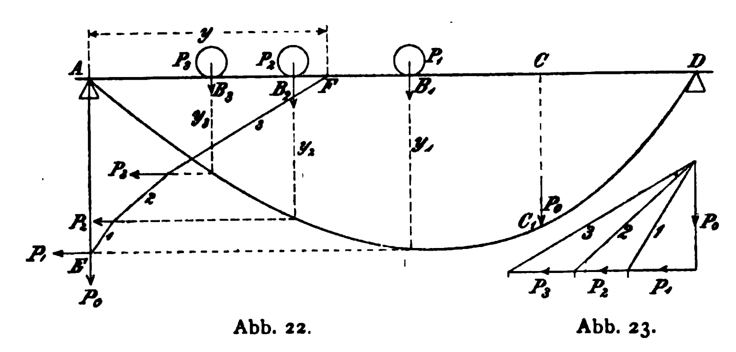


Abb. 22. Abb. 23.

an einem Beispiel erklärt werden möge. Es soll die Senkung y des Balkenpunktes C bestimmt werden, die bei der gegebenen Belastung P_1, P_2, P_3 eintritt.

Die Kurve $A\,C_1\,D$ zeigt die elastische Linie des Balkens in dem Falle, wenn er nur eine einzige, im Punkte C angebrachte Last P_0 trägt. Die Balkenpunkte B_1, B_2, B_3 erleiden in diesem Belastungsfalle die Senkungen y_1, y_2, y_3. Würde im Punkte B_1 als einzige Last des Balkens P_0 angebracht, so würde sich nach der im vorigen Abschnitt bewiesenen Beziehung der Balkenpunkt C um y_1 senken. Da die Senkung der Last proportional ist, so erzeugt die Last P_1 des Punktes B_1 eine Senkung des Balkenpunktes C von der Größe $\frac{P_1}{P_0}\,y_1$. Ebenso ergeben sich die Senkungen $\frac{P_2}{P_0}\,y_2$ und $\frac{P_3}{P_0}\,y_3$ des Punktes C, die von den Lasten P_2 und P_3 erzeugt werden. Die ganze Senkung des Punktes C bei der Belastung P_1, P_2, P_3 hat also die Größe

$$y = \frac{1}{P_0}\,(P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3).$$

Die Länge y kann vermittels eines Seilpolygons bestimmt werden.

Bringt man in den Endpunkten der Ordinaten y_1, y_2, y_3 die Horizontalkräfte P_1, P_2, P_3 an und bildet mit der Normalkraft P_0 (Abb. 23) das Seilpolygon EF in Abb. 22, so ist nach (II, 7):

$$y = AF.$$

Um sonach für *jede* gegebene zusammengesetzte Belastung des Balkens die Senkung y des Punktes C vermittels einer Gleichung von der Form

$$y = \frac{\Sigma Py}{P_0} \tag{10}$$

bestimmen zu können, braucht nur die *eine* elastische Linie AC_1D gebildet zu werden. Es ist zu beachten, daß das Verfahren in gleicher Weise anwendbar ist für Balken veränderlichen Querschnittes wie für prismatische Balken.

Die Ordinaten y_1, y_2, y_3 bestimmen den *Einfluß*, den die Lasten P_1, P_2, P_3 auf die Größe der Senkung y des Punktes C ausüben. Mit Rücksicht auf diesen Zweck nennt man die Kurve AC_1D eine *Einflußlinie,* welche die Entstehung der Größe y veranschaulicht und ihre Bestimmung ermöglicht.

6. Die Stützkräfte eines kontinuierlichen Balkens. Bei der Berechnung eines kontinuierlichen Balkens werden entweder die Stützkräfte der Mittelstützen oder die Biegungsmomente der Balkenquerschnitte über den Mittelstützen, die sogenannten Stützenmomente, als statisch unbestimmbare Größen in die Rechnung eingeführt. Bei einem Balken *veränderlichen* Querschnittes gestaltet sich die Rechnung am einfachsten, wenn die *Stützkräfte* als Unbekannte gewählt werden, während es vorzuziehen ist, die *Stützenmomente* zunächst zu bestimmen, wenn der Balken prismatisch, sein Querschnitt also *konstant* ist.

In Abb. 24 ist ein kontinuierlicher Balken veränderlichen Querschnittes dargestellt; derselbe ist in den Punkten A, B_1, C_1, D gestützt und trägt in den Punkten E, F, G, H die Lasten P_1, P_2, P_3, P_4. Die Trägheitsmomente J der Balkenquerschnitte sind gegeben. Die Endstützen A und D liegen in einer Horizontalen. Die Höhenlage der Mittelstützen B_1, C_1 ist durch die Ordinaten

$$BB_1 = y_I, \quad CC_1 = y_{II}$$

gegeben. Diese Ordinaten sind in demselben Maßstabe wie die Ordinaten der elastischen Linien aufzutragen.

Um die unbekannten Stützkräfte X_I, X_{II} der Mittelstützen B_1, C_1 zu bestimmen, beseitigen wir diese Stützen, nicht aber die Stütz-

kräfte und bilden hierdurch einen Balken, der an seinen Enden A, D gestützt ist und außer den gegebenen positiven Lasten P_1, P_2, P_3, P_4 die unbekannten negativen Lasten X_I, X_{II} trägt. Wenn durch zwei Gleichungen von der Form der Gleichung 10) ausgedrückt wird, daß bei dieser Belastung die Balkenpunkte B und C die gegebenen Senkungen y_I und y_{II} annehmen müssen, so ergeben sich zwei Bedingungen, aus denen die Unbekannten X_I, X_{II} zu berechnen sind. Das Verfahren ändert sich nicht, wenn die Anzahl der Mittelstützen größer oder kleiner als zwei ist.

Zu dem angegebenen Zweck wurden die beiden elastischen Linien AB_2C_2D und AB_3C_3D des Balkens gebildet, die entstehen,

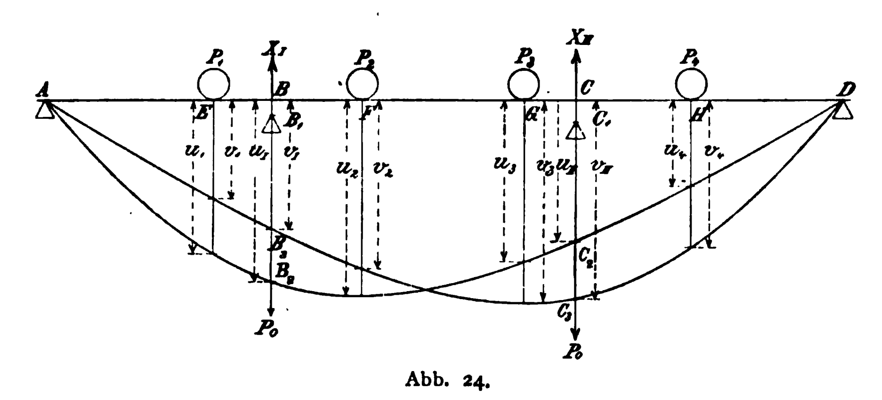


Abb. 24.

wenn eine Last von willkürlich gewählter Größe P_0 im ersten Falle im Punkte B, im zweiten Falle im Punkte C angebracht wird, und wenn alle übrigen Lasten beseitigt werden. Die Ordinaten der beiden Kurven in den belasteten Punkten E, B, F, G, C, H werden in dieser Reihenfolge mit u_1, u_I, u_2, u_3, u_{II}, u_4 und v_1, v_I, v_2, v_3, v_{II}, v_4 bezeichnet. Daß der Balkenpunkt B in dem gegebenen Zustande die elastische Senkung

$$BB_1 = y_I$$

annehmen soll, wird nach Gleichung 10) durch die Bedingung:

$$P_0 y_I = P_1 u_1 - X_I u_I + P_2 u_2 + P_3 u_3 - X_{II} u_{II} + P_4 u_4$$

ausgedrückt. Ebenso fordert die Gleichung:

$$P_0 y_{II} = P_1 v_1 - X_I v_I + P_2 v_2 + P_3 v_3 - X_{II} v_{II} + P_4 v_4,$$

daß die Ordinate der elastischen Linie im Punkte C_1 die gegebene Größe

$$CC_1 = y_{II}$$

annehmen muß. Die beiden Bedingungen bestimmen die Größen

der Stützkräfte X_I und X_{II}. Diese Kräfte zeigen nach oben, wenn ihre Werte positiv sind. Die Rechnung wird in der Regel noch dadurch vereinfacht, daß die Ordinaten y_I, y_{II} die Werte null haben. Nachdem die Stützkräfte X_I, X_{II} der Mittelstützen in der angegebenen Weise berechnet worden sind, können die Stützkräfte der Endstützen A und D vermittels eines Seilpolygons bestimmt werden (II, 4), welches zugleich die Biegungsmomente der Balkenquerschnitte ergibt (II, 8).

7. Einflußlinien. Die vorstehende Untersuchung zeigt, daß die Stützkräfte X und folglich auch die Biegungsmomente M und die Schubkräfte T der Balkenquerschnitte (VII, 8) Funktionen *ersten* Grades der Lasten P und der Stützordinaten y sind. Jede dieser Größen, z. B. das Biegungsmoment M des Balkenquerschnittes von der gegebenen Abszisse x, kann also dargestellt werden durch eine Gleichung von der Form

$$M = e_1 P_1 + e_2 P_2 + \dots + E_1 y_I + E_2 y_{II} + \dots, \quad (11)$$

in welcher e_1, e_2 ... und E_1, E_2 ... Größen bezeichnen, die von den Lasten P und von den Stützordinaten y *unabhängig* sind. Jede dieser unbekannten Größen e und E kann *unabhängig* von den anderen bestimmt werden. Um z. B. die Größe e_1 zu ermitteln, bestimmt man das Biegungsmoment M_1 des Balkenquerschnittes, welches entsteht, wenn alle Lasten P mit Ausnahme von P_1 und alle Stützordinaten y gleich null gesetzt werden, und erhält e_1 aus der Gleichung

$$M_1 = e_1 P_1.$$

Die Linie, welche durch ihre Ordinate für jede Abszisse x der Last P die zugehörige Größe e darstellt, wird die *Einflußlinie* des Biegungsmomentes M genannt, weil die Ordinate e für jede Lage der Last P den Einfluß darstellt, den die Last P auf die Größe von M ausübt. Ein Beispiel solcher Einflußlinien wurde bereits im Abschnitt 5 gegeben.

8. Beziehung zwischen drei aufeinanderfolgenden Stützenmomenten eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt. Die durch Gleichung 7) ausgedrückte Bedingung gilt für je drei Punkte der elastischen Linie, also auch für die Punkte, die von drei aufeinander folgenden Stützen 2, 3, 4 (Abb. 25) des kontinuierlichen Balkens berührt werden. Um die Gleichung 7) für diese drei Punkte zu bilden, sind in Abb. 26 die Biegungsmomente der Balkenfelder 2 und 3 dargestellt worden.

Wir bezeichnen mit l_2 und l_3 die Stützweiten der beiden Felder, mit y_2, y_3, y_4 die gegebenen Ordinaten der Stützen 2, 3, 4, mit M_2, M_3, M_4 die unbekannten Stützenmomente, denen wir das *positive* Vorzeichen beilegen, wenn, wie es in der Regel der Fall ist, die *konkave* Seite des gebogenen Balkens über der Stütze nach *unten* gekehrt ist.

Die Momentenfläche des *zweiten* Balkenfeldes läßt sich in drei Teile zerlegen. Die Fläche

$$ACDE = V_2$$

stellt die gegebenen, positiven Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ dar, die eintreten würden, wenn der Balken über jeder Stütze durchschnitten

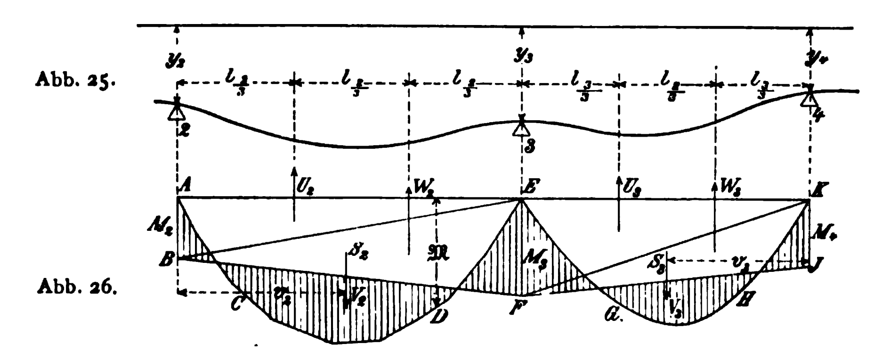


Abb. 25.

Abb. 26.

würde. Zu diesen positiven Momenten treten die negativen Biegungsmomente hinzu, die von der Trapezfläche $ABFE$ oder den beiden Dreiecken

$$ABE = U_2 = -\frac{1}{2} M_2 l_2$$

und

$$EFB = W_2 = -\frac{1}{2} M_3 l_2$$

dargestellt werden. Wird diese Belastungsfläche der elastischen Linie, deren Horizontalkraft gleich εJ ist, in den Punkten A und E gestützt, so haben die drei von den Flächen V_2, U_2, W_2 in E erzeugten Stützkräfte die Größen

$$\frac{V_2 v_2}{l_2}, \quad \frac{U_2}{3} = -\frac{M_2 l_2}{6} \quad \text{und} \quad \frac{2}{3} W_2 = -\frac{M_3 l_2}{3}.$$

In Gleichung 7) ist also

$$b_1 = \frac{V_2 v_2}{l_2} - \frac{M_2 l_2}{6} - \frac{M_3 l_2}{3}.$$

v_2 bezeichnet in diesen Formeln den Horizontalabstand des Schwerpunktes S_2 der Fläche $ACDE$ von dem Lot des Punktes A.

Wir zerlegen in gleicher Weise die Momentenfläche des *dritten* Balkenfeldes in die drei Teilflächen:

$$EGHK = V_3$$

$$EFK = U_3 = -\frac{M_3 l_3}{2}$$

$$KJF = W_3 = -\frac{M_4 l_3}{2}.$$

Der Schwerpunkt S_3 der Fläche $EGHK$ hat vom Lot der Stütze 4 den Abstand v_3. Wird die Momentenfläche als Belastung des Balkens EK angesehen, so überträgt sie auf E die Stützkraft

$$b_2 = \frac{V_3 v_3}{l_3} - \frac{M_3 l_3}{3} - \frac{M_4 l_3}{6}.$$

Aus Gleichung 7) ergibt sich also die Bedingung:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon J\left(\frac{y_3 - y_2}{l_2} + \frac{y_3 - y_4}{l_3}\right) = \frac{V_2 v_2}{l_2} + \frac{V_3 v_3}{l_3} - \frac{M_2 l_2}{6} \\ - \frac{M_3 (l_2 + l_3)}{3} - \frac{M_4 l_3}{6}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Die Anzahl der Bedingungen dieser Art, die für je zwei benachbarte Balkenfelder gebildet werden können, ist ebenso groß wie die Anzahl der zu bestimmenden unbekannten Stützenmomente.

Sind beispielsweise die beiden Balkenfelder 2 und 3 *gleichmäßig* mit $p_2 l_2$ und $p_3 l_3$ belastet, und liegen die drei Stützen 2, 3, 4 in gleicher Höhe, so ist

$$V_2 = \frac{2}{3} l_2 \frac{p_2 l_2^2}{8} = \frac{p_2 l_2^3}{12}$$

$$V_3 = \frac{p_3 l_3^3}{12}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} l_2, \quad v_3 = \frac{1}{2} l_3$$

$$y_2 = y_3 = y_4$$

und folglich (vergl. VIII, Gleichung 33):

$$M_2 l_2 + 2 M_3 (l_2 + l_3) + M_4 l_3 = \frac{p_2 l_2^3}{4} + \frac{p_3 l_3^3}{4}. \quad (13)$$

9. **Die Biegungsmomente eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt in dem Fall, wenn nur *ein* Balkenfeld belastet ist, und alle Stützen in gleicher Höhe liegen.** Wenn ein Balkenfeld unbelastet ist, so verschwindet für dieses Feld die im vorigen Abschnitt mit V bezeichnete Be-

lastungsfläche, und die Biegungsmomente des Feldes werden infolgedessen durch eine gerade Linie dargestellt. Die Abb. 27 zeigt einen Balken mit sieben Feldern, von denen nur eins, das vierte, belastet ist, während alle anderen keine Lasten tragen. Für die beiden ersten Felder nimmt, da das Biegungsmoment des Balkenquerschnittes über der Endstütze

$$M_1 = 0$$

ist, die Bedingung der Gleichung 12) die folgende Form an:

$$0 = \frac{M_2 (l_1 + l_2)}{3} + \frac{M_3 l_2}{6},$$

woraus folgt:

$$\frac{M_3}{M_2} = -\frac{2 (l_1 + l_2)}{l_2}. \tag{14}$$

Die Gleichung 14) zeigt, daß die beiden Stützenmomente M_2 und M_3 verschiedene Vorzeichen haben, und daß ihr Größenverhältnis *unveränderlich* und von der gegebenen Belastung des Balkens unab-

Abb. 27.

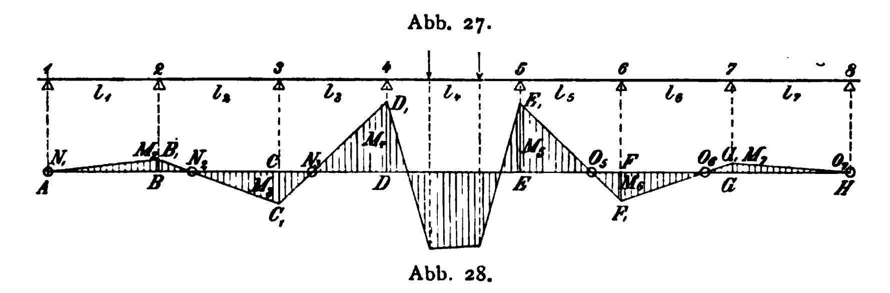


Abb. 28.

hängig ist. Die gerade Linie B_1C_1, welche die Biegungsmomente innerhalb des zweiten Feldes graphisch darstellt, schneidet die Abszissenachse ABC daher in einem *festen* Punkte N_2, dessen Lage durch Gleichung 14) bestimmt wird.

Für die beiden unbelasteten Balkenfelder 2 und 3 gilt nach Gleichung 12) die Bedingung:

$$0 = M_2 l_2 + 2 M_3 (l_2 + l_3) + M_4 l_3,$$

woraus in Verbindung mit Gleichung 14) folgt:

$$\frac{M_4}{M_3} = -\frac{2 (l_2 + l_3)}{l_3} + \frac{l_2}{l_3} \frac{l_2}{2 (l_1 + l_2)}. \tag{15}$$

Die gerade Linie C_1D_1, welche die Biegungsmomente des dritten unbelasteten Feldes darstellt, geht also ebenfalls durch einen festen Punkt N_3 der Abszissenachse, dessen Lage durch die Gleichung 15) bestimmt wird.

In gleicher Weise kann man die Lage der festen Punkte O_7, O_6, O_5 ermitteln, durch welche die Form der graphischen Darstellung der Biegungsmomente der unbelasteten Felder am *rechten* Balkenende bestimmt wird. Da die Stützenmomente für die *Endstützen* 1 und 8 gleich null sind, so fallen die festen Punkte N_1 und O_7 mit den Punkten A und H (Abb. 28) zusammen.

Die vorstehende Betrachtung zeigt, daß, wenn *ein* Balkenfeld belastet ist, nur die beiden Stützenmomente M_4 und M_5 neben dem belasteten Felde zu ermitteln sind. Für die anschließenden unbelasteten Balkenfelder wird dann die graphische Darstellung der Biegungsmomente durch die festen Punkte N und O bestimmt.

Aus der Differentialgleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{\varepsilon J}$$

geht hervor, daß die *Wendepunkte* dieser Kurve dort liegen, wo das Biegungsmoment M sein Vorzeichen wechselt, wo also

$$M = 0$$

ist. Die Abszissen der Wendepunkte werden demnach *links* von dem belasteten Balkenfelde durch die festen Punkte N und *rechts* von diesem Felde durch die festen Punkte O bestimmt.

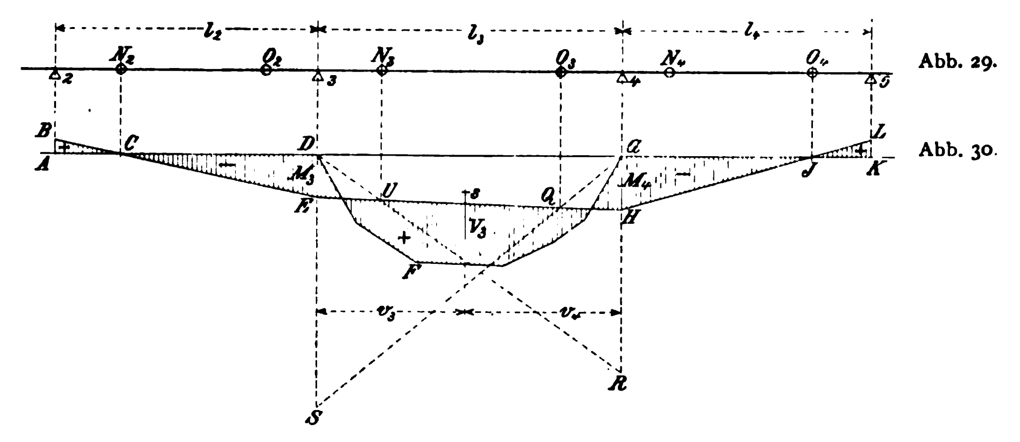


Abb. 29.

Abb. 30.

10. Die Bestimmung der beiden Stützenmomente neben dem belasteten Balkenfelde. Von dem in Abb. 29 dargestellten kontinuierlichen Balken konstanten Querschnittes ist nur das *dritte* Feld belastet. Das Polygon DFG zeigt die gegebenen positiven Biegungsmomente $\mathfrak{M}$. Zu bestimmen sind die beiden unbekannten Stützenmomente M_3 und M_4. Die festen Punkte N, O

der übrigen Balkenfelder, die nach den Regeln des Abschnittes 9 bestimmt worden sind, ergeben in bekannter Weise die Biegungsmomente der unbelasteten Felder. Wir bezeichnen wieder mit V_3 die Größe der positiven Momentenfläche DFG und die Abstände ihres Schwerpunktes s von den Loten der Stützen 3 und 4 mit v_3 und v_4.

Die Gleichungen 12) für die Felder 2, 3 und 3, 4 lauten dann:

$$0 = \frac{V_3 v_4}{l_3} - \frac{M_2 l_2}{6} - \frac{M_3 (l_2 + l_3)}{3} - \frac{M_4 l_3}{6}, \tag{16}$$

$$0 = \frac{V_3 v_3}{l_3} - \frac{M_3 l_3}{6} - \frac{M_4 (l_3 + l_4)}{3} - \frac{M_5 l_4}{6}. \tag{17}$$

Wäre das dritte Balkenfeld unbelastet, dagegen eins der folgenden Felder, z. B. das vierte Feld, so belastet, daß die Darstellung der Biegungsmomente $ABCDE$ innerhalb des *zweiten* Feldes unverändert bliebe, so würden die Biegungsmomente innerhalb des unbelasteten dritten Feldes durch die negative Fläche DEU und die positive Fläche UHR dargestellt werden. Die Gleichung 12) ergibt für diesen Belastungsfall die Bedingung:

$$0 = -\frac{M_2 l_2}{6} - \frac{M_3 (l_2 + l_3)}{3} + \frac{l_3}{6} HR.$$

In Verbindung mit Gleichung 16) folgt hieraus:

$$0 = \frac{V_3 v_4}{l_3} - \frac{l_3}{6} (M_4 + HR)$$

oder

$$GR = \frac{6 V_3 v_4}{l_3^2}. \tag{18}$$

Eine ähnliche Betrachtung, bei der man voraussetzt, das dritte Feld sei unbelastet und eins der *links* liegenden Felder 1 oder 2 werde so belastet, daß die Darstellung $GHJLK$ der Biegungsmomente im vierten Felde unverändert bleibt, führt in Verbindung mit Gleichung 17) zu der Bedingung (Abb. 30):

$$DS = \frac{6 V_3 v_3}{l_3^2}. \tag{19}$$

Werden die beiden durch die Gleichungen 18) und 19) bestimmten Strecken GR und DS aufgetragen, so bestimmen der Schnittpunkt U der Geraden DR mit dem Lot von N_3 und der Schnittpunkt Q der Geraden GS mit dem Lot von O_3 die Lage der Geraden $EUQH$ und hierdurch die Größen der Stützenmomente:

$$M_3 = DE \quad \text{und} \quad M_4 = GH.$$

Besonders einfach gestaltet sich die Konstruktion, wenn die Belastung $p_3 l_3$ gleichmäßig über das Feld verteilt ist (Abb. 31).

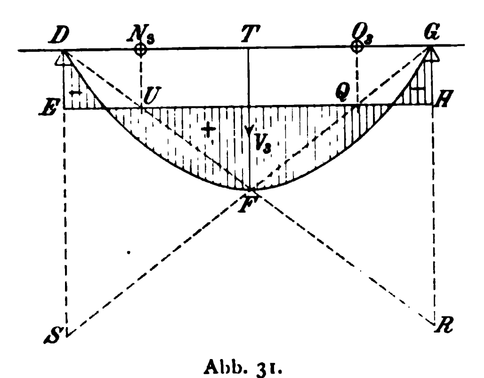


Abb. 31.

Dann ist die Fläche V_3 ein *Parabelsegment* DFG von der Größe

$$V_3 = \frac{2}{3} l_3 \cdot \frac{p_3 l_3^2}{8} = \frac{p_3 l_3^3}{12}$$

$$v_3 = v_4 = \frac{1}{2} l_3$$

und

$$GR = DS = \frac{3 V_3}{l_3} = 2\, TF.$$

Die Geraden DR und GS schneiden sich also im Scheitel F der Parabel DFG.

11. Die von einer Einzellast erzeugten Biegungsmomente eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt. Die Abb. 32 zeigt einen Balken auf vier Stützen

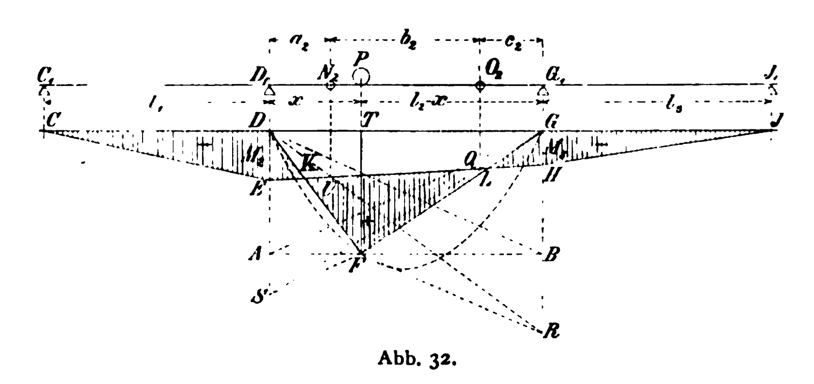


Abb. 32.

von gleicher Höhe. Nur das zweite Feld ist belastet, und zwar mit *einer* Last P, deren Abstand von der zweiten Stütze mit x bezeichnet ist. Die positive Belastungsfläche V_2 des zweiten Feldes ist daher ein Dreieck von der Höhe

$$TF = \frac{Px\,(l_2 - x)}{l_2}$$

und der Größe

$$DFG = V_2 = \frac{Px\,(l_2 - x)}{2}.$$

Der Schwerpunkt dieses Dreiecks hat von den Loten der zweiten und dritten Stütze die Abstände:

$$r_2 = \frac{l_2 + x}{3} \quad \text{und} \quad r_3 = \frac{2 l_2 - x}{3}.$$

Die Strecken DS und GR (Abb. 30 und 32) haben daher in diesem Falle die Größen:

$$GR = \frac{6 V_2 r_3}{l_2^2} = \frac{Px(l_2 - x)}{l_2} \frac{2 l_2 - x}{l_2} = TF\left(1 + \frac{l_2 - x}{l_2}\right) \quad (20)$$

$$DS = \frac{6 V_2 r_2}{l_2^2} = \frac{Px(l_2 - x)}{l_2} \frac{l_2 + x}{l_2} = TF\left(1 + \frac{x}{l_2}\right). \quad (21)$$

Man zieht also, um die Punkte R und S auf geometrischem Wege zu bestimmen (Abb. 32):

$$AFB \parallel DG$$

$$FR \parallel DB$$

und

$$FS \parallel GA.$$

Die Gerade EH, die auf den Stützenordinaten die Stützenmomente

$$DE = M_2 \quad \text{und} \quad GH = M_3$$

abschneidet, wird dann wie im vorigen Abschnitt bestimmt durch den Schnittpunkt U der Geraden DR mit dem Lot von N_2 und den Schnittpunkt Q der Geraden GS mit dem Lot von O_2. Die graphische Darstellung der von der Einzellast P erzeugten Biegungsmomente wird demnach durch das Polygon $CDKFLGJHLKEC$ gebildet. Die Ordinaten der Flächen $CDKE$ und $JGLH$ bestimmen negative Biegungsmomente, während die Ordinaten der Fläche KFL positive Biegungsmomente darstellen. Die Wendepunkte der elastischen Linie liegen auf den Loten der Punkte K und L.

Es ist zu beachten, daß für alle Lagen der Last P innerhalb des zweiten Feldes die Biegungsmomente der Strecke $N_2 O_2$ zwischen den beiden festen Punkten N_2 und O_2 stets *positiv* sind.

Wenn die beschriebene Konstruktion für mehrere Lagen der Last P auszuführen ist, so benutzt man die Parabel DFG als geometrischen Ort des Punktes F. Der Scheitel dieser Parabel hat die Abszisse $\frac{1}{2} l_2$ und die Ordinate $P \frac{l_2}{4}$.

Um die beiden Stützenmomente *durch Rechnung* zu bestimmen, bezeichnen wir die drei Strecken (Abb. 32) $D_1 N_2$, $N_2 O_2$, $O_2 G_1$ mit a_2, b_2, c_2 und beachten, daß nach den Gleichungen 20) und 21)

$$GR = GH + HR = \frac{Px(l_2 - x)(2l_2 - x)}{l_2^2} = M_3 + M_2 \frac{b_2 + c_2}{a_2}$$

$$DS = DE + ES = \frac{Px(l_2 - x)(l_2 + x)}{l_2^2} = M_2 + M_3 \frac{a_2 + b_2}{c_2}$$

ist, woraus folgt:

$$M_2 = \frac{P a_2}{l_2^2 b_2} x(l_2 - x)(2l_2 - 3c_2 - x) \qquad (22)$$

$$M_3 = \frac{P c_2}{l_2^2 b_2} x(l_2 - x)(l_2 - 3a_2 + x). \qquad (23)$$

Nach diesen Gleichungen läßt sich die Beziehung zwischen jedem der beiden Stützenmomente M_2, M_3 und der Abszisse x der Last P,

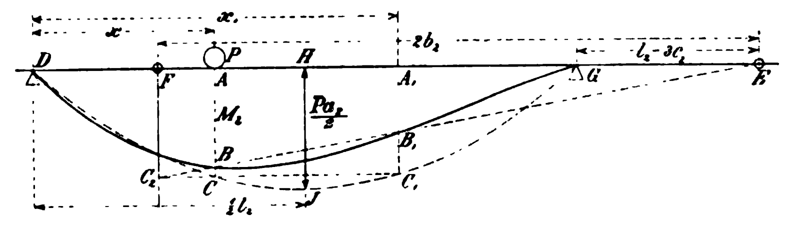


Abb. 33.

welche die beiden Momente erzeugt, graphisch darstellen. Abb. 33 gibt die Darstellung von M_2. D und G sind die Stützen 2, 3, und A ist der mit P belastete Punkt; also ist

$$DG = l_2 \quad \text{und} \quad DA = x.$$

Um für jede Abszisse x durch die Ordinate AB das Biegungsmoment

$$AB = M_2 = \frac{Pa_2}{l_2^2 b_2} x(l_2 - x)(2l_2 - 3c_2 - x)$$

zu bestimmen, ist aufzutragen:

$$GE = l_2 - 3c_2, \qquad EF = 2b_2, \qquad DH = \frac{1}{2} l_2, \qquad HJ = \frac{Pa_2}{2}.$$

Es ist dann die Parabel DJG zu bilden, deren Scheitel mit dem Punkte J zusammenfällt. Durch den Endpunkt C der Parabelordinate AC zieht man die Gerade

$$C_1 C C_2 \parallel DG,$$

welche das Lot von F in C_2 schneidet. Die Gerade EBC_2 bestimmt dann den Endpunkt B der Ordinate AB; denn es ist

$$AC = FC_2 = \frac{Pa_2}{2} \frac{4x(l_2 - x)}{l_2^2}$$

und
$$AB = FC_2 \frac{EA}{EF} = FC_2 \frac{l_2 + (l_2 - 3c_2) - x}{2b_2},$$

folglich
$$AB = \frac{2Pa_2 x (l_2 - x)}{l_2^2} \cdot \frac{2l_2 - 3c_2 - x}{2b_2} = M_2.$$

Der geometrische Ort DBB_1G des Punktes B bildet die Einflußlinie des Stützenmomentes M_2 innerhalb des zweiten Balkenfeldes; denn ihre Ordinate AB bestimmt für jede Lage A der Last P den Einfluß dieser Last auf die Bildung des genannten Momentes.

Auf der Geraden EBC_2 liegt, wie man leicht erkennt, noch ein zweiter Punkt B_1 der Einflußlinie, nämlich auf der Parabelordinate
$$A_1C_1 = AC = FC_2.$$

In ganz ähnlicher Weise entsteht die Einflußlinie DJG (Abb. 34) des Stützenmomentes M_3 nach Anleitung der Gleichung 23). Im vorliegenden Beispiel stehen die vier Stützen C_1, D_1, G_1, J_1 (Abbildung 32) symmetrisch zur Balkenmitte. Daher sind die beiden Einflußlinien DBG und DJG (Abb. 34) kongruent und symmetrisch gegen die Balkenmitte. Mit Hilfe dieser beiden Kurven und der Parabel DFG von der Scheitelhöhe

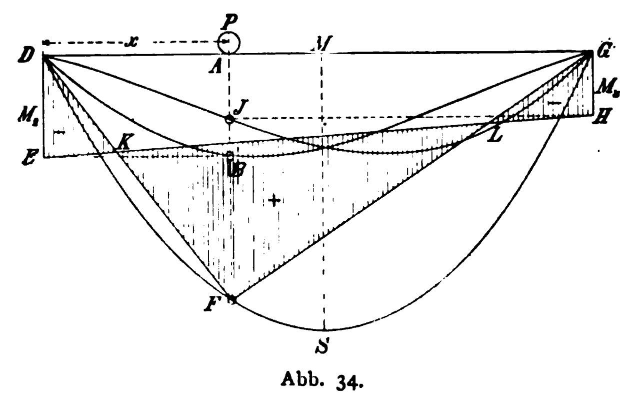


Abb. 34.

$$MS = \frac{1}{4} Pl_2$$

bildet man die graphische Darstellung der Biegungsmomente für jede Lage A der Last P innerhalb des zweiten Feldes in folgender Weise: Man zieht die Parabelordinate des Punktes A
$$AF = P\frac{x(l_2 - x)}{l_2},$$

trägt
$$M_2 = DE = AB$$
$$M_3 = GH = AJ$$

auf, und bestimmt hierdurch die ebenso wie in Abb. 32 bezeichnete Momentenfläche $EDKFLGH$.

12. Die Einflußlinien der Biegungsmomente eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt. Um eine vollständige Uebersicht über die Entstehung der Biegungsmomente zu gewinnen, zerlegt man jedes Balkenfeld durch Querschnitte in sechs bis acht gleiche Teile, bringt nacheinander über jedem der Querschnitte die Einzellast P an und bildet für diese Lastlagen nach Anleitung der Abb. 32 oder 34 die graphischen Darstellungen der Biegungsmomente. Die Einflußlinie des Biegungs-

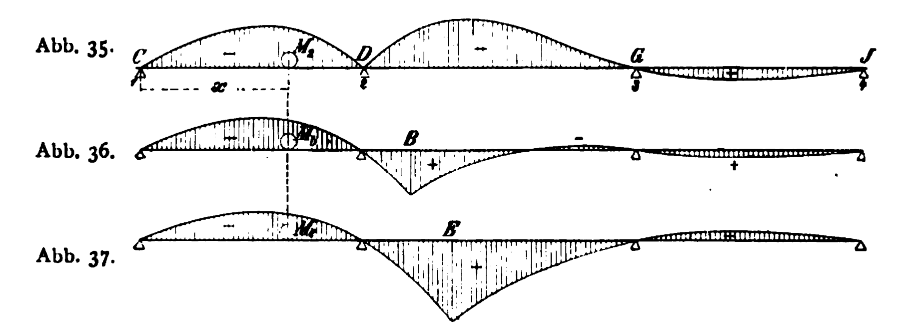


Abb. 35.

Abb. 36.

Abb. 37.

momentes M_e eines bestimmten Balkenquerschnittes E (Abb. 37) entsteht dann, indem man in jeder Lage der Last P das im Balkenquerschnitt E erzeugte Biegungsmoment M_e als Ordinate aufträgt. Auf diesem Wege ist beispielsweise in Abb. 35 die Einflußlinie für den Balkenquerschnitt D über der zweiten Stütze, also für das Stützenmoment M_2, ferner in Abb. 36 für den Querschnitt B und in Abb. 37 für den Querschnitt E gebildet worden.

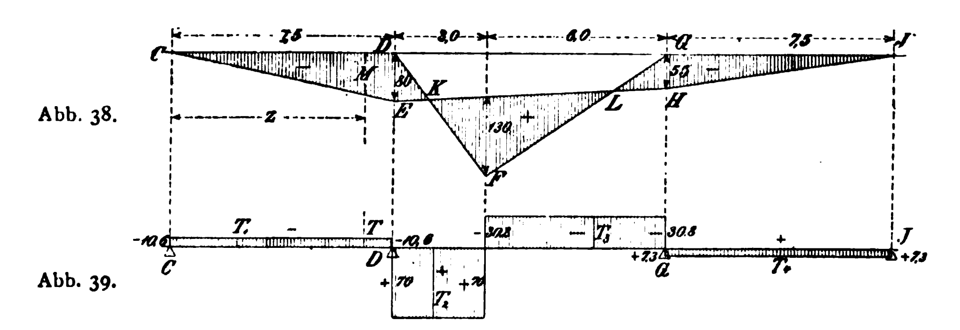
Ein anderes Verfahren wird in der Abhandlung XI, Abschnitt 17 beschrieben.

13. Die von einer Einzellast P erzeugten Schubkräfte T der Querschnitte eines kontinuierlichen Balkens. Wenn für einen Belastungsfall durch die graphische Darstellung die Beziehung zwischen dem Biegungsmoment M und der Abszisse z des Balkenquerschnittes gegeben ist, so bestimmt man nach Gleichung 21) der Abhandlung VII die Schubkraft oder Querkraft des Querschnittes durch die Formel

$$T = \frac{dM}{dz}. \tag{24}$$

Die Größe T trägt das *positive* Vorzeichen, wenn auf den Balkenteil *links* vom Querschnitt eine nach *oben* zeigende Resultante wirkt.

Wir wählen als Beispiel die in den Abb. 32 und 38 gegebene Darstellung der von einer Einzellast P erzeugten Biegungsmomente. Die Maße sind in die Zeichnungen eingeschrieben, und zwar die Längen in Meter, die Biegungsmomente in Meter-Tonnen und die


Abb. 38.
Abb. 39.

in Abb. 39 dargestellten Schubkräfte in Tonnen. Für das erste Balkenfeld CD hat T die konstante Größe

$$T_1 = \frac{dM}{dz} = -\frac{DE}{CD} = -\frac{80}{7{,}5} = -10{,}6 \text{ t.}$$

Für den Abschnitt DF des zweiten Balkenfeldes hat die Schubkraft den konstanten positiven Wert:

$$T_2 = +\frac{130+80}{3{,}0} = +70 \text{ t,}$$

ferner für die Querschnitte des zweiten Abschnittes FG den negativen Wert:

$$T_3 = -\frac{130+55}{6{,}0} = -30{,}8 \text{ t,}$$

und für die Querschnitte des dritten Balkenfeldes GJ ist

$$T_4 = +\frac{55}{7{,}5} = +7{,}3 \text{ t.}$$

Die *Einflußlinie* der Schubkraft eines bestimmten Balkenquerschnittes kann auf dem im Abschnitt 12 beschriebenen Wege ge-

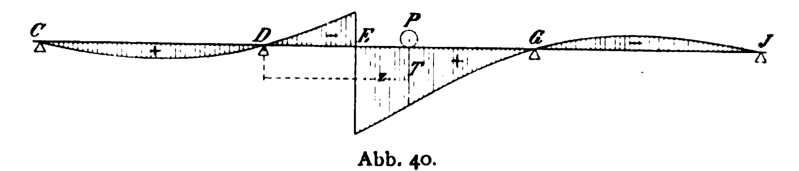


Abb. 40.

bildet werden. Beispielsweise ergibt sich für den Querschnitt E des zweiten Balkenfeldes die in Abb. 40 dargestellte Einflußlinie. Die

zugehörigen Darstellungen der Schubkräfte für eine Reihe von Lagen der Last P wurden, da sie nichts Bemerkenswertes bieten, hier fortgelassen.

14. Graphische Bestimmung der Biegungsmomente eines kontinuierlichen Balkens von konstantem Querschnitt bei gegebener Belastung und Stützenlage. Das im folgenden zu beschreibende Verfahren soll an dem in den Abb. 41 bis 46 dargestellten Beispiel erläutert werden. Der Längenmaßstab der Abszissen ist 1 : 100. Die Horizontalkraft H der als Seilkurve anzusehenden elastischen Linie wurde gleich $\frac{1}{100}$ gewählt; daher sind die Ordinaten der elastischen Linie sowie die gegebenen Ordinaten y_2, y_3 der Mittelstützen in bezug auf die wagerechte Achse $B_1 B_4$ der Endstützen in *natürlicher* Größe dargestellt.

Wie im Abschnitt 8 wird die von der Ordinate

$$k = \frac{M}{\varepsilon J}$$

beschriebene Belastungsfläche der elastischen Linie für jedes Balkenfeld zerlegt in die gegebene positive Fläche V und die beiden unbekannten negativen Dreiecksflächen U und W. Die Lasten U und W zerlegen die Länge l eines jeden Balkenfeldes in drei gleiche Teile $\frac{l}{3}$. Für das erste Balkenfeld ist

$$U_1 = 0, \quad W_1 = -\frac{M_2 l_1}{2\varepsilon J},$$

für das zweite:

$$U_2 = -\frac{M_2 l_2}{2\varepsilon J}, \quad W_2 = -\frac{M_3 l_2}{2\varepsilon J}$$

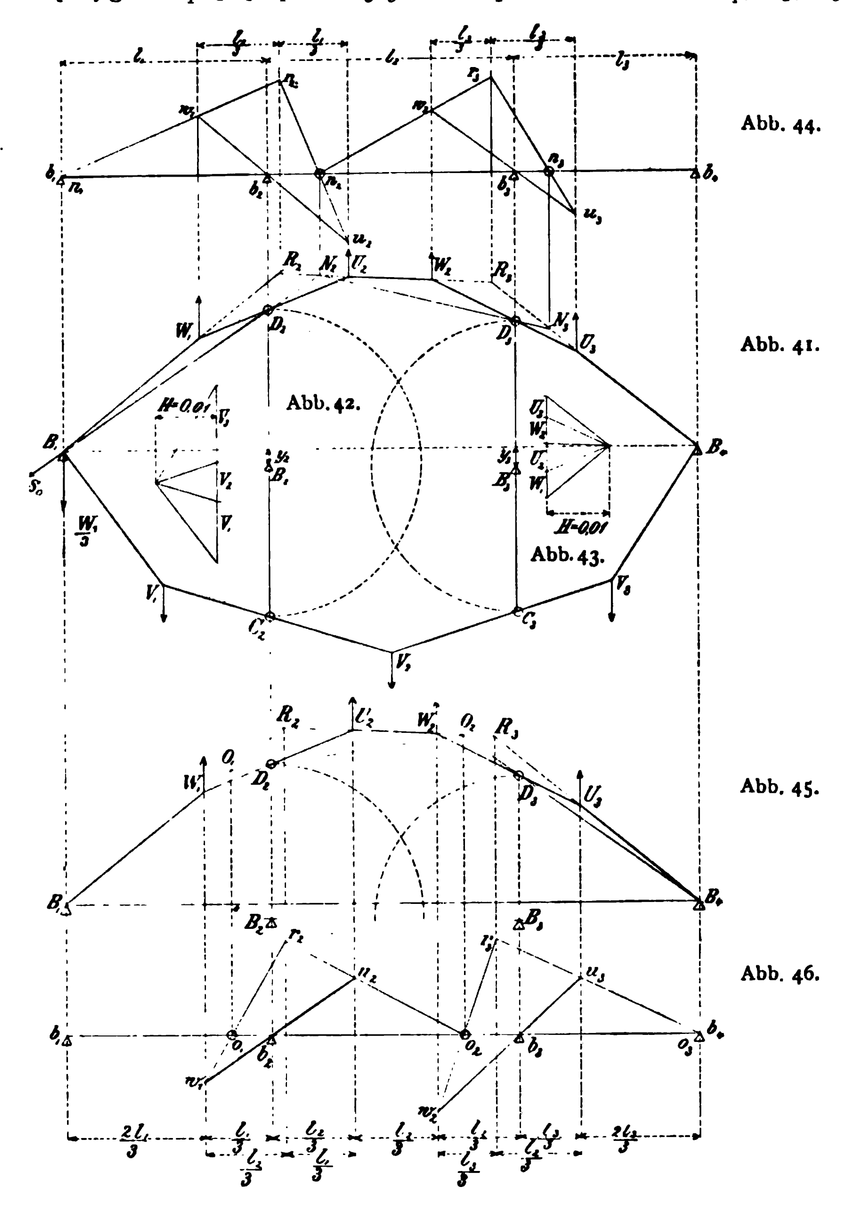
und für das dritte Feld

$$U_3 = -\frac{M_3 l_3}{2\varepsilon J}, \quad W_3 = 0.$$

Die Darstellung der gegebenen Belastungsflächen V ist fortgelassen.

Nach Abschnitt 2 können die Ordinaten y_2, y_3 der Mittelstützen angesehen werden als die Darstellung der Biegungsmomente, welche in den Balkenquerschnitten über den Mittelstützen 2, 3 entstehen, wenn der Balken nur in den Endstützen 1, 4 gestützt und mit den Lasten V_1, W_1, U_2, V_2, W_2, U_3, V_3 belastet wird, mit anderen Worten: das durch die beiden Endstützen B_1, B_4 gelegte

Seilpolygon der Lasten U, V, W muß auch durch die Mittelstützen B_2, B_3 gehen. Zeichnet man (Abb. 41) *gesondert voneinander* das Seilpolygon $B_1 C_2 C_3 B_4$ der *gegebenen* positiven Lasten V_1, V_2, V_3



und das Seilpolygon $B_1 D_2 D_3 B_4$ der unbekannten negativen Lasten W_1, U_2, W_2, U_3, so müssen demnach die Ordinaten der

beiden Polygone in den Loten der Mittelstützen die Bedingungen erfüllen:

$$B_2 D_2 = - B_2 C_2, \quad B_3 D_3 = - B_3 C_3.$$

Hierdurch sind die Punkte D_2, D_3 des unbekannten Seilpolygons bestimmt. Die drei ersten Seiten $B_1 W_1$, $W_1 U_2$, $U_2 W_2$ dieses Polygons haben folgende drei Bedingungen zu erfüllen:

1. Die Seiten $B_1 W_1$, $W_1 U_2$ gehen durch die gegebenen Punkte B_1, D_2.

2. Die beiden Seiten $B_1 W_1$, $U_2 W_2$ schneiden sich auf der Resultanten R_2 der beiden Lasten W_1, U_2. Die Lage von R_2 ist bestimmt durch das Verhältnis:

$$W_1 : U_2 = l_1 : l_2 = \frac{l_1}{3} : \frac{l_2}{3}.$$

Daher ist der Abstand zwischen W_1 und R_2 gleich $\frac{1}{3} l_2$, und der zwischen R_2 und U_2 gleich $\frac{1}{3} l_1$.

3. Die Gerade $B_1 D_2$ schneidet die Polygonseite $U_2 W_2$ in einem festen Punkte N_2; denn fügt man zu den Lasten des Seilpolygons im Punkte B_1 noch eine nach unten zeigende Last von der Größe $\frac{1}{3} W_1$ hinzu, so fällt die neue Polygonseite S_0 mit der festen Geraden $B_1 D_2$ zusammen, weil die Resultante der beiden Lasten $+\frac{1}{3} W_1$ und $- W_1$ mit dem Lot des Punktes D_2 zusammenfällt. Die durch den Punkt N_2 gehende Resultante der drei Lasten $+\frac{1}{3} W_1$, $-W_1$, $-U_2$ hat eine *feste* Lage, weil das Größenverhältnis dieser drei Lasten:

$$+\frac{1}{3} W_1 : - W_1 : - U_2 = + \frac{l_1}{3} : - l_1 : - l_2$$

unveränderlich ist. Man bestimmt den festen Punkt N_2, indem man der Geraden $B_1 W_1 R_2$ zunächst eine beliebige Lage gibt. Man zieht darauf die Geraden $W_1 D_2 U_2$, $R_2 U_2$ und bestimmt N_2 durch die Gerade $B_1 D_2 N_2$. Um die Zeichnung des Seilpolygons nicht mit Linien zu überladen, ist es vorzuziehen, die Projektion n_2 des festen Punktes N_2 auf die Horizontale $b_1 b_4$ in einer Hilfsabbildung 44 zu bestimmen. Man gibt also der durch b_1 gelegten Geraden $b_1 w_1 r_2$ eine beliebige Richtung und zieht darauf die beiden Geraden $w_1 b_2 u_2$ und $r_2 n_2 u_2$.

Von den drei Polygonseiten $U_2 W_2$, $W_2 U_3$, $U_3 B_4$ (Abb. 41) sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

1. Die Seiten $U_2 W_2$ und $W_2 U_3$ gehen durch die gegebenen Punkte N_2 und D_3.

2. Die beiden Seiten $U_2 W_2$ und $U_3 B_4$ schneiden sich auf der Resultanten R_3 der beiden Lasten W_2, U_3. Das Verhältnis

$$W_2 : U_3 = l_2 : l_3$$

bestimmt die Lage von R_3.

3. Die Gerade $N_2 D_3$ schneidet die Polygonseite $U_3 B_4$ in einem festen Punkt N_3. Um in Abb. 44 die Projektion n_3 des Punktes N_3 zu bestimmen, zieht man durch n_2 irgend eine Gerade $n_2 w_2 r_3$ und darauf die Geraden $w_2 b_3 u_3$ und $r_3 n_3 u_3$.

Das Seilpolygon $B_1 W_1 U_2 W_2 U_3 B_4$ (Abb. 41) entsteht demnach auf folgendem Wege. Man bestimmt zunächst die Punkte n_2, n_3 durch Abb. 44, darauf die Punkte N_2, N_3 durch den Linienzug $B_1 D_2 N_2$, $N_2 D_3 N_3$. Dann ist die Polygonseite

$B_4 U_3 N_3 R_3$	bestimmt durch die Punkte B_4, N_3
$U_3 D_3 W_2$	,, ,, ,, ,, U_3, D_3
$R_3 W_2 U_2 N_2 R_2$	,, ,, ,, ,, R_3, W_2, N_2
$U_2 D_2 W_1$	,, ,, ,, ,, U_2, D_2
$R_2 W_1 B_1$	,, ,, ,, ,, R_2, W_1, B_1.

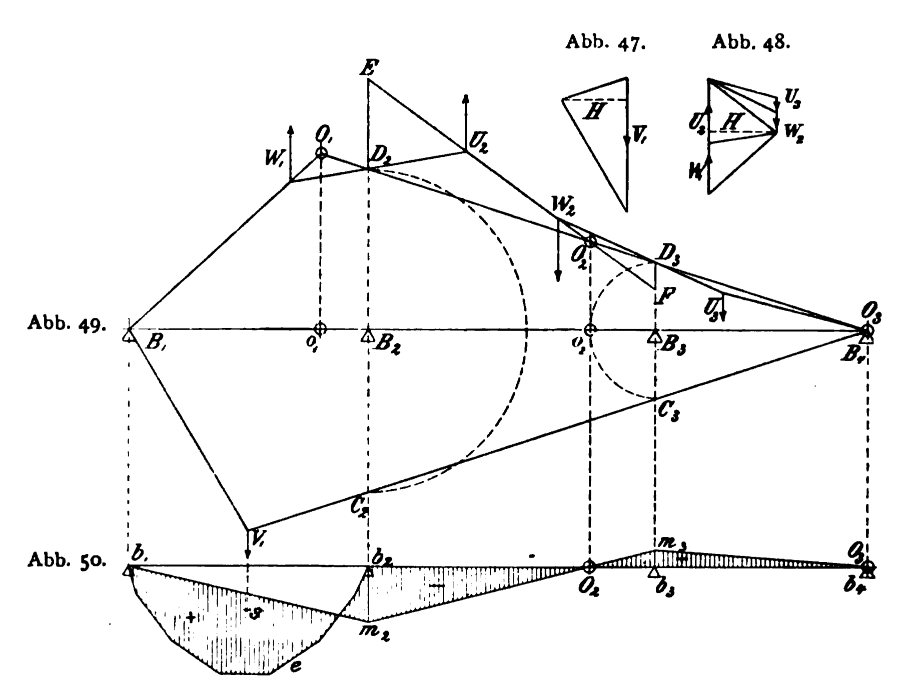
Man gewinnt also Proben für die Richtigkeit und Genauigkeit der Zeichnung aus den Bedingungen, daß die Punkte R_3, W_2, N_2 und R_2, W_1, B_1 auf geraden Linien liegen müssen.

Die Lasten W_1, U_2, W_2, U_3 und dadurch die unbekannten Stützenmomente M_2, M_3 werden durch den Kräfteplan des Seilpolygons in Abb. 43 bestimmt. Die Horizontalkraft H ist, wie bereits oben angegeben wurde, gleich der Zahl $\frac{1}{100}$.

Das Seilpolygon der Lasten U, W kann ein *zweites* Mal in entgegengesetzter Reihenfolge der Seiten gebildet werden, indem man in Abb. 45 von der letzten Stütze B_4 beginnend, genau wie oben beschrieben wurde, zunächst die festen Punkte o_2, o_1 in Abb. 46 und darauf in Abb. 45 durch den Linienzug $B_4 D_3 O_2$, $O_2 D_2 O_1$ die festen Punkte O_2 und O_1 bestimmt. Alsdann kann das Polygon der Seiten $B_1 W_1 O_1 R_2$, $W_1 D_2 U_2$, $R_2 U_2 W_2 O_2 R_3$, $W_2 D_3 U_3$, $R_3 U_3 B_4$ gebildet werden. Auf diesem Wege gewinnt man weitere Proben für die Genauigkeit der Zeichnung.

15. Anwendung auf den Fall, in dem nur *ein* Balkenfeld belastet ist, und alle Stützen in einer Horizontalen

liegen. Der in Abb. 49 dargestellte kontinuierliche Balken hat dieselben Stützweiten l_1, l_2, l_3 wie der in Abb. 46. Dadurch ist die Lage der festen Punkte o_1, o_2 gegeben. Der Balken ist nur in *einem*, und zwar im *ersten* Felde belastet. Die Momentenfläche $b_1 e b_2$ (Abb. 50) und deren Schwerpunkt s bestimmen Größe und Lage der positiven Last V_1. Die Lasten V_2 und V_3 sind gleich null, weil das zweite und das dritte Balkenfeld unbelastet sind. Das Seil-



polygon $B_1 V_1 B_4$ der Last V_1 wurde vermittels des Kräfteplans Abb. 47 gebildet, in dem

$$V_1 = \frac{\text{Fläche } b_1 e b_2}{\varepsilon J}$$

und

$$H = \frac{1}{100}$$

aufzutragen war. Da die Abszissen im Maßstabe 1 : 100 dargestellt sind, so erhalten die Ordinaten der elastischen Linie die natürliche Größe. Die Stützen B_1, B_2, B_3, B_4 (Abb. 49) liegen auf einer *Horizontalen*, folglich die Punkte D_2, D_3, B_4 auf einer *Geraden*. Bildet man nun nach Anleitung des vorigen Abschnittes das Seilpolygon der Lasten W_1, U_2, W_2, U_3, so ergibt sich, daß auch die Punkte O_1,

O_2, O_3 auf der Geraden $D_2 D_3 B_4$ liegen. Infolgedessen besteht eine einfache Beziehung zwischen den beiden Stützenmomenten eines jeden Feldes des *unbelasteten* Balkenteils $B_2 B_3 B_4$, z. B. zwischen den Stützenmomenten M_2, M_3 des unbelasteten zweiten Feldes. Da die beiden Lasten U_2, W_2 die Feldweite l_2 in drei gleiche Teile zerlegen, so ist nach (II, 7) in Abb. 49:

$$U_2 \frac{1}{3} l_2 = - H \cdot D_2 E$$

$$W_2 \frac{1}{3} l_2 = + H \cdot D_3 F,$$

folglich

$$U_2 : W_2 = - M_2 : + M_3 = D_2 E : D_3 F$$

oder

$$- M_2 : + M_3 = b_2 o_2 : o_2 b_3,$$

d. h. *die gerade Linie $m_2 m_3$, die in Abb. 50 die Biegungsmomente des zweiten Balkenfeldes darstellt, geht durch den festen Punkt o_2 dieses Feldes.* Die gleiche Bedingung gilt für jedes nach rechts folgende Balkenfeld. Im vorliegenden Beispiele ist das dritte Feld bereits das letzte, und daher fällt der feste Punkt o_3 mit der Endstütze b_4 zusammen. Wenn *links* von dem *belasteten* Balkenfelde *unbelastete* Felder liegen, so haben in diesen Feldern die festen Punkte n die oben bezeichnete Eigenschaft.

Die in der vorstehenden Betrachtung verwendeten festen Punkte n und o stimmen demnach überein mit den Punkten N und O, die im Abschnitt 9 auf dem Wege der Rechnung bestimmt wurden.

Der Kräfteplan Abb. 48 der Lasten U und W kommt nur zur Anwendung bei der Bestimmung der Stützenmomente neben dem belasteten Felde, weil der übrige Teil der graphischen Darstellung der Biegungsmomente durch die festen Punkte n, o bestimmt wird. Im vorliegenden Beispiel war nur

$$M_2 = - \frac{2 W_1 \varepsilon J}{l_1}$$

zu berechnen, und W_1 aus Abb. 48 zu entnehmen.

Die Ausdehnung des in den Abschnitten 14 und 15 beschriebenen graphischen Verfahrens auf die Berechnung der kontinuierlichen Balken von *veränderlichem* Querschnitt bietet zwar keine besonderen Schwierigkeiten, das Verfahren wird jedoch wesentlich umständlicher infolge der weniger einfachen Bestimmung der Lasten U, V, W nach Größe und Lage. Unseres Erachtens verdient

bei der Berechnung des kontinuierlichen Balkens von *veränderlichem* Querschnitt das im Abschnitt 6 entwickelte Hilfsmittel den Vorzug.

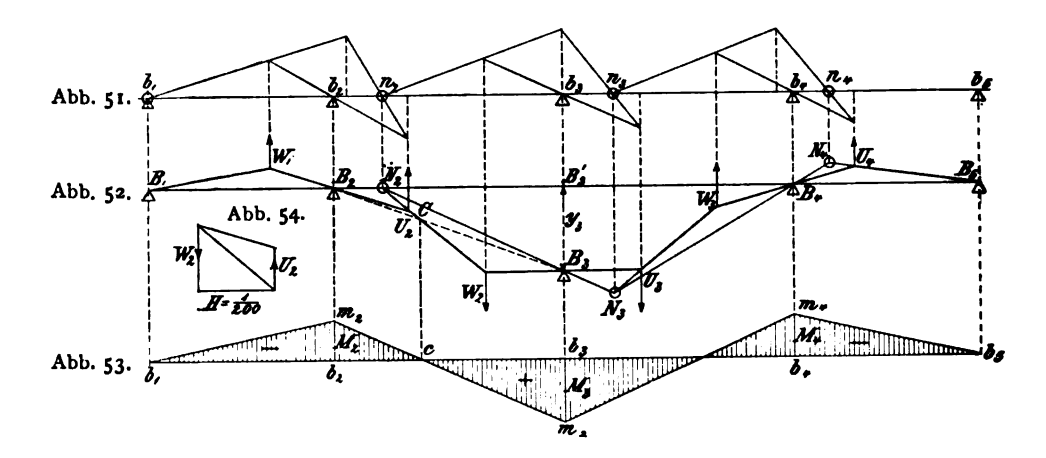
16. Einfluß der Höhenlage einer Stütze. Die Abb. 52 bezieht sich auf einen kontinuierlichen Balken konstanten Querschnittes auf fünf Stützen. Die vier Stützen B_1, B_2, B_4, B_5 liegen auf einer Horizontalen, die Stütze B_3 dagegen um das gegebene Maß

$$B_3 B'_3 = y_3$$

unter derselben. Die Stützweiten sind im Maßstabe 1 : 200 dargestellt, die Ordinate y_3 zeigt ihre natürliche Größe. Daher ist die Horizontalkraft der elastischen Linie:

$$H = \frac{1}{200}.$$

Wenn der *gewichtslose* und *unbelastete* Balken die fünf Stützen berührt, so entstehen die in Abb. 53 dargestellten Biegungsmomente,



welche nach Anleitung des Abschnittes 14 in den Abb. 51 und 52 in folgender Weise bestimmt worden sind.

Alle Lasten V sind gleich null; das Polygon der Lasten U, W muß daher durch die fünf Stützpunkte gehen. Um dieses Polygon zu bilden, wurden zunächst in Abb. 51 die festen Punkte n_2, n_3, n_4 bestimmt. Daraus ergaben sich die festen Punkte N_2, N_3, N_4 in Abb. 52 durch den Linienzug $B_1 B_2 N_2$, $N_2 B_3 N_3$, $N_3 B_4 N_4$. Von den sieben Seiten des Polygons der Lasten U, W sind hierdurch je *zwei* Punkte bestimmt, wenn sie in dieser Reihenfolge aufgetragen werden: $B_5\, U_4 N_4$, $U_4 B_4\, W_3$, $W_3\, U_3 N_3$, $U_3 B_3\, W_2$, $W_2\, U_2 N_2$,

$U_2 B_2 W_1$, $W_1 B_1$. Will man die Zeichnung prüfen, so kann man wie in den vorigen Abschnitten die festen Punkte o und O zu Hilfe nehmen.

Der Kräfteplan Abb. 54 ergibt die beiden Lasten

$$U_2 = -\frac{M_2 l_2}{2 \varepsilon J}, \quad W_2 = +\frac{M_3 l_2}{2 \varepsilon J}$$

und hierdurch die beiden Stützenmomente M_2, M_3. Wegen der symmetrischen Stützenlage ist im vorliegenden Beispiel:

$$M_4 = M_2.$$

Die Gerade $B_2 B_3$ schneidet die Polygonseite $U_2 W_2$ im Punkte C. Da die beiden Lasten U_2, W_2 die Stützweite l_2 in drei gleiche Teile zerlegen, so ist

$$U_2 : W_2 = -M_2 : +M_3 = B_2 C : C B_3.$$

Man gewinnt demnach eine Probe für die Richtigkeit der Zeichnung aus der Bedingung, daß der Punkt c in Abb. 53 in dem Lot des Punktes C liegen muß.

17. Literarische Notizen. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung ist im wesentlichen dem Aufsatze: *Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen;* Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1868, S. 19 entnommen. Außer der Behandlung der elastischen Linie als Seilkurve enthält dieser Aufsatz die *erste Anwendung der Einflußkurven.* Es ist hierbei zu bemerken, daß fast gleichzeitig und unabhängig hiervon *Winkler* von den Einflußlinien Gebrauch machte in den Mitteilungen des Architekten- und Ingenieur-Vereins für Böhmen 1868, S. 6.

Die Abschnitte 4 und 5 entstammen dem Aufsatze: *Beitrag zur Theorie des Fachwerks;* Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1875, S. 28, Gleichungen 20) und 21).

Die erste graphostatische Behandlung der Theorie des kontinuierlichen Balkens findet sich bei *Culmann, Graphische Statik;* Zürich 1866, woselbst die wichtigsten Teile der Aufgabe jedoch noch auf analytischem Wege gelöst werden. Von späteren Bearbeitungen sind zu nennen:

W. Ritter, Die elastische Linie und ihre Anwendung auf den kontinuierlichen Balken; Zürich 1871.

Lippich, Theorie des kontinuierlichen Balkens konstanten Querschnittes. Elementare Darstellung der von *Clapeyron* und *Mohr* be-

gründeten analytischen und graphischen Methoden und ihres Zusammenhanges; Försters Bauzeitung 1871.

Winkler, Vorträge über Brückenbau; Wien 1875.

M. Levy, La Statique Graphique, IIe Partie; Paris 1886.

Müller-Breslau benutzt in seiner Graphischen Statik, Bd. II, meine Abhandlung in ausgiebigster Weise, ohne irgendwo seine Quelle anzugeben.

Weitere Literaturangaben finden sich im *Handbuch der Ingenieurwissenschaften,* Bd. II: Der Brückenbau, 3. Auflage, S. 364.

Abhandlung X.

Der vollwandige Bogenträger mit Kämpfergelenken.

1. Einleitende Bemerkungen. Eiserne vollwandige Bogenträger werden bekanntlich in drei verschiedenen Formen ausgeführt (Abb. 1 bis 3). In der ersten Form besteht der Träger aus zwei durch ein Gelenk miteinander verbundenen Teilen, die auch an den Kämpfern gegen gelenkförmige Auflager sich stützen. Diese An-

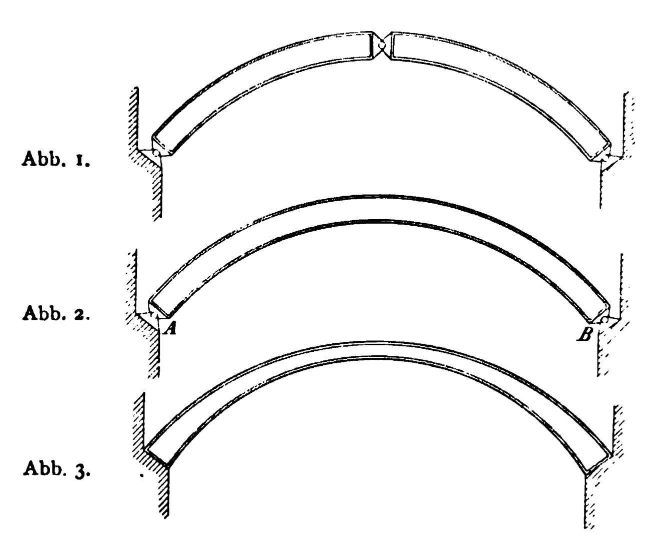


Abb. 1.
Abb. 2.
Abb. 3.

ordnung gewährt den großen Vorteil, daß die Auflagerkräfte auf statischem Wege aus den gegebenen Belastungen mit voller Bestimmtheit sich berechnen lassen, und daß folglich auch die inneren Kräfte von den Aenderungen der Temperatur und der Stützenlage nicht beeinflußt werden. Von allen Ingenieuren, welche die genannten Eigenschaften als wesentliche Erfordernisse einer guten Eisenkonstruktion anerkennen, wird solchen *Bogenträgern mit drei Gelenken* der Vorzug gegeben.

Die Herstellung gelenkförmiger Verbindungen von großen Abmessungen, insbesondere eines Scheitelgelenkes, bietet jedoch nicht geringe konstruktive Schwierigkeiten, und aus diesem Grunde werden oft, selbst bei kleineren Trägern, nur an den Kämpfern Gelenke angebracht. Die vier Komponenten der beiden Auflagerkräfte eines solchen Trägers werden durch die drei Gleichgewichtsbedingungen *nicht* bestimmt. Es muß daher die Biegungslehre zu Hilfe genommen werden, um aus der Bedingung, daß die elastische Formänderung des Trägers eine Längenänderung der Bogensehne AB *nicht* zur Folge habe, den Horizontalschub zu bestimmen. Dieser Rechnung liegen also die ungenauen Voraussetzungen der Elastizitätslehre und die ebenfalls ungenaue Annahme zugrunde, daß *im spannungslosen Zustande* des Trägers die Länge der Bogensehne AB mit der Spannweite AB der Auflager *genau* sich deckt. Die Berechnung der inneren Kräfte eines solchen *Bogenträgers mit zwei Gelenken* wird demnach eine etwa ebenso große oder vielmehr geringe Zuverlässigkeit besitzen wie die Berechnung eines kontinuierlichen Balkens.

Noch unsicherer wird die Rechnung, wenn auch die Kämpfergelenke fehlen. Trotzdem gibt man aus dem angeführten Grunde, namentlich bei großen Fachwerken, dieser dritten Form nicht selten den Vorzug. Die Berechnung solcher *Bogenfachwerke ohne Kämpfergelenke* wird in der Abhandlung XI beschrieben.

Die Berechnung der vollwandigen Bogenträger mit *zwei* Gelenken gehört in das Anwendungsgebiet der graphischen Statik, weil das graphische Verfahren einfacher und bequemer sich ausführen läßt als die Rechnung.

2. Gang der Untersuchung. Wir gehen aus von der Vorstellung, der gewichtslose Träger, von dem in Abb. 4 nur die Bogenachse dargestellt ist, sei im *festen* Kämpfergelenk A gelagert, während das Gelenk B auf wagerechter Auflagerbahn frei sich verschieben kann. Wir belasten den Bogen in irgend einem Punkte C_1 von der Abszisse x mit einem Gewichte

$$K = 1 \text{ kg}$$

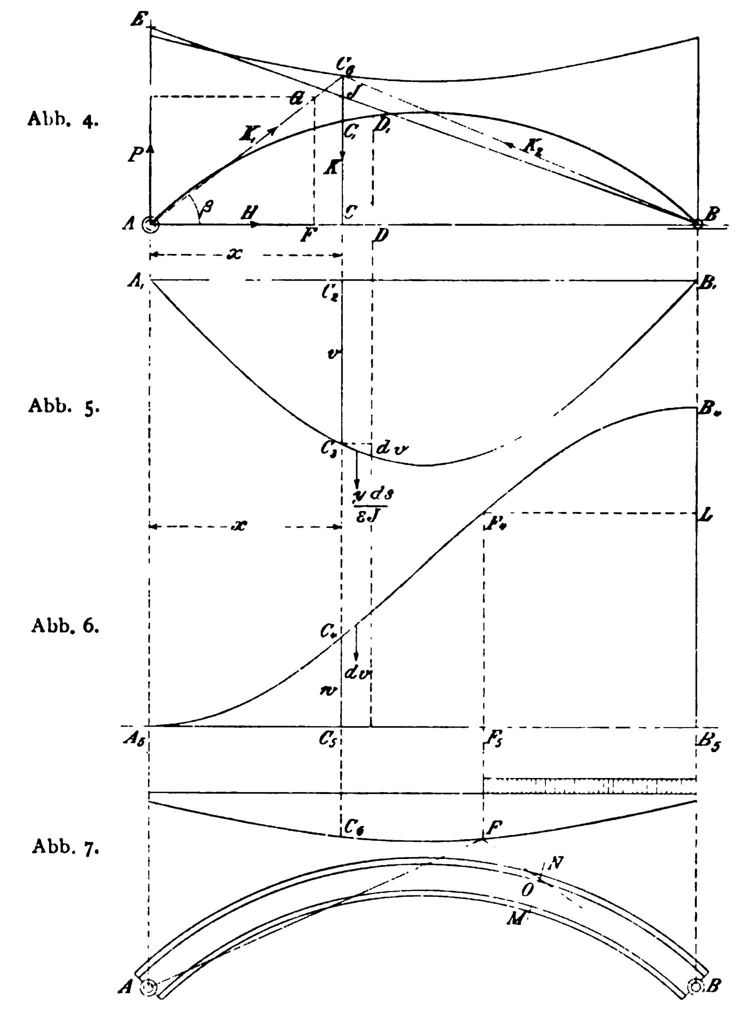
und bestimmen die Verschiebung v, die das bewegliche Gelenk B infolge der hierdurch herbeigeführten Formänderung im Sinne AB erleidet. Es ergibt sich, daß die Verschiebung v proportional der Last K und außerdem nur von den Abmessungen des Trägers und von der Abszisse x der Last K abhängig ist. Die Kurve $A_1C_3B_1$ (Abb. 5),

welche die Beziehung zwischen der Abszisse x und der Ordinate

$$v = C_2 C_3$$

zur Anschauung bringt, kann als *Seilkurve* dargestellt werden.

Wir beseitigen jetzt die Last K und lassen eine ebenso große wagerechte Kraft K im Sinne von B nach A auf das verschiebbare Kämpfergelenk B einwirken. Es zeigt sich, daß die hierdurch



herbeigeführte elastische Verschiebung u des Gelenkes B der Kraft K proportional ist.

Wir lassen ferner gleichzeitig eine lotrechte Last K gleich 1 kg auf den Punkt C_1 des Bogens und einen Horizontalschub H von

unbekannter Größe im Sinne BA auf das Gelenk B einwirken. Wenn hierbei das Gelenk B *keine* Verschiebung erleiden, also seine Lage *nicht* verändern soll, so muß

$$H = \frac{v}{u} K \tag{1}$$

sein; denn die Last K in Verbindung mit ihren lotrechten Auflagerkräften verschiebt das Gelenk B nach außen um die Strecke v, während die Horizontalkraft von der Größe H eine Verschiebung $\frac{H}{K} u$ nach innen bewirkt. Damit beide Verschiebungen einander aufheben, muß

$$v = \frac{H}{K} u$$

sein. Da u eine unveränderliche Strecke bezeichnet, so kann die Ordinate v als graphische Darstellung des Horizontalschubes H gelten, der von einer wandernden Einzellast

$$K = 1 \text{ kg}$$

erzeugt wird. Die Kurve zeigt also den *Einfluß*, den die *Lage* jener Einzellast auf die Größe des von ihr hervorgerufenen Horizontalschubes ausübt, und wird daher die *Einflußkurve* dieses Schubes H genannt.

Nachdem die Strecken v und u bestimmt worden sind, können für jede Lage der Einzellast K Größe und Lage der von ihr erzeugten Kämpferdrücke K_1 und K_2 bestimmt werden; denn die lotrechten Komponenten dieser Drücke werden durch die Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Die drei Kräfte K, K_1, K_2 schneiden sich in *einem* Punkte C_6, weil sie eine Gleichgewichtsgruppe bilden. Der geometrische Ort $C_6 F$ dieses Schnittpunktes (Abb. 7) wird die *Kämpferdrucklinie* genannt. Dieselbe wird in folgender Weise benutzt, um nach (VII, 6) die ungünstigsten Lagen der beweglichen Belastung zu ermitteln. Es sei z. B. die Aufgabe, die beiden Lagen der beweglichen Belastung zu bestimmen, bei denen in dem *unteren* Randpunkte M des Bogenquerschnittes MN die Grenzspannungen hervorgerufen werden. Man zieht zu diesem Zweck die Drucklinie $AFOB$ (Abb. 7) durch den *oberen* Randpunkt O des *Querschnittskernes* und bestimmt hierdurch die Belastungsscheide F; denn für alle Einzellasten, welche *rechts* von F liegen, schneidet die Drucklinie *oberhalb des Punktes* O den Querschnitt. Alle diese Lasten erzeugen in dem Querschnittspunkte M *Zugspannungen*, während die Drucklinien aller Einzellasten *links* von F *unter* O liegen und hier-

durch angeben, daß die von ihnen in M hervorgerufenen Spannungen *Druck*spannungen sind.

Gewöhnlich wird bei solchen Rechnungen angenommen, daß die betreffenden Fahrbahnstrecken *gleichmäßig* belastet sind. Bei Ermittlung der Grenzspannungen der Bogenquerschnitte entsteht dann die Aufgabe, den Horizontalschub H des Bogens zu bestimmen und durch eine Strecke

$$H = C_4 C_5$$

(Abb. 6) graphisch darzustellen, der von einer gleichmäßig verteilten Last kx der Fahrbahnstrecke

$$A_5 C_5 = x$$

hervorgerufen wird. Die Untersuchung zeigt, daß auch diese Kurve $A_5 C_4 F_4 B_4$, welche die Beziehung zwischen H und x darstellt, in einfacher Weise als Seilkurve gebildet werden kann.

Endlich sind die Spannungen des Bogens zu ermitteln, die von Temperaturänderungen und von zufälligen Aendeıungen der Stützweite hervorgerufen werden.

3. Die inneren Kräfte und die Formänderung eines Bogenträgers. Die Formänderung eines Bogenträgers wird herbeigeführt durch die Biegungsmomente, die Normalkräfte und die Schubkräfte, welche von den Trägerquerschnitten aufzunehmen sind. Von diesen drei Ursachen braucht in praktischen Fällen nur die erste berücksichtigt zu werden, weil gegen den Einfluß der Biegungsmomente derjenige der Normal- und der Schubkräfte verschwindet. Man vergleiche hierüber die näheren Angaben in der Abhandlung: *Beitrag zur Theorie der Bogenträger* in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1870, S. 398. Wir setzen ferner voraus, daß die Höhe des Bogenträgers klein ist im Vergleich zum Krümmungshalbmesser der Bogenachse, so daß ein kleines Bogen-

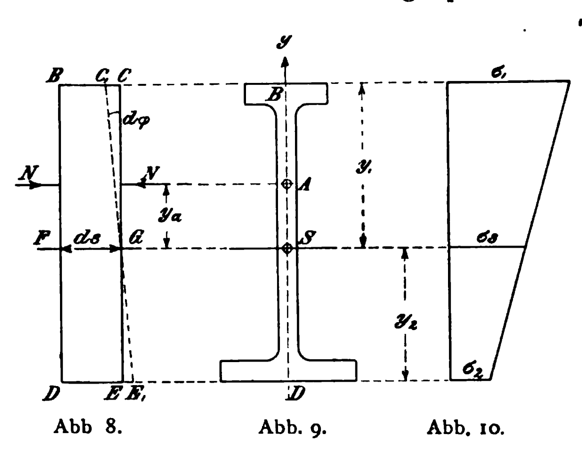


Abb 8. Abb. 9. Abb. 10.

stück $BCED$ (Abb. 8) zwischen zwei benachbarten Querschnitten ohne erheblichen Fehler als ein Prisma angesehen werden kann. Demgemäß kommen die folgenden, aus der Abhandlung VII bekannten Beziehungen zur Anwendung. In Abb. 8 bezeichnen BD und CE zwei Nachbarquerschnitte, die auf der Bogenachse FG das unendlich kleine Stück ds abschneiden. Im Querschnitt (Abb. 9) bezeichnet S den Schwerpunkt und A den Angriffspunkt des resultierenden Normaldruckes N. Der Angriffspunkt A liegt auf der Symmetrieachse y, die nach oben zeigt und in S ihren Anfangspunkt hat; die Ordinate y_a des Punktes A ist also positiv, wenn A *über* S liegt. y_1 und y_2 bezeichnen die positive und die negative Grenzordinate der Querschnittsfläche F, deren Trägheitsradius in bezug auf die wagerechte Schwerpunktsachse mit i bezeichnet wird. Die in Abb. 10 dargestellten Spannungen in dem oberen und dem unteren Randpunkte der Querschnittsfläche und in ihrem Schwerpunkte S werden bestimmt durch die Gleichungen (VII, Gleichung 12)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= -\frac{N}{F} - \frac{y_1 y_a}{i^2}\frac{N}{F}, \\ \sigma_2 &= -\frac{N}{F} - \frac{y_2 y_a}{i^2}\frac{N}{F}, \\ \sigma_s &= -\frac{N}{F}; \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

denn der nach dem Schwerpunkt versetzte Normaldruck N erzeugt die gleichmäßig verteilte Druckspannung $\frac{N}{F}$, während von dem Biegungsmoment

$$M = Ny_a$$

im oberen Randpunkte B des Querschnittes die Druckspannung $\frac{My_1}{i^2}$ und im unteren Randpunkte D die Zugspannung $\frac{My_2}{i^2}$ hervorgerufen wird. Diese Biegungsspannungen haben nach (VIII, 2) zur Folge, daß sich der Bogenquerschnitt CE gegen den Querschnitt BD um einen unendlich kleinen Winkel

$$CGC_1 = d\varphi = \frac{M\,ds}{\varepsilon F i^2} = \frac{M\,ds}{\varepsilon J} \tag{3}$$

dreht. Die Winkel $d\varphi$ bestimmen die hier in Betracht kommenden Formänderungen des Bogenträgers. Wenn der Bogenträger AB (Abb. 11) im Gelenk A gelagert ist, während das Gelenk B auf der

wagerechten Auflagerbahn frei sich verschieben kann, so läßt sich die mit der Formänderung des unendlich kleinen Bogenteils

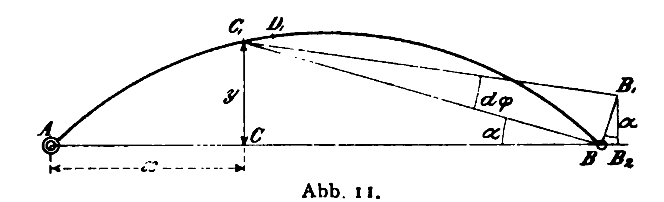


Abb. 11.

$$C_1D_1 = ds$$

verbundene Bewegung aus folgenden zwei Bewegungen zusammensetzen. Bei der *ersten* Bewegung dreht sich der Bogenteil C_1B gegen den ruhenden Bogenteil AC_1 um den unendlich kleinen Winkel

$$BC_1B_1 = d\varphi = \frac{M\,ds}{\varepsilon J},$$

wobei der Punkt B nach B_1 sich verschiebt. Bei der *zweiten* Bewegung, einer Drehung des ganzen Bogens AC_1B um das Gelenk A gelangt B_1 in die Auflagerbahn nach B_2. Da die Dreiecke CC_1B B_2BB_1 geometrisch ähnlich sind, so hat die von der Formänderung des Bogenstückes ds herbeigeführte Verschiebung dv des Gelenkes B die Größe

$$dv = BB_2 = BB_1 \sin\alpha = C_1B\,d\varphi \sin\alpha = \frac{M y\,ds}{\varepsilon J}, \qquad (4)$$

wenn mit y die Ordinate C_1C des Bogenpunktes C_1 in bezug auf die Bogensehne bezeichnet wird. Die Verschiebung besteht in einer Verlängerung oder in einer Verkürzung der Bogensehne AB, je nachdem das Biegungsmoment M positiv oder negativ ist.

4. Graphische Bestimmung der Strecken v. Das graphische Verfahren soll an einem Beispiel erläutert werden, dessen Zahlenwerte nicht einem ausgeführten Bogenträger entnommen sind, sondern mit Rücksicht auf die Deutlichkeit der Zeichnungen willkürlich gewählt wurden. Gegeben ist die Bogenachse, von der eine Hälfte AE_1 durch Abb. 13 im Maßstabe 1 : 600 dargestellt wird. Die Bogensehne hat die Länge:

$$2\,AE = l = 5800 \text{ cm}.$$

Die Bogenhälfte AE_1 ist durch die Punkte B_1, C_1, D_1 in vier mit den Nummern 1, 2, 3, 4 bezeichnete Teile zerlegt. Die folgende Tabelle gibt für diese vier Teile die Längen Δs und die Mittelwerte von εJ und y. Mit Rücksicht auf die Deutlichkeit der

Zeichnungen wurde die Anzahl der Bogenteile sehr klein gewählt; steht mehr Raum zur Verfügung, so empfiehlt es sich, jene Anzahl etwa auf das Doppelte zu vergrößern.

Bogenteil	1	2	3	4
Δs in cm	800	800	800	800
y in cm	260	710	1010	1160
εJ in 10^{12} kg qcm	28	26	24	22
$(1 \text{ kg} \cdot y \, \Delta s)$ in 10^3 kg qcm	208	568	808	928

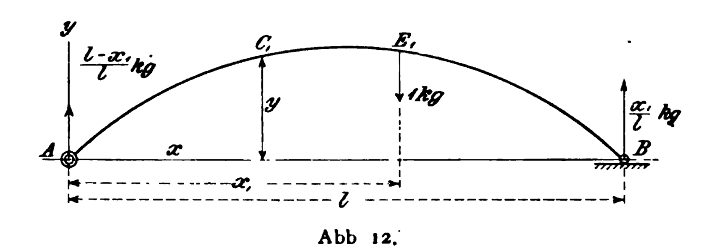


Abb 12.

Wenn der im Gelenke A (Abb. 12) fest und im Gelenke B verschiebbar gelagerte Träger im Punkte E_1 von der Abszisse x_1 mit 1 kg belastet wird, so ist das Biegungsmoment für jeden Bogenquerschnitt von der Abszisse x zwischen A und E_1:

$$M = +1 \text{ kg} \cdot \frac{x(l - x_1)}{l}$$

und für jeden Querschnitt zwischen E_1 und B:

$$M = +1 \text{ kg} \cdot \frac{(l - x)\, x_1}{l}.$$

Diese Belastung erzeugt eine Verlängerung der Bogensehne, die nach Gleichung 4) folgende Größe hat:

$$v = \int_{x=0}^{x=l} \frac{M y \, ds}{\varepsilon J} = 1 \text{ kg} \int_{x=0}^{x=x_1} \frac{x(l - x_1)\, y \, ds}{l \varepsilon J} + 1 \text{ kg} \int_{x=x_1}^{x=l} \frac{x_1 (l - x)\, y \, ds}{l \varepsilon J}. \quad (5)$$

Um die Strecke v graphisch darzustellen, belasten wir einen geraden Balken, der in den Punkten A und B frei unterstützt ist, auf der

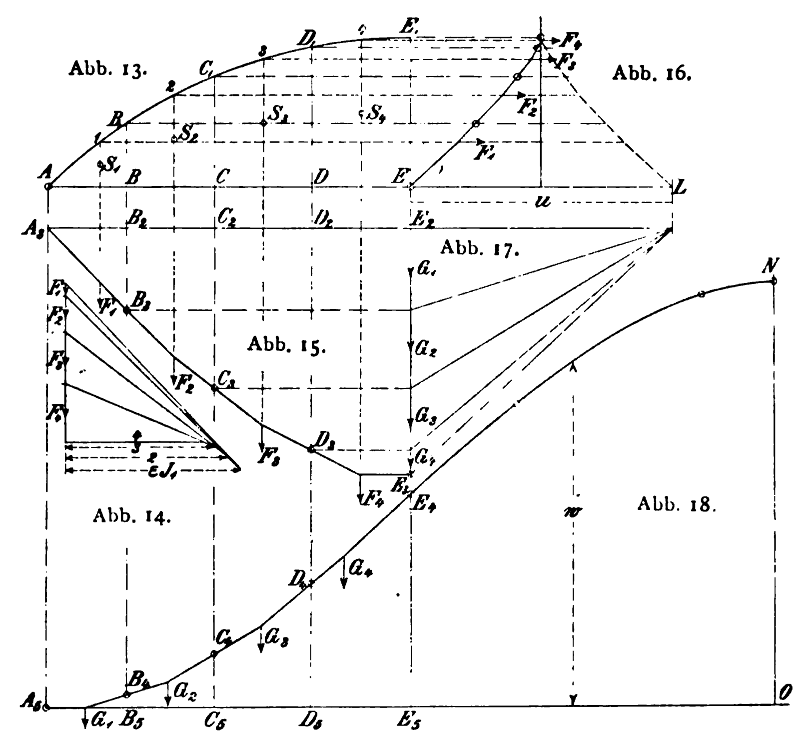
Horizontalprojektion dx eines jeden Bogenelements ds mit einer Last, die für dieses Bogenelement durch die positive Zahl

$$1 \text{ kg} \cdot \frac{y\,ds}{\varepsilon J}$$

dargestellt wird. Diese sämtlichen Zahlenlasten erzeugen in dem Balkenquerschnitt E_1 von der Abszisse x_1 ein Biegungsmoment von der Größe der Strecke $\boldsymbol{v}$. Es ist hierbei zu beachten, daß die Biegungsmomente *Strecken* sind, wenn die Lasten durch ***unbenannte Zahlen*** dargestellt werden. Jede Last von der angegebenen Größe erzeugt in dem Querschnitt E_1 ein Biegungsmoment

$$1 \text{ kg} \cdot \frac{x\,(l - x_1)\,y\,ds}{l\,\varepsilon J} \quad \text{oder} \quad 1 \text{ kg} \cdot \frac{x_1\,(l - x)\,y\,ds}{l\,\varepsilon J},$$

je nachdem die Abszisse x der Last kleiner oder größer ist als die Abszisse x_1 des Balkenquerschnittes E_1. Sämtliche Lasten erzeugen also in dem Querschnitt E_1 die in Gleichung 5) durch die Integrale bezeichnete Biegungsmomentensumme v.



Zur Bestimmung dieser Biegungsmomente wurde in den Abb. 14 und 15 das Seilpolygon $A_3 B_3 C_3 D_3 E_3$ gebildet aus dem

10 000 000 fachen der Lasten $1\,\mathrm{kg}\cdot y\Delta s$ und den Normalkräften εJ für die vier Teile der Bogenhälfte, wie es in der Abhandlung II, 8 beschrieben worden ist. Die Seilkurve mit den Ordinaten v berührt nach II, 10 dieses Seilpolygon in den Punkten A_3, B_3, C_3, D_3, E_3 und ist in bezug auf die lotrechte Mittelachse symmetrisch gestaltet, so daß nur eine Hälfte des Polygons gezeichnet zu werden braucht. Die Kurve wurde nicht eingetragen, um die Zeichnung nicht undeutlich zu machen. Die Lage der Mittelkräfte F oder $1\,\mathrm{kg}\cdot y\,\Delta s$ wird durch die Schwerpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 der Flächenteile ABB_1, BCC_1B_1, CDD_1C_1, DEE_1D_1 bestimmt und kann nach Augenmaß ermittelt werden, wenn die Bogenteile Δs klein genug sind.

Der Maßstab des Kräfteplans Abb. 14 ist $1\,\mathrm{cm} = 12\cdot 10^{12}\,\mathrm{kg\,qcm}$. Da der Längenmaßstab der Abb. 13 1 : 600 ist, so werden die Ordinaten v in Abb. 15 im Maßstabe

$$1\,\mathrm{cm} = \frac{600}{10\,000\,000}\,\mathrm{cm} = 0{,}00006\,\mathrm{cm}$$

dargestellt. Da beispielsweise die Mittelordinate der Seilkurve in Abb. 15

$$E_2E_3 = 3{,}3\,\mathrm{cm}$$

ist, so erzeugt eine Last von 1 kg in der Bogenmitte eine Verlängerung der Bogensehne um

$$v = \frac{3{,}3\cdot 6}{100\,000} = \frac{1}{5000}\,\mathrm{cm}.$$

5. Graphische Bestimmung der Strecke u. Läßt man auf das Gelenk B (Abb. 12) eine Horizontalkraft vom Sinne BA und der Größe 1 kg einwirken, so hat das Biegungsmoment für den Querschnitt von der Abszisse x die Größe $-y\cdot 1\,\mathrm{kg}$. Nach Gleichung 4) bewirken diese Biegungsmomente eine *Verkürzung* der Bogensehne AB von der Größe

$$u = 1\,\mathrm{kg}\int_{x=0}^{x=l}\frac{y^2\,ds}{\varepsilon J}. \tag{6}$$

Auch diese Strecke kann vermittels eines Seilpolygons (Abb. 16) bestimmt werden. Man läßt zu diesem Zweck auf jedes Element ds der Bogenachse eine *Horizontalkraft*

$$F = 1\,\mathrm{kg}\,y\,ds$$

einwirken und bildet die Seilkurve dieser Lasten mit den lotrechten Normalkräften εJ. Der Kräfteplan dieser Seilkurve ist geometrisch

ähnlich dem für die Seilkurve v gebildeten Kräfteplan (Abb. 14) und gegen denselben um 90° gedreht; er braucht daher nicht aufgetragen zu werden. Die Seilkurve (Abb. 16) besteht aus zwei symmetrischen Hälften, von denen daher *eine* genügt. Die Kurve deckt sich mit der Seilkurve, deren wagerechte Lasten durch die positiven Zahlen $\frac{1\,\text{kg} \cdot y\,ds}{\varepsilon J}$ und deren lotrechte Normalkraft durch die Zahl $+1$ dargestellt wird. Die Momentengleichung dieser Kräfte in bezug auf den Punkt E ergibt die Strecke

$$EL \cdot 1 = 1\,\text{kg} \int_{x=0}^{x=l} \frac{y^2\,ds}{\varepsilon J}$$

oder

$$u = EL = 3{,}50\,\text{cm}.$$

Da die Lasten $1\,\text{kg} \cdot y\,ds$ 10 000 000 fach größer aufgetragen wurden als die Normalkräfte εJ, so ist der Maßstab für u wie der für v:

$$1\,\text{cm} = \frac{600\,\text{cm}}{10\,000\,000} = 0{,}00006\,\text{cm}.$$

Ein Horizontalschub von 1 kg verkürzt demnach die Bogensehne AB um

$$u = 3{,}5 \cdot 0{,}00006 = 0{,}00021\,\text{cm}.$$

Nach Gleichung 1) hat der Horizontalschub H, welcher von einer lotrechten Einzellast K hervorgerufen wird, die Größe

$$H = \frac{v}{u} K,$$

wenn v die Ordinate der Seilkurve in dem Lote der Last K bezeichnet. Ist die Einzellast K gleich 1 kg, so wird also der zugehörige Horizontalschub H in jeder Lage der Last gemessen durch die Ordinate v im Maßstabe

$$1\,\text{cm} = \frac{1}{3{,}5}\,\text{kg};$$

denn der obigen Gleichung zufolge wird $H = 1$ kg für

$$v = u = 3{,}5\,\text{cm}.$$

6. Graphische Bestimmung des Horizontalschubes bei zusammengesetzten Belastungen. Besteht die Belastung des Bogenträgers aus einer Reihe von Einzellasten $K_1, K_2, K_3 \ldots$, deren zugehörige Ordinaten v mit $v_1, v_2, v_3 \ldots$ bezeichnet werden, so erhält der Horizontalschub H die Größe

$$H = \frac{v_1}{u} K_1 + \frac{v_2}{u} K_2 + \frac{v_3}{u} K_3 + \ldots = \frac{1}{u} \Sigma\, v\, K. \tag{7}$$

Die Größe $\frac{1}{u} \Sigma\, v\, K$ kann in bekannter Weise vermittels eines Seilpolygons bestimmt werden, was einer weiteren Erläuterung nicht bedarf.

Ist ferner die Belastung $k x_1$ *gleichmäßig verteilt* über die horizontale Strecke von

$$x = 0 \quad \text{bis} \quad x = x_1,$$

so erhält der Horizontalschub die Größe:

$$H = \frac{k}{u} \int_0^{x_1} v\, dx = \frac{k}{u} \left(v_1 x_1 - \int_0^{v_1} x\, dv \right), \tag{8}$$

wenn mit v_1 die Ordinate v für die Abszisse x_1 bezeichnet wird.

Wir belasten ein Seil $A_5 C_4$ von der Normalkraft u auf jeder Strecke dx mit der zugehörigen Strecke dv (Abb. 19) und bilden die Momentengleichung dieser Kräfte für den Punkt C_4 des Seiles von der Abszisse x_1 und der Ordinate w; sie ergibt

$$w\, u = \int_0^{v_1} (x_1 - x)\, dv = x_1 v_1 - \int_0^{v_1} x\, dv.$$

Abb. 19

Demnach ist

$$H = \frac{k}{u}\, w u = k w, \tag{9}$$

d. h. *für jede Länge x_1 der belasteten Strecke wird H graphisch dargestellt durch die Ordinate w.*

Die Seilkurve w ist für das vorliegende Beispiel in Abb. 18 vermittels des Kräfteplans (Abb. 17) gebildet worden; sie berührt das Seilpolygon $G_1 G_2 G_3 G_4$ in den Punkten A_5, B_4, C_4, D_4, E_4. Mit Rücksicht auf die Deutlichkeit der Zeichnung wurde die Kurve nicht eingetragen. Da der Symmetrie wegen die Belastungen der ersten und der zweiten Bogenhälfte gleiche Horizontalschübe erzeugen, so ergibt sich die zweite Kurvenhälfte aus der ersten nach den Regeln der Symmetrie. Im Kräfteplan (Abb. 17) bezeichnen G_1, G_2, G_3, G_4 die Summen der Belastungen dv für die vier Bogenteile 1, 2, 3, 4. Diese Strecken können unmittelbar aus der Seilkurve v in Abb. 15 entnommen werden. Die *Lage* der Lasten G in Abb. 18 ist nach

Augenmaß so zu bestimmen, daß sie mit den Resultanten der Lasten dv für die einzelnen Bogenteile zusammenfallen. Werden die Strecken Δx klein genug gewählt, so *halbieren* die Lasten G diese Strecken.

Bezeichnen w_1 und w_2 die Ordinaten der Seilkurve w für zwei beliebige Abszissen x_1, x_2, so hat der Horizontalschub H, der von der gleichmäßig verteilten Belastung $k\,(x_2 - x_1)$ der Fahrbahnstrecke von x_1 bis x_2 erzeugt wird, offenbar die Größe

$$H = k\,(w_2 - w_1). \tag{10}$$

Diese Formel bestimmt für jede gleichmäßig belastete Fahrbahnstrecke die Größe des zugehörigen Horizontalschubes. Der Maßstab der Ordinaten w stimmt selbstverständlich überein mit dem Maßstab der Trägerzeichnung in Abbildung 13 und ist im vorliegenden Beispiel also 1 : 600. Nach diesem Maßstab ist z. B. die Endordinate der Kurve

$$NO = 33{,}6 \text{ Meter.}$$

Bei gleichmäßiger Belastung der ganzen Brückenfahrbahn z. B. mit 4000 kg auf das laufende Meter oder mit $58 \cdot 4000 = 232\,000$ kg auf den ganzen Träger erhält demnach der Horizontalschub die Größe

$$H = 33{,}6 \cdot 4000 = 134\,400 \text{ kg.}$$

7. Die Kämpferdrucklinie. Eine Einzellast K von der Abszisse x (Abb. 4) erzeugt in dem Gelenke A einen lotrechten Auflagerdruck

$$P = \frac{l - x}{l}\,K$$

und einen Horizontalschub

$$H = \frac{v}{u}\,K \cdot$$

Der resultierende Druck K_1 des Gelenkes A bildet also mit der Horizontalen den Winkel β, der durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{P}{H} = \frac{(l - x)u}{l\,v}$$

bestimmt wird. Trägt man (Abb. 4 und 5)

$$AE = u \quad \text{und} \quad AF = C_2 C_3 = v$$

auf, so wird

$$FG = CJ = \frac{l - x}{l}\,u$$

und folglich

$$\sphericalangle GAF = \beta.$$

Die Gerade AGC_6 bestimmt also einen Punkt C_6 der Kämpferdrucklinie. Es ist hierbei zu berücksichtigen, daß die Abb. 4, 5, 6 aus den Abb. 13, 15, 18 durch Verkleinerung im Verhältnis von 3 zu 4 hervorgegangen sind. Der Längenmaßstab von Abb. 4 ist demnach 1 : 800.

8. **Wirkung einer Aenderung der Stützenlage und einer Temperaturänderung.** Die Länge z der Bogensehne AB des gewichtslosen und spannungslosen Bogenträgers stimmt in der Regel nicht genau überein mit der Stützweite l, d. h. dem Abstande der beiden Kämpfergelenke A und B voneinander. Infolgedessen erleidet der gewichtslose und unbelastete Träger von den Kämpfergelenken einen Horizontal*schub* von der Größe

$$\frac{z - l}{u}\ \text{kg}.$$

Ist

$$z < l,$$

so übertragen die Kämpfergelenke horizontale *Zug*kräfte von der Größe

$$\frac{l - z}{u}\ \text{kg}$$

auf den Träger. Diese Kräfte können also nur bestimmt werden, wenn beide Strecken z und l genau bekannt sind, was in der Regel nicht der Fall ist.

Erhöht sich die Temperatur des Trägers um 1 Grad Celsius, so vergrößert sich z und folglich auch $(z - l)$ um $\frac{1}{80000}\,z$. Diese Aenderung hat zur Folge, daß sich der Horizontalschub um

$$\frac{z}{80\,000\,u}\ \text{kg},$$

im vorliegenden Beispiel also um

$$\frac{5800}{80\,000 \cdot 0{,}00021} = 345\ \text{kg}$$

vergrößert.

Vergrößert sich der Gelenkabstand l z. B. durch Ausweichen oder Zusammendrücken der Widerlager um 1 cm, so ändert sich

$(z - l)$ um -1 cm, und der Horizontalschub des Trägers *vermindert* sich infolgedessen um

$$\frac{1 \text{ cm}}{u} \text{ kg},$$

im vorliegenden Beispiel um

$$\frac{1}{0{,}00021} = 4760 \text{ kg}.$$

9. Literarische Notiz. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung wurde entnommen *dem Beitrage zur Theorie der elastischen Bogenträger;* Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1870, Heft 4. In betreff der Literatur des Gegenstandes verweisen wir auf das *Handbuch der Ingenieurwissenschaften,* Bd. II: Der Brückenbau.

Abhandlung XI.

Das ebene Fachwerk.

1. Erklärungen. Mit Fachwerk soll im folgenden ein Träger bezeichnet werden, der aus Stäben zusammengesetzt und so gestützt ist, daß eine Aenderung der Form und der Lage des Trägers nur durch Längenänderungen der Stäbe herbeigeführt werden kann. Wenn die Stäbe und die äußeren Kräfte, d. h. die Lasten und die Stützkräfte, alle in *einer* Ebene liegen, so heißt der Träger ein *ebenes* Fachwerk, im anderen Falle ein *Raumfachwerk*. In dieser Abhandlung ist nur von ebenen Fachwerken die Rede.

Die Punkte, in welchen die Stäbe durch *reibungslose Gelenke* miteinander verbunden sind, heißen die *Knoten* des Fachwerks.

Die Art der Stützung eines Knotens kann zur Anschauung gebracht werden, indem man zum Fachwerk *Stützstäbe* hinzufügt, die den gestützten Knoten entweder mit *zwei* oder mit *einem* festen Punkt der Ebene verbinden. Im ersten Falle wird eine *feste*, im zweiten eine *verschiebbare* Stütze gebildet. Ein Fachwerk mit *einer* festen und *einer* verschiebbaren Stütze wird ein *Balkenfachwerk* genannt. Ein *kontinuierliches* Balkenfachwerk hat *eine* feste und mehrere verschiebbare Stützen; ein *Bogen*fachwerk hat mehr als *eine* feste Stütze. Die Stützstäbe übertragen die *Stützkräfte* auf das Fachwerk und auf das Fundament. In der Zeichnung werden die Knoten durch einfache Kreise, die festen Punkte durch Doppelkreise dargestellt. *Die letzteren werden nicht zu den Knoten gezählt.*

Es ist unvorteilhaft, den *Biegungs*widerstand der Stäbe in Anspruch zu nehmen, weil die Biegungsspannungen sich ungleichmäßig über den Stabquerschnitt verteilen und daher eine volle Ausnutzung der Festigkeit nicht zulassen. Aus diesem Grunde werden die Lasten des Fachwerks nicht unmittelbar von den Stäben aufgenommen, sondern durch Zwischenträger auf die Knoten übertragen. Zu demselben Zweck legt man die Achse eines jeden Knotengelenkes durch

den gemeinschaftlichen Schnittpunkt der Stabachsen. Infolgedessen haben die Fachwerkstäbe nur Zug- oder Druckkräfte zu übertragen, welche sich *gleichmäßig* über die Stabquerschnitte verteilen. Hierauf beruht der Hauptvorteil des Fachwerks im Vergleich mit anderen Trägern. Die biegende Wirkung des *Eigen*gewichtes der Stäbe kann ihrer Kleinheit wegen in der Regel vernachlässigt werden, indem man das Gewicht eines jeden Stabes auf seine beiden Knoten verteilt und als Knotenlast mit in Rechnung bringt.

2. Die Hauptgleichung der Theorie des Fachwerks. Auf die Knoten des ebenen Fachwerks (Abb. 1) mögen die äußeren Kräfte K_1, K_2, K_3 ... einwirken. *In Verbindung mit irgendwelchen anderen Ursachen* erzeugen dieselben die unbekannten Stabkräfte S_1, S_2, S_3 . . ., welche den aus jedem Stab herausgeschnittenen Teil ersetzen und als *Zug*spannungen mit dem *positiven* Vorzeichen in Rechnung gestellt werden. Jedem Knoten A soll in der Fachwerksebene irgend eine durch denselben gehende Gerade und auf dieser eine unendlich kleine Strecke AA_1 beigelegt werden. Für die Kräftegruppe eines jeden Knotens A bilde man die Gleichgewichtsbedingung, welche ausdrückt, daß die algebraische Summe der Projektionen der Kräfte auf die dem Knoten beigelegte Gerade im Sinne der Strecke AA_1 gleich null ist; man multipliziere alle Glieder der Gleichung mit der Länge der Strecke AA_1 und summiere darauf sämtliche Gleichungen. In der hierdurch entstehenden Gleichgewichtsbedingung kommt jede der Kräfte K nur *einmal*, jede Stabkraft S dagegen *zweimal* vor. Die Glieder mit den Kräften K nehmen die Form an:

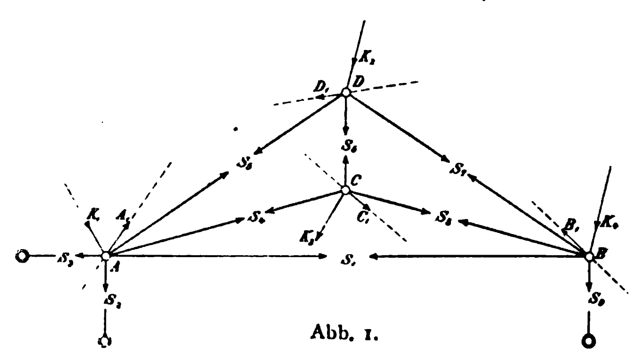


Abb. 1.

$$K_1\, dw_1 + K_2\, dw_2 + K_3\, dw_3 + \ldots = \Sigma\, K\, dw,$$

wenn z. B. mit dw_1 die Projektion der Strecke AA_1 auf die Richtung der vom Knoten A aufzunehmenden Kraft K_1 im Sinne dieser Kraft bezeichnet wird.

Die beiden Glieder, welche dieselbe Stabkraft S_1 enthalten, können zusammengefaßt werden. Bezeichnet man die Länge des betreffenden Stabes AB mit l_1 und die Strecke A_1B_1 zwischen den Endpunkten der beiden den Knoten A und B beigelegten Strecken AA_1, BB_1 mit $l_1 + dl_1$, so ist die Summe der beiden Glieder mit S_1 (Abb. 2)

$S_1(AA_2 + BB_2) = S_1(AB - A_2B_2) = S_1(AB - A_1B_1) = -S_1\,dl_1.$

Die Länge A_1B_1 darf ihrer Projektion A_2B_2 gleichgesetzt werden, weil diese beiden Strecken einen unendlich kleinen Winkel einschließen und daher nur um eine unendlich kleine Größe *zweiter* Ordnung voneinander abweichen.

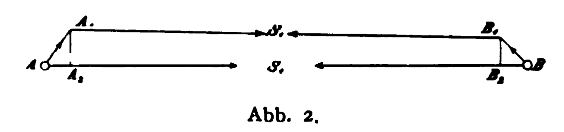


Abb. 2.

Die Glieder mit den Stabkräften S erhalten also die Form

$$-S_1\,dl_1 - S_2\,dl_2 - S_3\,dl_3 - \ldots = -\Sigma S\,dl.$$

Die resultierende Gleichung

$$\Sigma K\,dw - \Sigma S\,dl = 0 \qquad (1)$$

hätte auch unmittelbar aus dem ***Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten*** abgeleitet werden können; sie spricht aus, daß bei ***jeder*** unendlich kleinen Verschiebung der frei beweglichen Knoten die Summe der Arbeiten der Kräfte K und S gleich null ist.

Die Gleichung* 1) *umfaßt nicht nur alle Bedingungen des Gleichgewichtes der äußeren, sowie der äußeren und inneren Kräfte, sondern auch alle Beziehungen, die bei den Formänderungen des Fachwerks in Betracht kommen; sie darf daher als die Hauptgleichung der Theorie des Fachwerks bezeichnet werden.

Wenn man alle Glieder der Gleichung durch die Zeitdauer dt der unendlich kleinen Bewegung dividiert und ihr hierdurch die Form

$$\Sigma S \frac{dl}{dt} = \Sigma K \frac{dw}{dt} \qquad (2)$$

gibt, so bezeichnet z. B. $\frac{dw_1}{dt}$ die *Schubgeschwindigkeit* der Kraft K_1, während $\frac{dl_1}{dt}$ die *Dehnungsgeschwindigkeit* der Stabstrecke l_1 angibt. Die Gleichung spricht aus, daß bei jeder unendlich kleinen Bewegung der Knoten die *Arbeitsgeschwindigkeiten* der Kräfte S und K die Summe null haben.

Man kann ferner die Verschiebung eines jeden Knotens zerlegen in zwei Verschiebungen dx, dy parallel zu den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems, ebenso jede Knotenlast K in zwei Lasten K_x, K_y von diesen Richtungen. Da die Arbeit $K\,dw$ der Kraft K gleich ist der Summe der beiden Arbeiten $K_x\,dx$ und $K_y\,dy$ ihrer Komponenten, so kann man der Gleichung auch die Form geben:

$$\Sigma\, S\, dl = \Sigma\, K_x\, dx + \Sigma\, K_y\, dy. \qquad (3)$$

In dieser Gleichung bezeichnen dx und dy also die *willkürlich gewählten* unendlich kleinen Verschiebungen der Knoten in den Richtungen der beiden Koordinatenachsen.

3. Einfache und zusammengesetzte Fachwerke. Nach Anleitung der vorstehenden Gleichungen kann eine unendlich große Anzahl von Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Lasten K und den Stabkräften S gebildet werden; es kommt daher zunächst in Frage, *wie groß die Anzahl der voneinander unabhängigen Bedingungen ist.* Die auf *einen* Knoten wirkenden Kräfte K und S befinden sich im Gleichgewicht, wenn die Summen ihrer Projektionen für die beiden Koordinatenachsen gleich null sind. Indem man für jeden der k Knoten des Fachwerks diese zwei Bedingungen bildet, entstehen $2\,k$ Gleichungen, von denen alle anderen Gleichgewichtsbedingungen abhängig sind; denn befindet sich jeder der k Knoten im Gleichgewicht, so ist dies auch der Fall für jede Gruppe von Knoten und für ihre Gesamtheit. *Für ein Fachwerk von k Knoten können daher nicht mehr als $2\,k$ voneinander unabhängige Gleichgewichtsbedingungen gebildet werden.*

Man nennt ein Fachwerk ein *einfaches Fachwerk*, wenn die Gleichgewichtsbedingungen bei jeder Belastung für die Stabkräfte bestimmte endliche Werte ergeben. *Ein einfaches Fachwerk mit k Knoten enthält daher mit Einschluß der Stützstäbe $2\,k$ Stäbe.*

Um k Knoten mit festen Stützpunkten starr zu verbinden, sind $2k$ starre Stäbe erforderlich. Ein einfaches Fachwerk enthält daher *nur* die Stäbe, welche zur starren Verbindung seiner Knoten miteinander und mit den Stützpunkten *notwendig* sind. Um k_1 Knoten *miteinander* starr zu verbinden, sind $(2\,k_1 - 3)$ Stäbe erforderlich. Jeder Teil eines einfachen Fachwerks, welcher k_1 Knoten und keine Stützpunkte enthält, darf also nicht mehr als $(2\,k_1 - 3)$ Stäbe enthalten.

Die $2\,k$ Gleichgewichtsbedingungen sind *nicht unabhängig* voneinander, wenn die unendlich kleinen Verschiebungen der Knoten so

gewählt werden können, daß *alle* Längenänderungen dl der $2k$ Stabstrecken gleich null werden; denn in einem solchen Falle ergibt Gleichung 3) eine Gleichgewichtsbedingung von der Form

$$0 = \Sigma K_x dx + \Sigma K_y dy, \tag{4}$$

in der dx, dy *bestimmte* unendlich kleine Verschiebungen der Knoten bezeichnen. In einem solchen Falle ist also das Gleichgewicht des Fachwerks mit endlichen Stabkräften nicht bei *allen* Belastungen, sondern nur dann möglich, wenn die Lasten K die durch Gleichung 4) ausgedrückte Bedingung erfüllen. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, so ergibt Gleichung 3) *unendlich große* Stabkräfte S. Beseitigt man alle Lasten K, so bleibt eine Gleichgewichtsbedingung von der Form:

$$\Sigma S \cdot 0 = 0$$

bestehen; sie gibt an, daß eine solche Stabverbindung, auch wenn sie unbelastet ist, Stabkräfte von unbestimmbarer Größe

$$S = \frac{0}{0}$$

aufzunehmen imstande ist.

Man kann durch Bildung des Geschwindigkeitsplans sich davon überzeugen, ob der beschriebene Ausnahmefall vorliegt, wie im Abschnitt 5 an einem Beispiel gezeigt wird.

Liegt der Ausnahmefall nicht vor, so sind die $2k$ Gleichgewichtsbedingungen unabhängig voneinander und ergeben für die $2k$ Stabkräfte des einfachen Fachwerks bei jeder Belastung besimmte endliche Werte.

Ein Fachwerk wird ein *zusammengesetztes Fachwerk genannt, wenn es mehr als die $2k$ notwendigen Stäbe enthält.* Die Stabkräfte eines zusammengesetzten Fachwerks können durch die Gleichgewichtsbedingungen allein nicht bestimmt werden, weil die Zahl der unbekannten Stabkräfte größer ist als die Zahl der voneinander unabhängigen Gleichungen. Man nennt daher solche Fachwerke auch *statisch unbestimmt* im Gegensatz zu den einfachen Fachwerken, die *statisch bestimmt* genannt werden. Gegen diese Bezeichnungen ist nur einzuwenden, daß die Bestimmtheit sich nicht auf das Fachwerk, sondern auf die Berechnung der Stabkräfte bezieht.

Der wesentliche Unterschied zwischen beiden Arten von Fachwerken besteht demnach darin, daß die Stabkräfte des einfachen Fachwerks *nur* von den Lasten abhängig und durch diese vollkommen bestimmt sind, während bei dem zusammengesetzten Fachwerk noch andere Einflüsse, insbesondere die Temperaturänderungen

und die Aenderungen der Stützenlage in Betracht kommen, die auch im *unbelasteten* Träger Spannungen hervorrufen können.

4. Anwendung des Geschwindigkeitsplans bei Berechnung der Stabkräfte eines einfachen Fachwerks. Wenn nicht aus jedem Stabe des Fachwerks, sondern nur aus einem einzigen Stabe DF (Abb. 3) ein Stück herausgeschnitten wird, so verwandelt sich das Fachwerk in ein *zwangläufiges Getriebe*, das also nur *eine* unendlich kleine Bewegung ausführen kann (vergl. IV, 10 und IV, 30). Der Geschwindigkeitsplan dieser Bewegung bestimmt die Schubgeschwindigkeit $\frac{dw}{dt}$ einer jeden Last K und die Dehnungsgeschwindigkeit $\frac{dl}{dt}$ der durchschnittenen Stabstrecke DF. Da für alle anderen Stäbe die Dehnungsgeschwindigkeit gleich null ist, so ergibt Gleichung 2) die Stabkraft S des durchschnittenen Stabes DF als Funktion aller Lasten in der Form:

$$S = \frac{1}{\frac{dl}{dt}} \Sigma K \frac{dw}{dt}. \qquad (5)$$

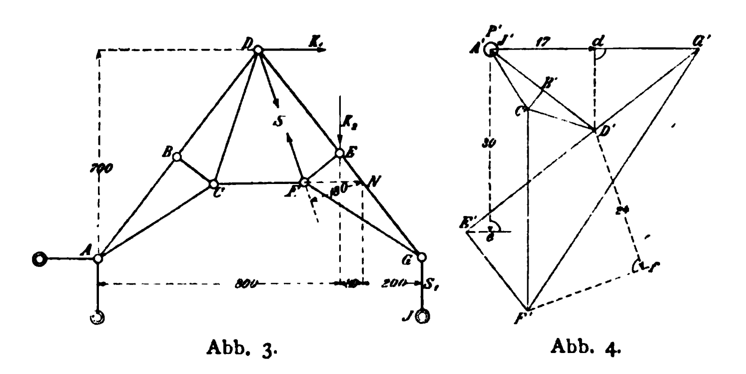


Abb. 3. Abb. 4.

Beispiel 1. Es ist die Stabkraft S des Stabes DF im Fachwerk Abb. 3 zu berechnen. Der Maßstab des Fachwerks ist 1 : 250; der Maßstab des Geschwindigkeitsplans (Abb. 4) kann nach Belieben gewählt werden, weil nur die *Verhältnisse* der Geschwindigkeiten in Betracht kommen; die in Abb. 4 eingeschriebenen Zahlen beziehen sich auf den Maßstab 1 cm gleich 12,5 cm sek^{-1}. Die Bildung des Geschwindigkeitsplans darf hier als bekannt vorausgesetzt werden, da sie in der Abhandlung IV ausführlich beschrieben worden ist. Es dürften daher folgende Angaben genügen. Man zieht vom

Pol P', mit dem die Punkte J' und A' zusammenfallen, die Strecke

$$J'G' \perp JG$$

von beliebiger Länge. Dann ist aufzutragen:

$$G'D'E' \perp GDE, \quad A'B'D' \perp ABD, \quad A'B'D'C' \approx ABDC,$$
$$C'F' \perp CF, \quad G'F' \perp GF, \quad G'F'E' \approx GFE.$$

Die Dehnungsgeschwindigkeit $\frac{dl}{dt}$ der Stabstrecke DF wird durch die Projektion $D'f$ der Strecke $D'F'$ auf die Richtung DF dargestellt, und ihre Größe

$$\frac{dl}{dt} = D'f = + 24 \text{ cm sek}^{-1}$$

ist positiv, weil die Strecke $D'f$ den Sinn DF hat. Von den Belastungen der Knoten ist, um die Zeichnung nicht mit Linien zu überladen, nur die wagerechte Last K_1 des Knotens D und die lotrechte Last K_2 des Knotens E eingetragen worden. Für diese beiden Lasten haben die Schubgeschwindigkeiten die Größen

$$\frac{dw_1}{dt} = P'd = + 17 \text{ cm sek}^{-1}$$

und

$$\frac{dw_2}{dt} = P'e = + 30 \text{ cm sek}^{-1}.$$

Daher ist nach Gleichung 5):

$$S = \frac{17}{24} K_1 + \frac{30}{24} K_2 = 0{,}71\, K_1 + 1{,}25\, K_2.$$

Beispiel 2. Die Stabkraft des Stabes DE im Bogenfachwerk Abb. 5. Der Maßstab des Fachwerks ist 1 : 400, der des Geschwindigkeitsplans 1 cm $=$ 10 cm sek^{-1}. Um den Geschwindigkeitsplan (Abb. 6) des durch Zerschneiden des Stabes DE entstehenden Getriebes zu bilden, ist von dem mit den Punkten A' und O' zusammenfallenden Pol P' in beliebiger Länge die Strecke

$$A'B' \perp AB$$

zu ziehen und dann aufzutragen:

$$A'B'C'D' \approx ABCD, \quad gC'E' \perp CE, \quad gD'F' \perp DF;$$

ferner von irgend einem Punkt e_1 der Geraden $C'E'$:

$$e_1 f_1 \perp EF, \quad e_1 f_1 g_1 \approx EFG.$$

Man bestimmt dann (vergl. IV, 2) den Punkt G' durch die Geraden $g g_1 G'$ und

$$O'G' \perp OG;$$

ferner die Punkte E', F' durch die Geraden:

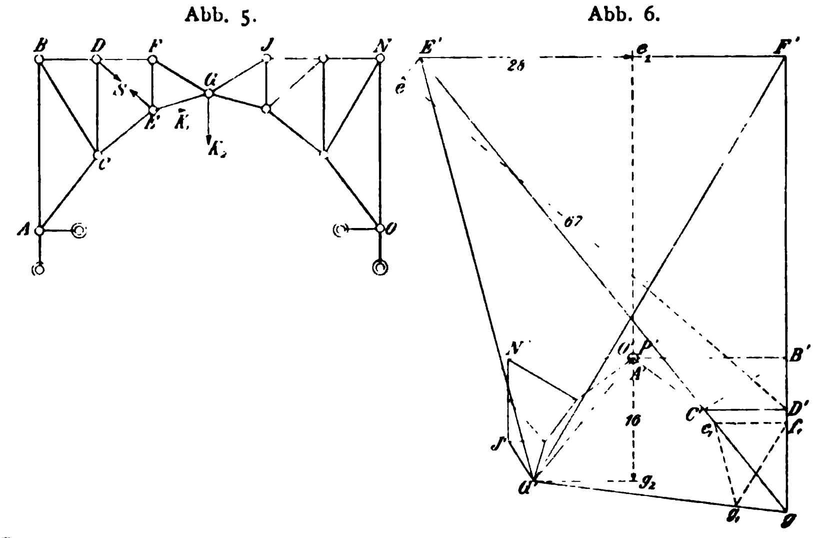
$$G'E' \perp GE, \quad G'F' \perp GF.$$

Schließlich ist

$$G'J'N'O' \approx GJNO$$

aufzutragen.

Die Dehnungsgeschwindigkeit der Stabstrecke DE des durchschnittenen Stabes wird dargestellt durch die Projektion $D'e$ der



Strecke $D'E'$ auf die Richtung des Stabes DE; sie ist im vorliegenden Fall negativ, weil $D'e$ den Sinn ED hat:

$$\frac{dl}{dt} = -D'e = -67 \text{ cm sek}^{-1}.$$

Auch in diesem Beispiel sind nur zwei Lasten eingetragen worden: die wagerechte Last K_1 des Knotens E und die lotrechte Last K_2 des Knotens G. Die Schubgeschwindigkeiten dieser beiden Kräfte haben die Größen:

$$\frac{dw_1}{dt} = e_1 E' = -28 \text{ cm sek}^{-1}$$

und

$$\frac{dw_2}{dt} = P'g_2 = +16 \text{ cm sek}^{-1}.$$

Erstere ist negativ, weil die Projektion $e_1 E'$ der Geschwindigkeit $P'E'$ des Knotens E dem Sinne der Kraft K_1 entgegengesetzt ist. Die von den beiden Lasten erzeugte Stabkraft hat daher die Größe:

$$S = +\frac{28}{67} K_1 - \frac{16}{67} K_2.$$

5. Beispiel eines Ausnahmefalles. Die in Abb. 7 dargestellte Stabverbindung entspricht den äußeren Kennzeichen eines einfachen Balkenfachwerks: sie hat eine feste und eine bewegliche

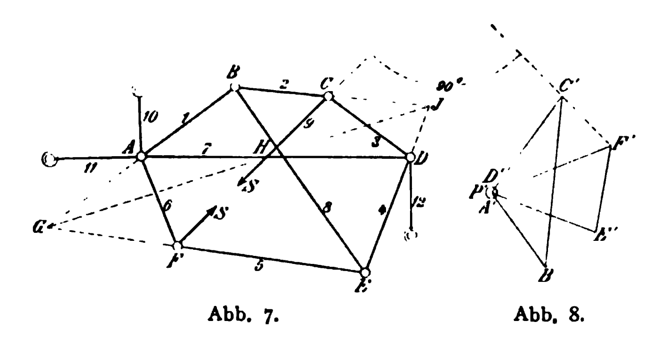


Abb. 7. Abb. 8.

Stütze, sechs Knoten und zwölf Stäbe. Durchschneidet man den Stab CF, so entsteht ein zwangläufiges Getriebe, dessen Geschwindigkeitsplan in Abb. 8 dargestellt ist. Mit dem Pol P' fallen die Punkte A' und D' zusammen. Die Strecke

$$A'B' \perp AB$$

hat eine willkürlich gewählte Länge. Der Geschwindigkeitsplan entsteht, indem man

$$D'C' \perp DC, \quad B'C' \perp BC, \quad D'E' \perp DE, \quad B'E' \perp BE,$$
$$A'F' \perp AF, \quad E'F' \perp EF$$

aufträgt. Im vorliegenden Beispiel ist nun zufällig

$$C'F' \perp CF,$$

d. h. die Dehnungsgeschwindigkeit $\frac{dl}{dt}$ der Stabstrecke CF des durchschnittenen Stabes ist gleich null, und Gleichung 5) erhält infolgedessen die Form:

$$S = \frac{\Sigma K \frac{dw}{dt}}{0}.$$

Die Stabkraft S des Stabes CF wird also *unendlich groß* für jede Last, deren Arbeitsgeschwindigkeit nicht gleich null ist, und sie wird *unbestimmt*, wenn jene Arbeitsgeschwindigkeit die Größe null hat, z. B. wenn gar keine Lasten vorhanden sind.

Die Möglichkeit der *unendlich kleinen* Bewegung des Getriebes bleibt bestehen, auch wenn der Stab CF *nicht* durchschnitten wird, weil der Stab bei dieser Bewegung seine Länge nicht ändert. Bei

einer *endlichen* Bewegung des Getriebes ändert sich die Länge l der Stabstrecke CF, und die Gleichung

$$\frac{dl}{dt} = 0$$

zeigt also an, daß die Strecke l in der durch Abb. 7 dargestellten Lage des Getriebes entweder *ein Maximum oder ein Minimum ihrer Länge erreicht.* Ein anderes Kennzeichen dieses Zustandes ergibt sich, wie schon oben bemerkt wurde, aus dem Umstande, daß auch das *unbelastete* Stabwerk imstande ist, Stabkräfte aufzunehmen. Diese Kräfte sind unbestimmbar: *eine* derselben kann *nach Belieben* gewählt werden, dann ergeben sich die anderen aus den Gleichgewichtsbedingungen. Im vorliegenden Falle können Gleichgewichtsgruppen gebildet werden aus den vier Stabkräften der Stäbe

(1, 5, 7, 9), (2, 4, 7, 9), (1, 3, 8, 9),
(4, 6, 8, 9), (2, 6, 7, 8), (3, 5, 7, 8).

Daher liegen z. B. die drei Schnittpunkte G, H, J der Stabpaare (1, 5), (7, 9), (2, 4) in einer Geraden, was als Kennzeichen des Ausnahmefalles benutzt werden kann. Stabverbindungen von der Art des vorliegenden Beispiels sind nicht imstande, Lasten zu tragen, und dürfen daher nicht als *Fachwerke* bezeichnet werden. Auch vermeidet man selbstverständlich Fachwerksformen, welche solchen Ausnahmefällen sich nähern, weil es unvorteilhaft ist, wenn *kleine* Lasten *große* Stabkräfte hervorrufen können.

6. Anwendung von Momentengleichungen bei Berechnung der Stabkräfte einfacher Fachwerke. Das im Abschnitt 4 beschriebene Verfahren ist nur in seltenen Fällen zweckmäßig, weil die Bildung der Geschwindigkeitspläne zu umständlich und zeitraubend ist. Man kann das Auftragen jener Pläne umgehen, *indem man die Bewegung des Getriebes in einzelne Drehbewegungen zerlegt und die hierbei geleisteten Arbeiten durch Rechnung bestimmt.*

Beispiel. Die unendlich kleine Bewegung des in Abb. 3 dargestellten Getriebes kann in zwei einfachere Bewegungen zerlegt werden. Die *erste* Bewegung besteht in einer unendlich kleinen Drehung des ganzen Fachwerks um den Knoten A; sie wird ermöglicht, indem man den Stab GJ durchschneidet. Bei dieser Drehung leisten die Kräfte K_1, K_2 und die Stabkraft S_1 des durchschnittenen Stabes GJ Arbeit. Bezeichnet M_1 das *statische Moment* der drei arbeitenden Kräfte in bezug auf den Drehpunkt A und φ_1 den unendlich kleinen Drehwinkel, so ist $M_1 \varphi_1$ die Arbeitsumme. Die *zweite* Bewegung besteht in einer unendlich kleinen Drehung φ_2

des Fachwerksteils EFG um den Schnittpunkt N der beiden Stäbe CF und DE. Hierbei leisten die auf den genannten Fachwerksteil wirkenden Kräfte K_2, S, S_1 die Arbeit $M_2 \varphi_2$, wenn mit M_2 das *statische Moment* jener Kräfte in bezug auf den Drehpunkt N bezeichnet wird. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ist die Summe dieser Arbeiten gleich null:

$$M_1 \varphi_1 + M_2 \varphi_2 = 0. \qquad (6)$$

Indem man die Momentenarme aus der Zeichnung abgreift, erhält man:

$$M_1 = 700\, K_1 + 800\, K_2 + 1080\, S_1$$
$$M_2 = -\,80\, K_2 + 200\, S_1 + 180\, S.$$

Die Bewegung des Getriebes entsteht nun, wenn man die unendlich kleinen Drehwinkel φ_1, φ_2 so wählt, daß aus der Arbeitsumme das Glied mit S_1 verschwindet. Setzt man demgemäß

$$\varphi_1 : \varphi_2 = -\,10 : +54,$$

so erhält die einzige Unbekannte S in Gleichung 6) den Wert:

$$S = 0{,}72\, K_1 + 1{,}27\, K_2,$$

was mit dem Ergebnis desselben Beispiels im Abschnitt 4 übereinstimmt. Zu demselben Ergebnis gelangt man offenbar, indem man

$$\varphi_1 = \varphi_2 = +1$$

und

$$M_1 = M_2 = 0$$

setzt; denn auch hierdurch wird die Bedingung der Gleichung 6) erfüllt.

Auf diesem Wege entsteht das sogenannte *Momentenverfahren*: Man bildet durch Zerschneiden einzelner Stäbe einen frei beweglichen Fachwerksteil und bestimmt die Stabkräfte der durchschnittenen Stäbe durch Momentengleichungen. Die Wahl der zu durchschneidenden Stäbe, die Wahl der Dreh- oder Momentenpunkte und die Reihenfolge der Momentengleichungen sind, wenn möglich, so anzuordnen, daß in jeder Gleichung nur *eine* unbekannte Stabkraft vorkommt. In dem vorliegenden Beispiel enthält die Gleichung

$$M_1 = 0$$

nur die unbekannte Stabkraft S_1, und nachdem diese Stabkraft bestimmt worden ist, enthält die Gleichung

$$M_2 = 0$$

nur die unbekannte Stabkraft S.

In manchen Fällen liegt der zu wählende Momentenpunkt unendlich fern; dann verwandelt sich die Drehung des Fachwerksteils

in eine Parallelverschiebung und die Momentengleichung in eine Projektionsgleichung, welche ausdrückt, daß die algebraische Summe der Projektionen aller auf den Fachwerksteil einwirkenden Kräfte in bezug auf die Verschiebungsrichtung gleich null sein muß.

Wenn die bezeichnete Anordnung der Rechnung *nicht* ausführbar ist, so zerlegt man die $2k$ Stäbe des Fachwerks in zwei Gruppen. Die Stabkräfte der *ersten* Gruppe werden als *unbekannte Belastungen* des Fachwerks in die Rechnung eingeführt. Die k_1 Stäbe dieser Gruppe sind in *möglichst geringer Anzahl* so auszuwählen, daß es möglich wird, durch jede der $2k$ Gleichgewichtsbedingungen eine zur *zweiten* Gruppe gehörende Stabkraft ohne weiteres, d. h. ohne Verbindung mit anderen Gleichungen als Funktion der Lasten mit Einschluß der oben bezeichneten unbekannten *Stablasten* darzustellen. Da die zweite Gruppe nur $2k - k_1$ Stäbe enthält, so werden auf dem bezeichneten Wege k_1 Stabkräfte durch je *zwei* Gleichungen bestimmt. Indem man diese beiden Werte einander gleichsetzt, ergeben sich k_1 Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Stablasten, d. h. der Stabkräfte der *ersten* Gruppe. Als Beispiel kann Abb. 7 dienen, wenn angenommen wird, daß nicht der Ausnahmefall vorliegt. Betrachtet man z. B. den Stab 9 als Laststab, führt also die beiden Stabkräfte S_9 als Belastungen der Knoten C und F ein, die zu den übrigen, nicht in die Zeichnung eingetragenen Knotenlasten K hinzutreten, so ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen der Knoten C, F, B, E, D, A in dieser Reihenfolge die Stabkräfte der Stäbe (2, 3), (5, 6), (1, 8), (4, 5), (7, 12), (10, 11). Man bestimmt also die Stabkraft S_5 *zwei*mal als Funktion der Stablast S_9 und erhält durch Gleichsetzen der beiden Werte die Unbekannte S_9 als Funktion der gegebenen Knotenlasten K. Es wird selten nötig, mehr als *eine* Stablast einzuführen.

7. Graphische Bestimmung der Stabkräfte eines einfachen Fachwerks, dessen Lasten nach Größe und Richtung gegeben sind. In der Regel sind die Lasten eines Fachwerks zwischen gegebenen Grenzen *veränderlich*. Um die Grenzwerte, zwischen welchen jede Stabkraft sich verändern kann, zu bestimmen, ist es also nötig, zunächst die Stabkraft als Funktion aller Lasten darzustellen. Wenn auch die *Richtung* der Lasten sich verändern kann, so muß für jeden Knoten eine wagerechte und eine lotrechte Last in die Rechnung eingeführt werden. Der Fall, in welchem alle Lasten des Fachwerks von vornherein gegeben sind, ist demnach verhältnismäßig selten; er tritt beispielsweise ein, wenn nur lotrechte

Lasten zu berücksichtigen sind, und wenn alle Stabkräfte oder wenigstens ein Teil derselben bei der größten Belastung ihre Maximalwerte erreichen. In solchen Fällen kann das folgende graphische Verfahren angewandt werden: Man bildet die Kräftepolygone für die Gleichgewichtsgruppen der einzelnen Knoten in einer solchen Reihenfolge, daß in jedem Polygon nur *zwei* unbekannte Stabkräfte zu bestimmen sind, und stellt darauf die Polygone zu einem *Kräfteplan* zusammen. Wenn die bezeichnete Reihenfolge nicht ausführbar ist, so nimmt man zur Bestimmung einzelner Stabkräfte die Rechnung zu Hilfe. Bei der Zusammenstellung des Kräfteplans können zwei Anordnungen in Frage kommen.

Erste Anordnung. Man vermeidet *verschränkte* Polygone und bildet jedes Kräftepolygon mit dem *positiven* Umfahrungssinn, d. h. so, daß die Polygonfläche *rechts* von den durch die Polygonseiten dargestellten Kräften liegt. Man legt darauf die Kräftepolygone von außen so aneinander, daß eine Ueberdeckung der Polygone vermieden wird. Der Sinn der Kräfte braucht nicht in die Zeichnung eingetragen zu werden, da er durch den positiven Umfahrungssinn bestimmt wird.

Zweite Anordnung. Wenn die Stäbe des Fachwerks und die von den Knoten aufzunehmenden äußeren Kräfte mit der Projektion der Kanten eines *Polyeders* oder eines Polyederteils zusammenfallen, so kann der Kräfteplan des Fachwerks so angeordnet werden, daß er die Projektion des zugehörigen *reziproken* Polyeders darstellt. Aus der Abhandlung I, 26 ist zu ersehen, daß die dort beschriebenen Projektionen reziproker Polyeder genau in derselben Beziehung zueinander stehen wie das Fachwerk zu seinem Kräfteplan: Die Projektion einer jeden Kante des einen Polyeders ist parallel gerichtet zur Projektion der ihr entsprechenden Kante des anderen Polyeders. Demgemäß entspricht einem jeden Stabe des Fachwerks die ebenso gerichtete Stabkraft im Kräfteplan. Ferner entspricht einer jeden Ecke des einen Polyeders das geschlossene Polygon der ihr entsprechenden Seitenfläche des zweiten Polyeders; oder in der Anwendung auf das Fachwerk: einem jeden Knoten entspricht im Kräfteplan das geschlossene Polygon seiner Kräftegruppe. Ebenso entspricht einem jeden Knotenpunkt im Kräfteplan, d. h. einem Punkte, von dem mehrere Kraftstrecken ausgehen, ein Stabpolygon in der Fachwerksfigur. Hierdurch ist die Anordnung des Kräfteplans gegeben, während seine Abmessungen durch die gegebenen Größen der äußeren Kräfte bestimmt werden.

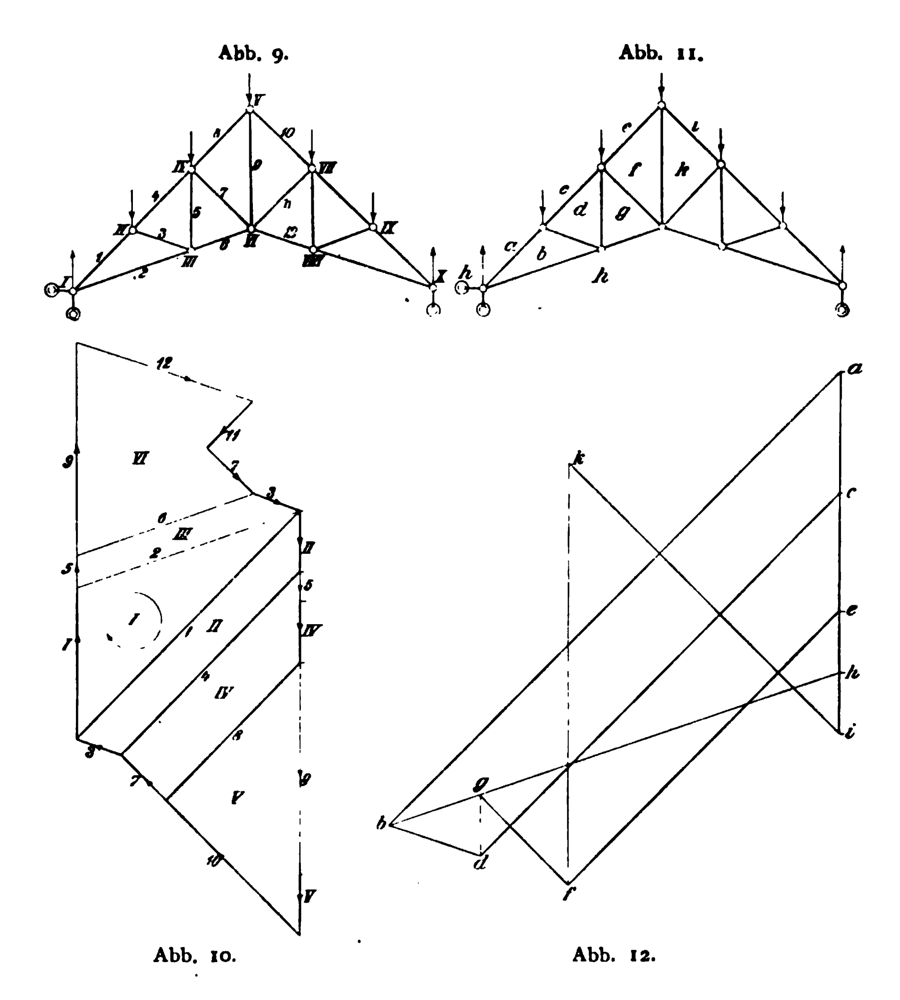


Abb. 9. Abb. 11.

Abb. 10. Abb. 12.

Das folgende Beispiel möge die beiden Anordnungen erläutern: Das in den Abb. 9 und 11 im Maßstabe 1 : 300 dargestellte Fachwerk ist symmetrisch geformt und belastet, so daß der Kräfteplan nur für eine Hälfte des Fachwerks zu bilden ist.

Für die *erste* Anordnung des Kräfteplans, der in Abb. 10 im Maßstabe 1 cm = 3000 kg dargestellt ist, bezeichnet man die Knoten des Fachwerks (Abb. 9), *und zwar in der Reihenfolge, wie die Kräftepolygone zu bilden sind,* mit römischen Ziffern, die Stäbe mit arabischen Ziffern. Im Kräfteplan werden die Knotenlasten und Stützkräfte mit den Ziffern der Knoten, die Stabkräfte mit den Ziffern der Stäbe bezeichnet. Die Kräftepolygone können erforderlichenfalls zur Erleichterung der Uebersicht mit den Knotennummern

bezeichnet werden. Auf den Knoten I wirken außer der lotrechten Stützkraft I, die aus den gegebenen Knotenlasten durch Rechnung zu bestimmen ist, die beiden unbekannten Stabkräfte der Stäbe 1 und 2, welche durch das Kräftedreieck I bestimmt werden. Da der *positive* Umfahrungssinn gegeben ist, so setzt sich 2 an I und 1 an 2. Die vom Knoten I aufzunehmende Stabkraft 2 zeigt also nach *rechts*, während 1 nach *links* zeigt. Hieraus erkennt man, daß der Stab 1 *gedrückt*, der Stab 2 *gezogen* wird. Die Zugkräfte und die Druckkräfte werden im Kräfteplan durch feine und stärkere Linien voneinander unterschieden. Der Knoten II hat außer der Knotenlast II die bekannte Stabkraft 1 und die zwei unbekannten Stabkräfte 3 und 4 aufzunehmen, die durch das Kräftepolygon II bestimmt werden. Der positive Umfahrungssinn dieses Polygons läßt erkennen, daß die auf den Knoten II wirkenden Stabkräfte 3 und 4 nach *links* zeigen, also *Druckkräfte* darstellen. Nachdem in derselben Weise durch die Kräftepolygone III, IV und V die Stabkräfte (5, 6), (7, 8), (9, 10) bestimmt worden sind, gewinnt man eine Probe für die Genauigkeit des Verfahrens, indem man durch das Kräftepolygon VI die Stabkräfte 11 und 12 ermittelt, die der Symmetrie wegen mit 7 und 6 übereinstimmen müssen.

Die Abb. 12 zeigt die *zweite* Anordnung des Kräfteplans im Maßstabe 1 cm = 1500 kg. Für diese Anordnung bezeichnet man die Teile der Bildfläche, welche durch die Stäbe und die äußeren Kräfte voneinander getrennt werden, mit den Buchstaben *a, b, c* ... und jede Kraft durch die zwei Buchstaben der angrenzenden Flächenteile; es bezeichnet also z. B. *ha* die lotrechte Stützkraft des Knotens I, *ab* die Stabkraft 1, *ac* die Last des Knotens II usf. Nachdem die Stützkraft *ha* durch Rechnung bestimmt worden ist, ergibt das Kräftedreieck *hab* Größe und Sinn der beiden auf den Knoten I wirkenden Stabkräfte *ab* und *bh*, die in der *ersten* Anordnung (Abb. 10) die Bezeichnungen 1 und 2 tragen. Der Umfahrungssinn ist durch die nach oben zeigende Stützkraft *ha* bestimmt; er ist im vorliegenden Fall *negativ* und zeigt, daß der Stab *ab* *gedrückt*, der Stab *bh* dagegen *gezogen* wird. Das Polygon *bacd* des Knotens II wird gebildet von der nach oben zeigenden Druckkraft *ba* gegen den Knoten II, von der nach unten zeigenden Knotenlast *ac* und den beiden unbekannten Stabkräften *cd* und *db*, deren Lage im Kräfteplan durch die beiden Punkte *c* und *b* bestimmt ist. Der Umfahrungssinn dieses Vierecks ist also *positiv* und läßt die beiden Stabkräfte *cd, db* als *Druck*kräfte erkennen. In dem folgenden Kräftepolygon *hbdgh* des Knotens III sind die drei

Ecken *h*, *b* und *d* bereits gegeben; die Lage der beiden unbekannten Stabkräfte *dg* und *gh* im Kräfteplan ist also hierdurch bestimmt. Die Seite *gh* fällt auf *hb*. Da die Druckkraft *bd* gegen den Knoten III nach *rechts* zeigt, so ist der Umfahrungssinn des Vierecks *hbdg* *negativ* und zeigt, daß die Stäbe *dg*, *gh* *gezogen* werden. Die Entstehung der Kräftepolygone *gdcefg* und *feik*, der Knoten IV und V bedarf hiernach keiner weiteren Erklärung.

Daß den Polyederflächen *a*, *b*, *c* ... in Abb. 11 die Ecken *a*, *b*, *c* ... im Kräfteplan (Abb. 12) entsprechen, kann durch diese Bezeichnung deutlich zur Anschauung gebracht werden. Dagegen ist es nicht möglich, die Polyederflächen *hab*, *bacd*, *hbdg*, *gdcef*, *feik* in Abb. 12 mit den Nummern I, II, III, IV, V der in den Abb. 9 und 11 ihnen entsprechenden Ecken in unzweideutiger Weise zu bezeichnen, weil jene Polygone einander überdecken.

Eine Vergleichung der beiden beschriebenen Anordnungen des Kräfteplans läßt erkennen, daß die reziproken Figuren folgende zwei Vorteile gewähren: Jede Stabkraft braucht nur *einmal* aufgetragen zu werden, und der Kräfteplan erfordert bei gegebenem Maßstabe weniger Raum, weil die Kräftepolygone einander überdecken.

In der *ersten* Anordnung müssen die Stabkräfte der sogenannten Füllungsstäbe 3, 5, 7, 9 je *zweimal* aufgetragen werden. Dagegen gewährt diese Anordnung den wesentlichen Vorteil der größeren Einfachheit und Uebersichtlichkeit und sichert daher besser gegen Irrtümer und Flüchtigkeitsfehler. Unseres Erachtens verdient sie den Vorzug in allen verwickelten Fällen, während bei einfacher Gestaltung des Kräfteplans die zweite Anordnung anzuwenden ist. Es ist aber zu beachten, daß die zuletzt genannte Anordnung nicht immer ausführbar ist, und daß man in manchen Fällen nicht ohne weiteres erkennen kann, ob die Fachwerksfigur die Projektion eines Polyeders bildet.

Als Beispiel wählen wir das in Abb. 13 im Maßstabe 1 : 250 dargestellte Fachwerk, zu dem eine reziproke Figur sich nicht bilden

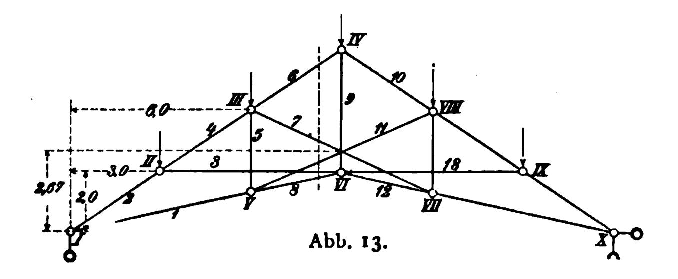


Abb. 13.

läßt, weil es nicht die Projektion eines Polyeders darstellt. Das Fachwerk ist symmetrisch geformt und belastet; es trägt in den Knoten II, III, IV, VIII, IX Lasten von 2000 kg, während die Knoten V, VI, VII der unteren Gurtung unbelastet sind. Die beiden lotrechten Stützkräfte I und X sind also gleich 5000 kg. Der Kräfteplan Abb. 14 zeigt die *erste* Anordnung; sein Maßstab ist 1 cm gleich 2500 kg. Alle Kräftepolygone haben den *positiven* Umfahrungssinn. Die beiden Kräftepolygone I, II bestimmen die Stabkräfte 1, 2, 3 und 4. Die Bildung des Kräfteplans kann nicht ohne weiteres fortgesetzt werden, weil auf jeden der folgenden Knoten III, IV, V ... mehr als *zwei* unbekannte Stabkräfte einwirken. Wir durchschneiden die Stäbe 3, 6, 7, 11, 8 und bilden die Momentengleichung für den links vom Schnitt liegenden Fachwerksteil in bezug auf den Knoten I. Die beiden Stabkräfte 7 und 11 haben der Symmetrie wegen gleichen Sinn und gleiche Größe, folglich eine *wagerechte* Resultante $2\,H$, die nach *rechts* zeigt, wenn die beiden Stäbe *gezogen* werden. Die Momentenarme der in Betracht kommenden Kräfte II, III, $2\,H$ und 3 haben in dieser Reihenfolge die Größen $3\,m$, $6\,m$, $2{,}67\,m$, $2\,m$. Die aus dem Polygon II zu entnehmende Stabkraft 3 ist eine Druckkraft, zeigt also nach links und ist gleich 3000 kg. Die Momentengleichung lautet demnach:

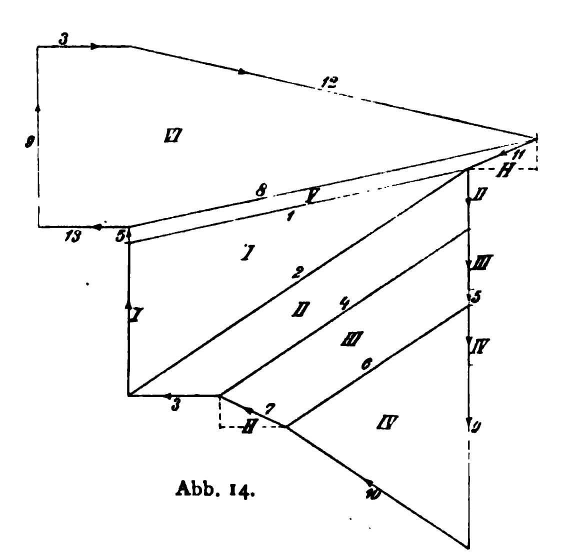


Abb. 14.

$$0 = 2000 \cdot 3 + 2000 \cdot 6 + 2\,H\,2{,}67 - 3000 \cdot 2,$$

woraus sich die Horizontalprojektion H einer jeden der beiden Stabkräfte 7 und 11 ergibt:

$$H = -2250\ \text{kg}.$$

Die beiden Stäbe 7 und 11 werden also nicht gezogen, sondern *gedrückt*. Hierauf können die Kräftepolygone der Knoten III, IV, V, VI in dieser Reihenfolge gebildet werden. Das Polygon VI dient als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung.

8. Einflußzahlen und Einflußlinien. Aus den vorstehenden Abschnitten ist zu ersehen, daß jede Stabkraft S eines einfachen Fachwerks durch eine Gleichung von der Form

$$S = \varkappa_1 K_1 + \varkappa_2 K_2 + \varkappa_3 K_3 + \ldots = \Sigma \varkappa K \tag{7}$$

dargestellt werden kann, wenn die Knotenlasten von gegebener Richtung, aber veränderlicher Größe mit K_1, K_2 ... bezeichnet werden. Die nur von der Form des Fachwerks abhängigen algebraischen Zahlen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ ... werden die *Einflußzahlen* der Knotenlasten K_1, K_2 ... in bezug auf die Stabkraft S genannt, weil z. B. $\varkappa_1 K_1$ den Teil der Stabkraft S bezeichnet, der von der Last K_1 erzeugt wird. Wenn K_1 gleich *eins* ist, während alle anderen Knotenlasten K_2, K_3 ... beseitigt werden, nimmt S den Wert $\varkappa_1$ an. Man bestimmt also die Einflußzahlen $\varkappa_1$ der Knotenlast K_1 für *alle* Stabkräfte S_1, S_2, S_3 ... durch den Kräfteplan des Fachwerks für den bezeichneten Belastungsfall, in welchem nur die Last K_1 gleich eins auf das Fachwerk einwirkt. Dieser Weg ist in der Regel einfacher und zweckmäßiger als die Anwendung des im Abschnitt 4 beschriebenen Verfahrens.

Die *Einflußlinie* einer Stabkraft S entsteht, indem man für jede Abszisse x der wandernden Last K die Einflußzahl $\varkappa$ nach einem willkürlich zu wählenden Maßstabe durch die Ordinate der Linie darstellt.

Beispiel. Das in Abb. 15 im Maßstabe 1 : 1000 dargestellte einfache Balkenfachwerk ist in bezug auf seine Mittelachse symmetrisch geformt. Die veränderlichen lotrechten Lasten werden durch Zwischenträger auf die Knoten der *unteren* Gurtung übertragen. Die Zwischenträger sind durch die Knoten *frei* gestützt, d. h. sie bilden keinen kontinuierlichen Balken. Infolgedessen sind die Einflußlinien der Stabkräfte *Polygone,* deren Ecken in den Loten der Knotenpunkte liegen, welche die Lasten aufnehmen, wie man aus der folgenden Ueberlegung erkennt. Liegt die wandernde Last K gleich eins z. B. auf dem Zwischenträger IV VI von der Stützweite f und in dem Abstande x vom Knoten IV, so überträgt der Zwischenträger auf die beiden genannten Knoten die Lasten $\frac{f-x}{f}$ und $\frac{x}{f}$. Diese beiden Lasten erzeugen in einem Stabe, dessen Einflußzahlen für die Lasten der Knoten IV und VI mit $\varkappa_4$ und $\varkappa_6$ bezeichnet werden, die Stabkraft $\frac{f-x}{f}\varkappa_4 + \frac{x}{f}\varkappa_6$. Für jede Last des

Zwischenträgers IV VI ergibt sich also die Einflußzahl $\varkappa$ aus der Gleichung

$$\varkappa = \frac{f-x}{f}\varkappa_4 + \frac{x}{f}\varkappa_6,$$

d. h. aus der Gleichung der *geraden Linie*, die in den Loten der Knotenpunkte IV und VI die Ordinaten $\varkappa_4$ und $\varkappa_6$ hat.

Die Abb. 16, 17, 18, 19 bilden die Kräftepläne der linken Trägerhälfte für die vier Fälle, in welchen die Last K gleich eins auf die Knoten IV, VI, VIII, X einwirkt. Der Maßstab dieser Pläne ist 1 cm gleich der Zahl $\frac{3}{8}$; die Last K wird demnach durch eine Strecke von der Länge $2^1/_3$ cm dargestellt.

Abb 15.

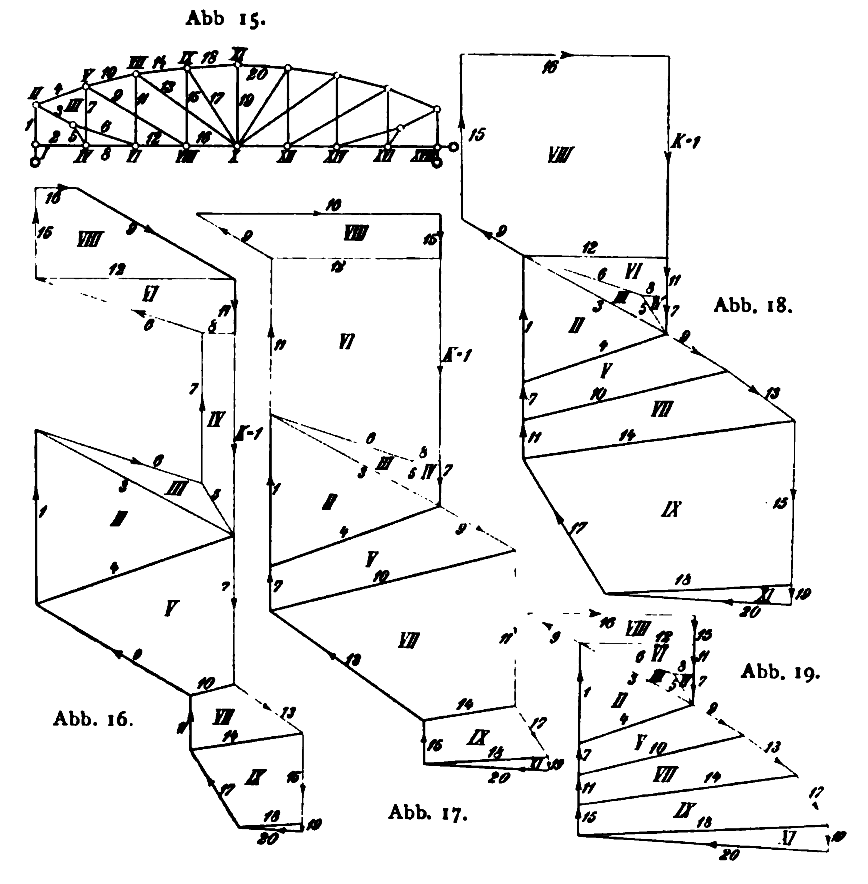
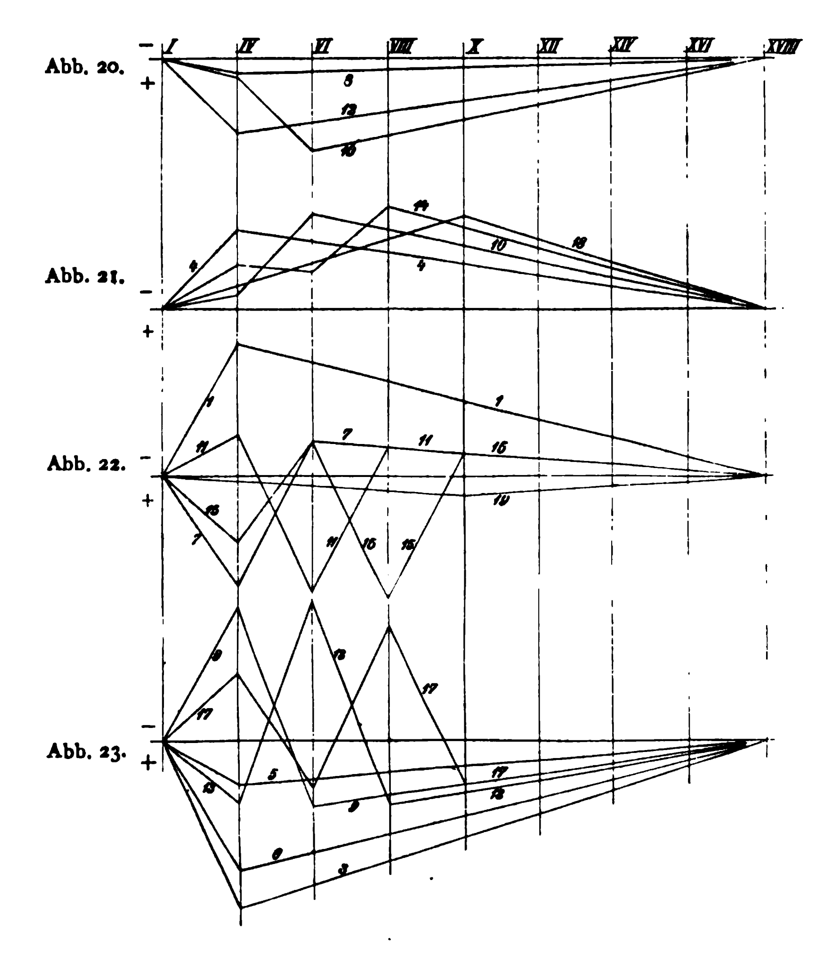


Abb. 16. Abb. 17. Abb. 18. Abb. 19.

Bewegt sich die Last K auf der *rechten* Balkenhälfte, so ändert sich jede Stabkraft der *linken* Balkenhälfte proportional dem Ab-

stande der Last *K* vom rechten Balkenauflager XVIII. Die Einflußpolygone jener Stabkräfte werden daher auf der rechten Balkenhälfte durch gerade Linien gebildet, deren Ordinaten für den Knoten XVIII gleich null sind und für den Knoten X durch den Kräfteplan der Abb. 19 bestimmt werden.

Mit Benutzung der Kräftepläne Abb. 16 bis 19 sind in den Abb. 20 bis 23 die Einflußlinien der Stabkräfte *für die linke Balkenhälfte*



gebildet worden. Abb. 20 bezieht sich auf die Stäbe der *unteren Gurtung*, Abb. 21 auf die Stäbe der *oberen Gurtung*, Abb. 22 auf die *Ständer* und Abb. 23 auf die *Streben*. Die *positiven* Ordinaten liegen *unter*, die *negativen über* der Abszissenachse. Der Maßstab der Ordinaten als Darstellung der Einflußzahlen ist in den Abb. 20 und 21 1 cm

gleich eins und in den Abb. 22, 23 doppelt so groß, also 1 cm gleich $\frac{1}{2}$, während die Einflußzahlen in den Kräfteplänen der Abb. 16 bis 19, wie schon oben angegeben wurde, in dem Maßstabe 1 cm gleich $\frac{3}{8}$ dargestellt werden.

9. Darstellung der Einflußlinien durch Seilpolygone. In einigen Anwendungen erweist es sich als zweckmäßig, die Einflußlinien als Seilpolygone anzusehen. Wir verweisen auf das Beispiel 3 im Abschnitt 9 der Abhandlung II. Die Belastungen des Seils, welches mit der Einflußlinie sich deckt, können durch Rechnung oder auf graphischem Wege bestimmt werden. Diese Bestimmung gestaltet sich besonders einfach in allen Fällen, in welchen zur Berechnung der Stabkraft das im Abschnitt 6 beschriebene Momentenverfahren benutzt werden kann. Die folgenden Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

Das in den Abb. 24, 26 und 28 im Maßstabe 1 : 400 dargestellte Balkenfachwerk erhält seine Belastungen durch Vermittlung von Zwischenträgern, die an die Knoten der unteren Gurtung gehängt sind. Die Stützweite des Balkens wird mit l, die Abszisse der wandernden Einzellast K mit x und die Abszisse des Momentenpunktes M mit a bezeichnet. Die Last K gleich eins erzeugt in den Knoten A und D (Abb. 24) lotrechte Auflagerkräfte von den Größen $\frac{l-x}{l}$ und $\frac{x}{l}$.

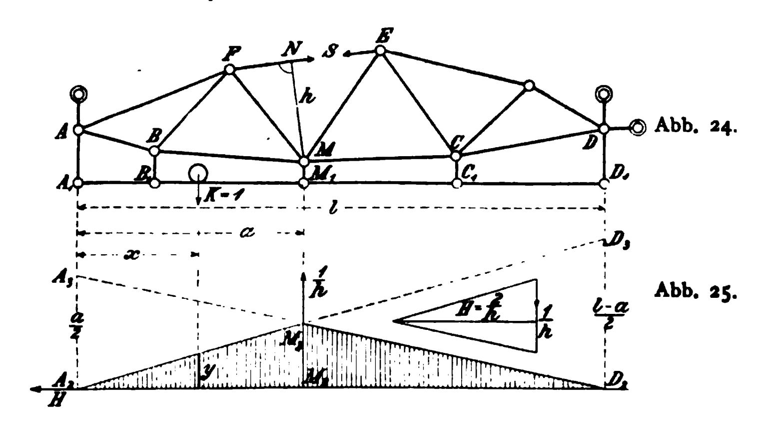


Abb. 24.

Abb. 25.

Beispiel 1. Einflußlinie eines Stabes EF der oberen Gurtung. Man zerlegt das Fachwerk durch einen Schnitt, der außer dem Stabe EF die beiden Stäbe FM und BM trifft. Der Schnittpunkt

dieser beiden Stäbe, also der Knoten M der *unteren* Gurtung ist der *Momentenpunkt*, auf den die Momentengleichung des *unbelasteten* Fachwerksteils bezogen wird. Diese Gleichung ergibt für die Stabkraft S des Stabes EF, deren Arm in bezug auf den Momentenpunkt M mit h bezeichnet wird, wenn x kleiner als a ist:

$$S = \varkappa = -\frac{x(l-a)}{lh},$$

und wenn x größer als a ist:

$$S = \varkappa = -\frac{(l-x)\,a}{lh}.$$

Das Einflußpolygon ist also ein Dreieck $A_2 M_3 D_2$ (Abb. 25), dessen Höhe $M_2 M_3$ in dem Lot des Momentenpunktes M die Größe

$$M_2 M_3 = -\frac{a(l-a)}{lh}$$

hat.

Belastet man einen geraden, in seinen Endpunkten A_2, D_2 (Abb. 25) gestützten Balken in dem Lot des Momentenpunktes M mit der nach oben zeigenden negativen Last $-\frac{1}{h}$, so wird für jede Abszisse x das *Biegungsmoment* des Balkenquerschnitts dargestellt durch die Einflußzahl $\varkappa$, also durch die Ordinate y des Einflußpolygons; denn die Last $-\frac{1}{h}$ erzeugt in den Auflagern A_2 und D_2 nach unten zeigende Auflagerdrücke von den Größen $\frac{(l-a)}{lh}$ und $\frac{a}{lh}$. Folglich ist für den Balkenquerschnitt von der Abszisse x das Biegungsmoment gleich $-\frac{x(l-a)}{lh}$ oder $-\frac{(l-x)\,a}{lh}$, je nachdem x kleiner oder größer als a ist. Für die Bildung des Seilpolygons $A_2 M_3 D_2$ der Last $-\frac{1}{h}$ wurde die Horizontalkraft

$$H = \frac{2}{h}$$

gewählt. Daher ist der Maßstab der Ordinaten y als Darstellung der Einflußzahlen $\varkappa$:

$$1\text{ cm} = \frac{2 \cdot 400\text{ cm}}{h} = \frac{800\text{ cm}}{540\text{ cm}} = \frac{40}{27}.$$

Die Abschnitte $A_2 A_3$ und $D_2 D_3$ der Seilpolygonseiten auf den Auflagerloten ergeben sich nach (II, 7) aus den Momentengleichungen

$$A_2A_3\,\frac{2}{h} = -a\,\frac{1}{h},\quad D_2D_3\,\frac{2}{h} = -(l-a)\,\frac{1}{h}.$$

Diese Abschnitte

$$A_2A_3 = -\frac{a}{2},\quad D_2D_3 = -\frac{l-a}{2}$$

genügen zum Auftragen des Einflußpolygons. Das negative Vorzeichen deutet an, daß die Abschnitte *über* der Abszissenachse liegen.

Abb. 26.

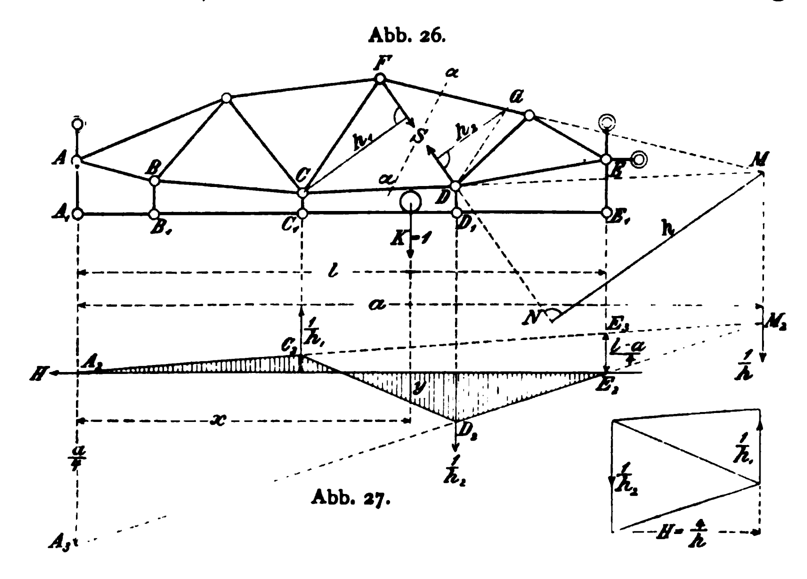


Abb. 27.

Beispiel 2. Einflußlinie der Stabkraft S in der Strebe DF (Abb. 26 und 27). Der Schnitt $\alpha\alpha$ durch das Fachwerk trifft außer der Strebe DF die Gurtstäbe CD und FG, deren Schnittpunkt den Momentenpunkt M bestimmt. Die Momentengleichung für den unbelasteten Fachwerksteil ergibt, wenn wieder mit h der Arm der Stabkraft S bezeichnet wird, für

$$x < A_1C_1: \qquad S = \varkappa = -\frac{x(a-l)}{lh}$$

und für

$$x > A_1D_1: \qquad S = \varkappa = +\frac{(l-x)a}{lh}.$$

Hierdurch ist die Form des Einflußpolygons $A_2C_2D_2E_2$ (Abb. 27) bestimmt. Bei Ermittlung der in den Loten von C_1 und D_1 anzubringenden Lasten $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$, die in den Querschnitten des Balkens A_2E_2 die Biegungsmomente $\varkappa$ hervorrufen, kommt die Lage der beiden Fachwerksteile O und U, die den *oberen* Knoten F und

den *unteren* Knoten D der Strebe FD enthalten, in Betracht. Im vorliegenden Beispiel liegt O links und U rechts vom Schnitt $\alpha\alpha$. Die Belastung $\frac{1}{h_1}$ des Balkenteils O zeigt nach *oben*, trägt also das negative Vorzeichen, während die Belastung $\frac{1}{h_2}$ des Balkenteils U nach *unten* zeigt, also positiv ist. Die Größen dieser Lasten werden alsdann bestimmt durch die Bedingung, daß ihre Resultante durch den Momentenpunkt M gehen und die Größe $\frac{1}{h}$ haben muß. Man überzeugt sich hiervon, wenn man beachtet, daß die beiden Lasten $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$ des Balkens $A_2 E_2$ (Abb. 27) in A_2 einen nach unten zeigenden Auflagerdruck von der Größe $\frac{1}{h} \frac{a-l}{l}$ und n E_2 einen nach oben zeigenden Auflagerdruck $\frac{1}{h} \frac{a}{l}$ erzeugen. Daher ist das Biegungsmoment $\varkappa$ eines Balkenquerschnitts von der Abszisse

$$x < A_1 C_1: \qquad \varkappa = -\frac{x(a-l)}{lh},$$

während für jeden Querschnitt von einer Abszisse

$$x > A_1 D_1: \qquad \varkappa = +\frac{(l-x)a}{lh}$$

wird. Aus der Größe und der Lage der Resultanten $\frac{1}{h}$ der beiden Lasten $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$ ergibt sich die Bedingung (Abb. 26):

$$\frac{1}{h} : \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} = CD : MD : CM$$

oder

$$h_1 = h \frac{CD}{MD}, \quad h_2 = h \frac{CD}{CM} = h \frac{FG}{FM},$$

wenn

$$DG \parallel CF$$

gezogen wird. h_1 und h_2 sind demnach die Abstände der Punkte C und G von der Strebe DF.

Für die Bildung des Seilpolygons $A_2 C_2 D_2 E_2$ (Abb. 27) wurde die Horizontalkraft

$$H = \frac{4}{h}$$

gewählt. Da der Maßstab der Abszissen 1 : 400 ist, so haben die Ordinaten y als Darstellung der Einflußzahlen $\varkappa$ den Maßstab

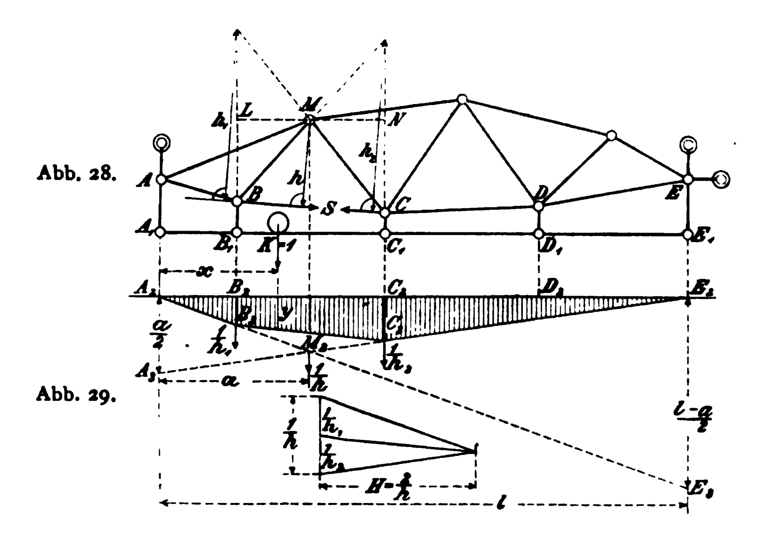
$$1 \text{ cm} = \frac{4 \cdot 400 \text{ cm}}{h} = \frac{1600 \text{ cm}}{1360 \text{ cm}} = \frac{20}{17}.$$

Die Abschnitte $A_2 A_3$ und $E_2 E_3$ des Seilpolygons auf den Auflagerloten ergeben sich aus den Momentengleichungen für die Punkte A_2 und E_2:

$$A_2 A_3 \frac{4}{h} = a \frac{1}{h}, \quad E_2 E_3 \frac{4}{h} = -(a - l) \frac{1}{h}$$

$$A_2 A_3 = + \frac{a}{4}, \quad E_2 E_3 = - \frac{a - l}{4}.$$

Die Punkte A_3 und E_3 bestimmen die Form des Seilpolygons.



Beispiel 3. Einflußpolygon für den Stab BC der unteren Gurtung. Das Fachwerk ist durch einen Schnitt zu zerlegen, der außer dem Stabe BC noch die zwei Stäbe BM und AM trifft. Diese beiden Stäbe bestimmen den Momentenpunkt M. Die Momentengleichung für den unbelasteten Fachwerksteil ergibt, wenn die Abszisse x der wandernden Einzellast K kleiner als $A_1 B_1$ ist:

$$S = \varkappa = + \frac{x(l - a)}{l h},$$

und wenn x größer als $A_1 C_1$ ist:

$$S = \varkappa = + \frac{(l - x) a}{l h}.$$

Diese Gleichungen bestimmen die Form des Einflußpolygons $A_2 B_3 C_3 E_2$ (Abb. 29).

Die in den Punkten B_2 und C_2 des Balkens $A_2 E_2$ (Abb. 29) anzubringenden Lasten $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$, die in den Balkenquerschnitten die Biegungsmomente $\varkappa$ hervorrufen, zeigen beide nach unten, tragen demnach das positive Vorzeichen, und sind, wie im vorhergehenden Beispiel, der Größe nach bestimmt durch die Bedingung, daß ihre Resultante von der Größe $+\frac{1}{h}$ durch den Momentenpunkt M gehen muß; denn diese Lasten erzeugen in den Auflagern A_2, E_2 des Balkens $A_2 E_2$ nach oben zeigende Drücke von den Größen $\frac{l-a}{l h}$ und $\frac{a}{l h}$ und in den Balkenquerschnitten Biegungsmomente von den durch die vorstehenden Gleichungen angegebenen Größen $\varkappa$. Für das Seilpolygon $A_2 B_3 C_3 E_2$, welches diese Biegungsmomente darstellt, wurde die Horizontalkraft

$$H = \frac{2}{h}$$

gewählt. Der Maßstab der Ordinaten y als Darstellung der Einflußzahlen $\varkappa$ ist daher in diesem Falle

$$1 \text{ cm} = 400 \text{ cm} \frac{2}{h} = \frac{800 \text{ cm}}{460 \text{ cm}} = \frac{40}{23}.$$

Die Lasten $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$ ergeben sich aus ihrer Lage gegen die Resultante $\frac{1}{h}$:

$$\frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h} = NM : ML : NL.$$

Hieraus folgt die in Abb. 28 angegebene graphische Bestimmung der Längen h_1 und h_2.

Beispiel 4. Einflußpolygon für den Stab BD des in Abb. 30 dargestellten Balkenfachwerks. In diesem Beispiel läßt sich durch den Stab BD kein Schnitt legen, der außer ihm nur noch zwei Stäbe trifft, und daher kann das Verfahren der vorstehenden Beispiele nicht ohne weiteres angewandt werden. Um dies zu ermöglichen,

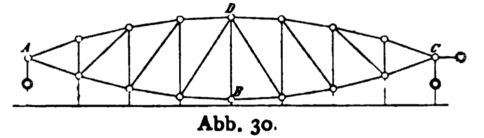
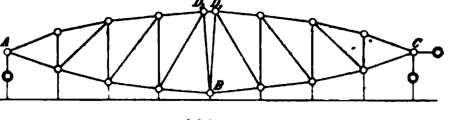
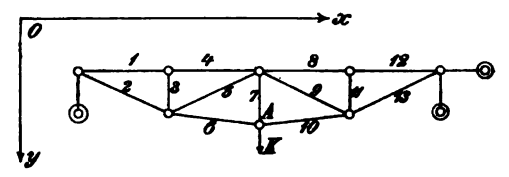


Abb. 30.

spaltet man BD in zwei Stäbe BD_1 und BD_2 (Abb. 31) und wählt die Stabstrecke $D_1 D_2$ unendlich klein. Die Stabkraft x des Stabes BD ist dann offenbar gleich der algebraischen Summe der Stabkräfte x_1, x_2 der beiden Stäbe BD_1 und BD_2. Auf jeden dieser beiden Stäbe läßt sich aber das Verfahren der vorigen Beispiele anwenden.


Abb. 31.

10. Berechnung der Formänderungen einfacher Fachwerke. Wir bezeichnen in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit x, y die Koordinaten eines Knotens A (Abb. 32) und mit Δx, Δy die Aenderungen dieser Koordinaten, die infolge der gegebenen sehr kleinen Längenänderungen Δl_1, Δl_2, Δl_3 ... der Fachwerkstäbe 1, 2, 3 ... eintreten. Um z. B. Δy zu berechnen, belaste man den Knoten A in der Richtung und dem Sinne der y-Achse mit der Last K und bestimme die von dieser Last in den Stäben 1, 2, 3 ... des einfachen Fachwerks erzeugten Stabkräfte $x_1 K, x_2 K, x_3 K$ ... Die algebraischen Zahlen x_1, x_2, x_3 ... sind also die Einflußzahlen der Last K für die Stäbe 1, 2, 3 ... Die Anwendung der Hauptgleichung 1) auf die Gleichgewichtsgruppen der Fachwerksknoten und auf die kleine Bewegung, welche durch die Längenänderungen Δl der Stäbe bestimmt ist, ergibt die Gleichung zur Bestimmung der Verschiebung Δy des Knotens A in der Richtung der y-Achse:


Abb. 32.

$$0 = K\Delta y - x_1 K\Delta l_1 - x_2 K\Delta l_2 - x_3 K\Delta l_3 \ldots$$

oder:

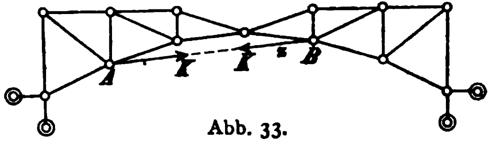
$$\Delta y = x_1 \Delta l_1 + x_2 \Delta l_2 + x_3 \Delta l_3 + \ldots \Sigma x \Delta l. \qquad (8)$$

Selbstverständlich sind die *Vorzeichen* der Größen x, Δl und Δy zu beachten.

In gleicher Weise bestimmt man die Längenänderung Δz des Abstandes

$$AB = z$$

zwischen zwei Knoten A, B eines einfachen Fachwerks (Abb. 33). Man belastet den Knoten A mit einer Last K von der Richtung und dem Sinne der


Abb. 33.

Strecke AB, ferner den Knoten B mit einer ebenso großen Last K von der Richtung und dem Sinne der Strecke BA und bestimmt die Stabkräfte $\varkappa K$, die von den beiden Lasten K hervorgerufen werden. Die Hauptgleichung 1) ergibt für diesen Fall:

$$0 = -K\varDelta z - \varkappa_1 K\varDelta l_1 - \varkappa_2 K\varDelta l_2 - \varkappa_3 K\varDelta l_3 - \ldots$$

also

$$\varDelta z = -\Sigma \varkappa \varDelta l. \tag{9}$$

Die Summierungen in den Gleichungen 8) und 9) erstrecken sich auf *alle* Stäbe des einfachen Fachwerks, auch auf die Stützstäbe, wenn die Stützenlage sich ändert, und die Einflußzahlen $\varkappa$ jener Stäbe nicht gleich null sind.

Die Form eines *zusammengesetzten* Fachwerkes wird durch die Längen der *notwendigen* Stäbe vollkommen bestimmt. Jede Formänderung eines solchen Fachwerks wird also durch die Längenänderungen der *notwendigen* Stäbe bestimmt. Sind diese Längenänderungen $\varDelta l$ gegeben, so können zur Bestimmung der Formänderung die Gleichungen 8) und 9) auf das *einfache* Fachwerk angewandt werden, welches entsteht, wenn die überzähligen Stäbe aus dem zusammengesetzten Fachwerke beseitigt werden. Die Einflußzahlen $\varkappa$ beziehen sich also auf die Stäbe jenes einfachen Fachwerks, und die Summierungen erstrecken sich nur auf diese Stäbe. Auch die Längenänderungen der überzähligen Stäbe können auf diesem Wege bestimmt werden (vergl. Abschnitt 14).

11. Bestimmung der Formänderung eines einfachen Fachwerks vermittels eines Geschwindigkeitsplanes. Werden die Strecken $\varDelta x$, $\varDelta y$ und die gegebenen Längenänderungen $\varDelta l$ durch die Zeitdauer $\varDelta t$ der kleinen Bewegung dividiert, so bestimmen $\frac{\varDelta x}{\varDelta t}$, $\frac{\varDelta y}{\varDelta t}$ die Komponenten der *Geschwindigkeit* des Knotens A in den Richtungen der Koordinatenachsen und $\frac{\varDelta l_1}{\varDelta t}$, $\frac{\varDelta l_2}{\varDelta t}$, $\frac{\varDelta l_3}{\varDelta t}$ . . . die *Dehnungsgeschwindigkeiten* der Stäbe 1, 2, 3 . . . Die gegebenen Dehnungsgeschwindigkeiten bestimmen den *Geschwindigkeitsplan* und hierdurch Größe, Richtung und Sinn der *Wege*, welche von allen Knoten bei der Formänderung des Fachwerks durchlaufen werden. Die Bildung der Geschwindigkeitspläne ist in der Abhandlung IV ausführlich beschrieben worden. Es wird daher genügen, hier einige Beispiele vorzuführen.

Beispiel 1. Es sind die Wege der Knoten des durch Abb. 34 im Maßstabe 1 : 200 dargestellten Fachwerks unter der Voraus-

setzung zu bestimmen, daß der Knoten A auf einem *festen* Lager ruht, während der Knoten E wagerecht sich verschieben kann. Der Stab AB ändert seine Länge um $-0{,}115$ cm, der Stab AC um $-0{,}150$ cm, BC um $+0{,}085$ cm, BD um $-0{,}205$ cm, CD um $-0{,}105$ cm, BE um $-0{,}150$ cm und DE um $-0{,}140$ cm. Als

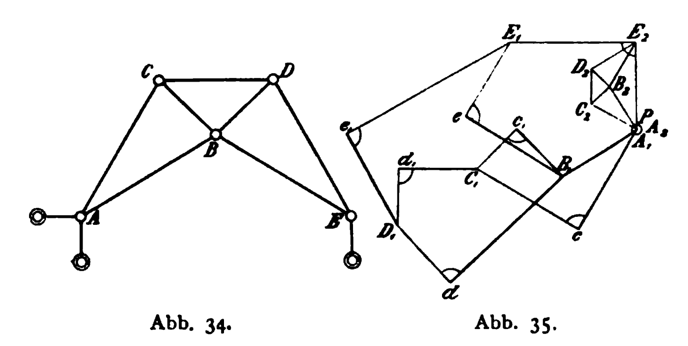


Abb. 34. Abb. 35.

Zeitdauer Δt der Bewegung wählen wir 1 Sekunde und als Maßstab des Geschwindigkeitsplans 1 cm $= 0{,}1$ cm sek^{-1}. Die Knotenwege werden daher durch den Geschwindigkeitsplan in *zehnfacher Vergrößerung* dargestellt.

Wir setzen die Bewegung des Fachwerks aus zwei gleichzeitigen, von einander unabhängigen Bewegungen der Knoten zusammen. Die *erste* Bewegung wird bestimmt durch die Bedingung, daß der Knoten A festgehalten wird, während der Knoten B *auf der festen Geraden* AB sich bewegt, und alle Stäbe die oben angegebenen Dehnungen erleiden. Die gleichzeitige *zweite* Bewegung ist eine Drehung des starren Fachwerks um den *festen Punkt* A mit einer solchen Drehgeschwindigkeit, daß die aus beiden Bewegungen resultierende Geschwindigkeit E_2E_1 des Knotens E die vorgeschriebene horizontale Richtung erhält. Die Geschwindigkeiten der Knoten A, B, $C\ldots$ werden für die *erste* Bewegung durch die Strecken PA_1, PB_1, $PC_1\ldots$, für die *zweite* Bewegung durch die Strecken A_2P, B_2P, C_2P und also für die *resultierende* Bewegung durch die Strecken A_2A_1, B_2B_1, $C_2C_1\ldots$ dargestellt. Die dem ruhenden Knoten A entsprechenden Punkte A_1 und A_2 fallen mit dem Pol P des Geschwindigkeitsplanes zusammen. Es wird ferner bestimmt:

1. *Der Punkt* B_1 durch die gegebene Dehnungsgeschwindigkeit des Stabes AB:

$$A_1B_1 \parallel AB, \quad A_1B_1 = -1{,}15 \text{ cm}.$$

Der Sinn A_1B_1 ist dem Sinne AB entgegengesetzt, weil die Dehnungsgeschwindigkeit *negativ* ist (vergl. IV, 1).

2. *Der Punkt* C_1 durch die gegebenen Dehnungsgeschwindigkeiten der beiden Stäbe AC und BC:

$$A_1 c \parallel AC, \quad A_1 c = -1{,}50 \text{ cm}$$
$$B_1 c_1 \parallel BC, \quad B_1 c_1 = +0{,}85 \text{ cm}.$$

Den Vorzeichen entsprechend hat $A_1 c$ den Sinn CA und $B_1 c_1$ den Sinn BC. Um den Punkt C_1 zu bestimmen, ist

$$c C_1 \perp A_1 c, \quad c_1 C_1 \perp B_1 c_1$$

zu ziehen.

3. *Der Punkt* D_1 durch die gegebenen Dehnungsgeschwindigkeiten der beiden Stäbe BD, CD:

$$B_1 d \parallel BD, \quad B_1 d = -2{,}05 \text{ cm}$$
$$C_1 d_1 \parallel CD, \quad C_1 d_1 = -1{,}05 \text{ cm}$$
$$d D_1 \perp B_1 d, \quad d_1 D_1 \perp C_1 d_1.$$

4. *Der Punkt* E_1 durch die Dehnungsgeschwindigkeiten der Stäbe BE und DE:

$$B_1 e \parallel BE, \quad B_1 e = -1{,}50 \text{ cm}$$
$$D_1 e_1 \parallel DE, \quad D_1 e_1 = -1{,}40 \text{ cm}$$
$$e E_1 \perp B_1 e, \quad e_1 E_1 \perp D_1 e_1.$$

Der Geschwindigkeitsplan der *zweiten* Bewegung ist durch die Bedingungen:

$$A_2 E_2 \perp AE$$
$$E_1 E_2 \parallel AE$$
$$A_2 B_2 C_2 D_2 E_2 \approxeq ABCDE$$

bestimmt. Die resultierenden Geschwindigkeiten und Wege $B_2 B_1$, $C_2 C_1$, $D_2 D_1$ der Knoten B, C, D wurden nicht ausgezogen, um die Zeichnung nicht undeutlich zu machen.

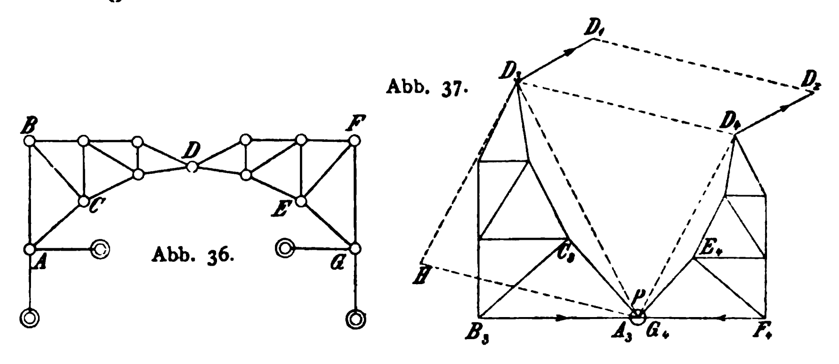


Abb. 36.
Abb. 37.

Beispiel 2. Das Fachwerk $ABCDE\ldots$ (Abb. 36) ist in den Knoten A und G *fest* gelagert; die Längenänderung der Strecke AG

ist also gleich null. Um aus den *gegebenen* Längenänderungen der Stäbe die Wege der Knoten zu bestimmen, zerlegen wir die kleine Bewegung des Fachwerks in folgende *vier* gleichzeitige Bewegungen:

1. Die Bewegung der Fachwerkshälfte $ABCD$, bei welcher der Knoten B auf der festen Geraden AB sich verschiebt und alle Stäbe dieses Fachwerksteils die gegebenen Dehnungen erleiden. Von dem Geschwindigkeitsplan $PA_1 B_1 C_1 D_1 \ldots$, der wie im Beispiel 1 gebildet wird, ist nur die Geschwindigkeit PD_1 des Knotens D dargestellt worden, um die Zeichnung nicht mit Linien zu überladen.

2. Die Bewegung der zweiten Fachwerkshälfte $DEFG$, bei welcher der Knoten F auf der festen Geraden GF sich verschiebt und alle Stäbe die vorgeschriebenen Dehnungen ausführen. Von den Geschwindigkeiten PD_2, PE_2, $PF_2 \ldots$ dieser Bewegung 2 wurde nur die Geschwindigkeit PD_2 des Knotens D dargestellt.

3. Eine Drehung der ersten Fachwerkshälfte um den festen Knoten A, welche durch den Geschwindigkeitsplan

$$A_3 B_3 C_3 D_3 \approx ABCD$$

dargestellt wird, und

4. eine Drehung der zweiten Hälfte um den festen Knoten G, dargestellt durch den Geschwindigkeitsplan

$$D_4 E_4 F_4 G_4 \approx DEFG.$$

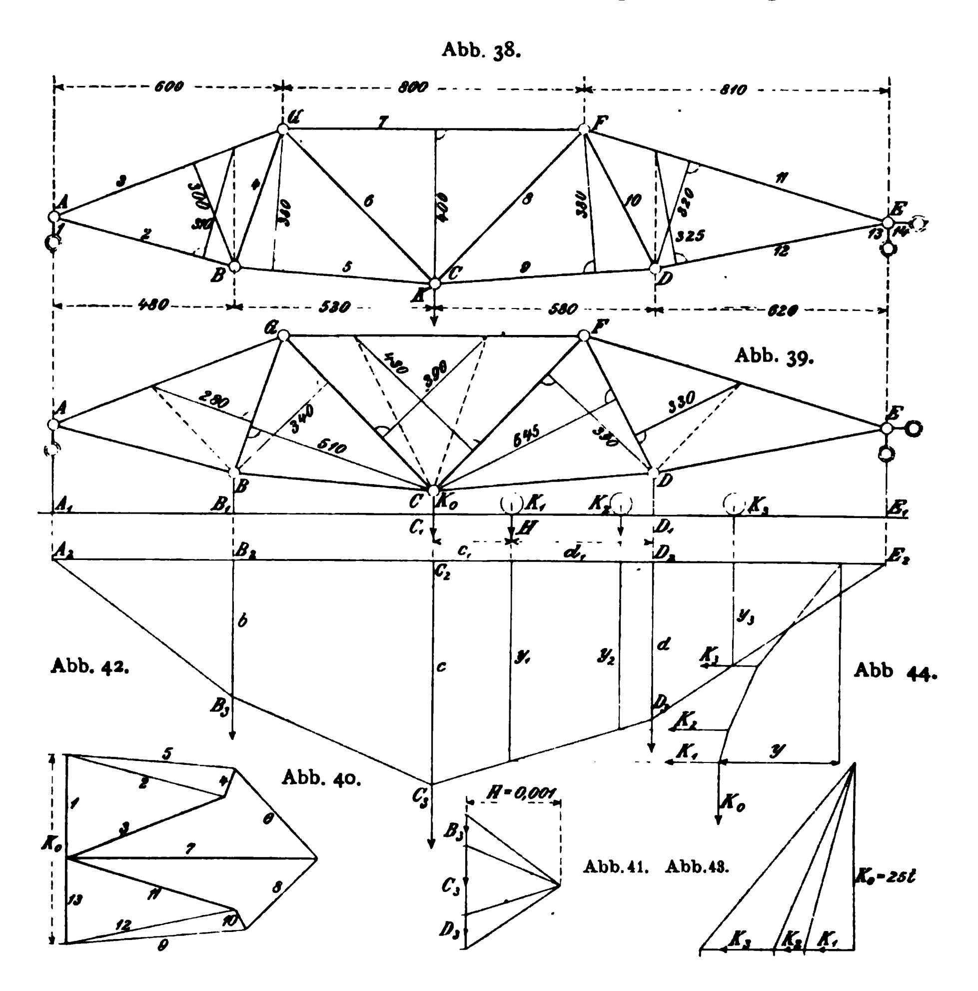
Der Sinn der Geschwindigkeiten der beiden Bewegungen 3 und 4 zeigt nach dem Pol P, so daß für die Knoten der ersten Fachwerkshälfte die Geschwindigkeiten $B_3 B_1$, $C_3 C_1$, $D_3 D_1 \ldots$ und für die Knoten der zweiten Hälfte die Geschwindigkeiten $D_4 D_2$, $E_4 E_2$, $F_4 F_2 \ldots$ resultieren.

Die beiden Drehungen 3 und 4 werden bestimmt durch die Bedingung, daß für den Knoten D, welcher die beiden Fachwerkshälften verbindet, aus den beiden Bewegungen 1 und 3 dieselbe Geschwindigkeit sich zusammensetzen muß, wie aus den Bewegungen 2 und 4, d. h. die Strecke $D_3 D_1$ muß Größe, Richtung und Sinn der Strecke $D_4 D_2$ erhalten. Um die beiden Punkte D_3, D_4, welche dieser Bedingung entsprechen, zu bestimmen, trägt man die Strecke PH nach Größe, Richtung und Sinn gleich der Strecke $D_2 D_1$ auf und zieht:

$$PD_3 \perp AD, \qquad PD_4 \perp GD$$
$$HD_3 \parallel PD_4, \qquad D_3 D_4 \parallel D_1 D_2.$$

12. Die Biegungslinie. Das im vorigen Abschnitt beschriebene Verfahren wird in manchen Fällen unsicher und un-

brauchbar, weil die unvermeidlichen Zeichenfehler bei großer Anzahl der Stäbe leicht das zulässige Maß überschreiten. Auch ist es nur selten von Interesse, die Formänderung eines Fachwerks durch die Wege *aller* Knoten vollständig zu bestimmen. In den meisten Aufgaben kommen nur die *lotrechten* Wege einzelner Knoten in Betracht und zwar nicht nur bei einer einzigen Belastung, sondern



in einer größeren Anzahl verschiedener Belastungsfälle. Es würde sehr umständlich und zeitraubend sein, wenn man für jeden dieser Fälle den Geschwindigkeitsplan des Fachwerks bilden müßte.

Es sei in Abb. 39 G irgend ein Knoten des Fachwerks und H irgend ein Punkt der die Lasten aufnehmenden Fahrbahn. Be-

rechnet man nach Abschnitt 10 die Senkung g des Knotens G, die hervorgerufen wird durch eine lotrechte Last K des Punktes H der Fahrbahn, und ferner die Senkung h des Punktes H, hervorgerufen durch eine ebenso große Belastung K des Knotens G, so ergibt sich, daß die beiden Senkungen g und h gleich groß und der Last K proportional sind.

Um diese Behauptung zu beweisen, bezeichnen wir für die Stabkräfte des Fachwerks mit $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ die Einflußzahlen der Lasten K des Knotens G und der beiden Knoten C, D, auf welche die Last des Punktes H vermittels des Zwischenträgers $C_1 D_1$ übertragen wird. Die Last K des Knotens G erzeugt Stabkräfte von der Größe $\varkappa_1 K$ und Längenänderungen von der Größe

$$\Delta l = \frac{\varkappa_1 K l}{\varepsilon F} = \varkappa_1 K r,$$

wenn mit l die Länge eines Stabes, mit F sein Querschnitt, mit ε der Elastizitätsmodul des Stabmaterials bezeichnet und zur Abkürzung

$$r = \frac{l}{\varepsilon F}$$

gesetzt wird. Infolge dieser Längenänderungen senken sich die Knoten C und D um Strecken c, d, die nach Abschnitt 10 durch die Gleichungen

$$c = \Sigma \varkappa_2 \Delta l = K \Sigma \varkappa_2 \varkappa_1 r,$$
$$d = \Sigma \varkappa_3 \Delta l = K \Sigma \varkappa_3 \varkappa_1 r$$

bestimmt werden. Wird von der Formänderung des Zwischenträgers abgesehen, so ergibt sich für die Senkung h des Punktes H die Größe:

$$h = \frac{c d_1 + d c_1}{c_1 + d_1} = \frac{K}{c_1 + d_1} (d_1 \Sigma \varkappa_2 \varkappa_1 r + c_1 \Sigma \varkappa_3 \varkappa_1 r), \tag{10}$$

wenn mit c_1, d_1 die Abstände des Punktes H von den Stützen C_1, D_1 des Zwischenträgers $C_1 D_1$ bezeichnet werden.

Belastet man ferner den Punkt H mit der Last K, so werden auf die Knoten C, D die Lasten $K \frac{d_1}{c_1 + d_1}$ und $K \frac{c_1}{c_1 + d_1}$ übertragen. Diese beiden Lasten erzeugen zusammen Stabkräfte von der Größe

$$\frac{K}{c_1 + d_1} (d_1 \varkappa_2 + c_1 \varkappa_3)$$

und Längenänderungen von der Größe

$$\Delta l = \frac{K r}{c_1 + d_1} (d_1 \varkappa_2 + c_1 \varkappa_3).$$

Die hierdurch herbeigeführte Senkung g des Knotens G hat also, wie oben behauptet wurde, die Größe:

$$g = \frac{K}{c_1 + d_1}(d_1 \Sigma \varkappa_1 \varkappa_2 r + c_1 \Sigma \varkappa_1 \varkappa_3 r) = h. \tag{11}$$

Es sei nun die Aufgabe gestellt, für eine Reihe verschiedener, zusammengesetzter Belastungen die Senkungen y eines bestimmten Knotens, z. B. des Knotens C, zu berechnen. Wir bestimmen zu diesem Zweck in Abb. 42 die Senkungen

$$b = B_2 B_3, \quad c = C_2 C_3, \quad d = D_2 D_3$$

der Knoten B, C, D, welche die Fahrbahn tragen, für den Fall, in welchem *allein der Knoten* C mit der Last K_0 belastet ist. Das Polygon $A_2 B_3 C_3 D_3 E_2$ wird die *Biegungslinie der Gurtung* $ABCDE$ genannt. Eine der gegebenen Belastungen ist in Abb. 39 dargestellt; sie besteht aus den Lasten K_1, K_2, K_3, in deren Loten die Biegungslinie die Ordinaten y_1, y_2, y_3 hat. Diese Ordinaten bezeichnen also die Senkungen der Fahrbahn in den Punkten, welche die Lasten K_1, K_2, K_3 tragen, in dem Falle, wenn diese Lasten beseitigt und durch eine Einzellast K_0 des Knotens C ersetzt werden. Wird jede einzelne der Lasten K_1, K_2, K_3 in deren Lage durch K_0 ersetzt, so wird in diesen drei Belastungsfällen die Senkung des Knotens C, wie oben bewiesen worden ist, die Größen

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3$$

annehmen. Daher ist die Senkung y des Knotens C bei gleichzeitiger Einwirkung der Lasten K_1, K_2, K_3:

$$y = \frac{K_1}{K_0} y_1 + \frac{K_2}{K_0} y_2 + \frac{K_3}{K_0} y_3 = \frac{1}{K_0} \Sigma K y. \tag{12}$$

Diese Größe kann entweder durch Rechnung oder in bekannter Weise auf graphischem Wege vermittels eines Seilpolygons bestimmt werden, wie es in den Abbildungen 43 und 44 ausgeführt worden ist.

13. Die Bildung der Biegungslinie kann auf drei verschiedenen Wegen ausgeführt werden:

1) *Durch Berechnung der Ordinaten* b, c, d. Bezeichnet man mit $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ die Einflußzahlen der Lasten der Knoten C, B, D für

die Stabkräfte des Fachwerks, so ist dem Abschnitt 12 zufolge bei einer Belastung K_0 des Knotens C die Senkung des Knotens B:

$$B_2 B_3 = b = K_0 \Sigma \varkappa_2 \varkappa_1 r,$$

die Senkung des Knotens C:

$$C_2 C_3 = c = K_0 \Sigma \varkappa^2_1 r$$

und die Senkung des Knotens D:

$$D_2 D_3 = d = K_0 \Sigma \varkappa_3 \varkappa_1 r.$$

Die Berechnung der Summenwerte ist bei großer Anzahl der Knoten und Stäbe zwar mühsam, wird aber wesentlich erleichtert durch den Umstand, daß die Produkte $\varkappa_2 \varkappa_1 r$, $\varkappa^2_1 r$, $\varkappa_3 \varkappa_1 r$ für jeden Stab den gemeinschaftlichen Faktor $\varkappa_1 r$ haben.

2) *Vermittels eines Geschwindigkeitsplanes.* Die Last K_0 des Knotens C erzeugt Stabkräfte von der Größe

$$S = \varkappa_1 K_0$$

und Längenänderungen von der Größe

$$\Delta l = S r = \varkappa_1 K_0 r.$$

Man bestimmt die Stabkräfte S vermittels eines Kräfteplans (Abb. 40) und die Verschiebungen der Knoten infolge der Längenänderungen Δl durch einen Geschwindigkeitsplan, aus dem die lotrechten Wege b, c, d der Knoten B, C, D zu entnehmen sind. Ist die Anzahl der Stäbe groß, so gewährt dieser Weg in der Regel nicht den erforderlichen Grad der Genauigkeit.

3) *Durch Darstellung der Biegungslinie als Seilpolygon,* dessen Belastungen in folgender Weise ermittelt werden. Wenn nur ein einziger Stab, z. B. der Stab GB, seine Länge um Δl ändert, so senken sich die Knoten C, B, D um die Strecken

$$\Delta c = \varkappa_1 \Delta l, \quad \Delta b = \varkappa_2 \Delta l, \quad \Delta d = \varkappa_3 \Delta l,$$

wenn wie bisher mit $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ die Einflußzahlen der Knotenlasten von C, B, D für die Stabkraft des Stabes GB bezeichnet werden. Im Abschnitt 9 wurde beschrieben, wie diese Einflußzahlen bestimmt werden durch die Ordinaten eines Seilpolygons, dessen Belastungen $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$ aus der Fachwerksfigur zu entnehmen sind. Genau dasselbe Verfahren führt offenbar zur Bestimmung der Senkungen Δb, Δc, Δd, indem man nämlich anstatt der Lasten $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$ die

Lasten $\frac{\Delta l}{h}$, $\frac{\Delta l}{h_1}$, $\frac{\Delta l}{h_2}$ für die Bildung des Seilpolygons einführt. Die Strecken h, h_1, h_2 werden in beiden Fällen in gleicher Weise aus der Zeichnung entnommen. Man bestimmt also nach den Regeln des Abschnittes 9 die in den Loten der Knoten B, C, D wirkenden Lasten $\frac{\Delta l}{h}$, welche der gegebenen Längenänderung

$$\Delta l = \varkappa_1 K_0 r$$

eines jeden Stabes entsprechen, berechnet für jede Knotenvertikale die algebraische Summe der Lasten und bildet aus diesen resultierenden Lasten mit einer willkürlich zu wählenden Horizontalkraft H das Seilpolygon $A_2 B_3 C_3 D_3 E_2$, das mit der Biegungslinie sich deckt.

Für das in den Abb. 38 und 39 im Maßstabe 1 : 200 dargestellte Balkenfachwerk ist die angedeutete Berechnung der Lasten in der folgenden Tabelle ausgeführt worden.

Stab	l	F	$S = \varkappa_1 K_0$	$1000 \Delta l$	h	h_1	h_2	Das 1 000 000fache der Belastungen		
	cm	qcm	t	cm	cm	cm	cm	B_3	C_3	D_3
2	490	100	+ 22,0	+ 54	+ 310			+ 174		
3	650	120	− 22,5	− 61	− 300			+ 203		
4	390	50	− 3,5	− 14		+ 280	− 510	− 50	+ 27	
5	530	100	+ 22,5	+ 60	+ 380			+ 122	+ 36	
6	575	100	+ 16,0	+ 46		− 340	+ 390	− 135	+ 118	
7	800	120	− 33,4	− 111	− 400				+ 278	
8	575	50	+ 13,6	+ 78		+ 430	− 390		+ 181	− 200
9	585	100	+ 24,0	+ 70	+ 380				+ 60	+ 124
10	410	50	− 3,0	− 12		− 545	+ 330		+ 22	− 36
11	845	120	− 23,5	− 83	− 320					+ 259
12	635	100	+ 22,8	+ 72	+ 325					+ 222
							Summe	+ 314	+ 722	+ 369

Die ersten Reihen enthalten die gegebenen Stablängen l und Stabquerschnitte F. In der folgenden Reihe sind die Stabkräfte

$$S = \varkappa_1 K_0$$

verzeichnet, die von einer Last

$$K_0 = 25 \text{ t}$$

des Knotens C hervorgerufen werden und in dem Kräfteplan Abb. 40 im Maßstab

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ t}$$

dargestellt sind. Bei der Berechnung der Längenänderungen

$$\Delta l = \varkappa_1 K_0 r = \frac{l S}{\varepsilon F}$$

wurde $\varepsilon = 2000$ t/qcm angenommen.

Die Strecken h, h_1, h_2 sind in den Abb. 38 und 39 angegeben; nur die Strecken h_1, h_2 für die Stäbe 5 und 9 mußten wegen Raummangels aus der Zeichnung fortgelassen und durch Rechnung ersetzt werden. Zur Erläuterung der Tabelle beschreiben wir die Rechnung für die Stäbe 5, 6 und 7.

Stab 5. Gegeben sind:

$$\Delta l = +0{,}060 \text{ cm}, \quad h = +380 \text{ cm}, \quad \frac{\Delta l}{h} = +0{,}000158 \text{ cm}.$$

Der Momentenarm h ist *positiv*, weil der Stab 5 der *unteren* Gurtung angehört (vergl. Abschnitt 9, Beispiel 3). Die im Lot des Momentenpunktes G anzubringende Last $\frac{\Delta l}{h}$ ist die Resultante der beiden Lasten $\frac{\Delta l}{h_1}$ und $\frac{\Delta l}{h_2}$, welche durch die Knoten B und C gehen und von der Resultanten um 120 cm und 410 cm abstehen. Folglich ist:

$$\frac{\Delta l}{h_1} = + \frac{410}{410 + 120} 0{,}000158 = + 0{,}000122$$

$$\frac{\Delta l}{h_2} = + \frac{120}{410 + 120} 0{,}000158 = + 0{,}000036.$$

Stab 6. Gegeben sind (Abb. 39):

$$\Delta l = +0{,}046 \text{ cm}, \quad h_1 = -340 \text{ cm}, \quad h_2 = +390 \text{ cm}.$$

Nach Beispiel 2 des Abschnittes 9 trägt h_1 das negative und h_2 das positive Vorzeichen, weil der *obere* Knoten G des Stabes 6 *links* vom Schnitt durch die Stäbe 5, 6, 7 liegt. Demnach haben die Lasten der Knoten B und C die Größen:

$$\frac{\Delta l}{h_1} = \frac{+0{,}046 \text{ cm}}{-340 \text{ cm}} = -0{,}000135$$

$$\frac{\Delta l}{h_2} = \frac{+0{,}046 \text{ cm}}{+390 \text{ cm}} = +0{,}000118.$$

Stab 7. Gegeben sind (Abb. 38):

$$\Delta l = -0{,}111 \text{ cm}, \quad h = -400 \text{ cm}.$$

Nach Beispiel 1 des Abschnittes 9 ist h *negativ*, weil der Stab 7 der *oberen* Gurtung angehört. Daher ist die Last im Lot des Momentenpunktes C:

$$\frac{\Delta l}{h} = \frac{-0{,}111 \text{ cm}}{-400 \text{ cm}} = +0{,}000278.$$

Die Summierung der Tabelle ergibt als Belastungen des Seils in den Loten der Punkte B, C, D die unbenannten Zahlen:

$$B_3 = +0{,}000314, \quad C_3 = +0{,}000722, \quad D_3 = +0{,}000369.$$

Im Kräfteplan des Seilpolygons (Abb. 41), für den der Maßstab

$$1 \text{ cm} = 0{,}0008$$

gewählt wurde, ist die Horizontalkraft H gleich 0,001. Daher ist der Maßstab der Ordinaten y des Seilpolygons

$$1 \text{ cm} = 0{,}001 \cdot 200 \text{ cm} = 0{,}2 \text{ cm},$$

d. h. die Senkungen des Knotens C werden in den Abb. 42 und 44 im Fünffachen der natürlichen Größe dargestellt.

14. **Die Längen und die Längenänderungen der überzähligen Stäbe eines zusammengesetzten Fachwerks.** Wenn in ein einfaches Fachwerk ein überzähliger Stab eingefügt und hierdurch ein *zusammengesetztes* Fachwerk gebildet wird, so sind die Länge l' und die Längenänderung $\Delta l'$ dieses Stabes abhängig von den Längen und den Längenänderungen der Stäbe des einfachen Fachwerks. Wir bezeichnen mit $l_1, l_2, l_3 \ldots$ die Längen der Stäbe 1, 2, 3 ... des *einfachen* Fachwerks im spannungslosen Zustande und bei einer bestimmten Temperatur t_0; ferner mit l' die hierdurch bestimmte Länge des überzähligen Stabes (1) und mit t_1 die Temperatur, bei der dieser Stab *im spannungslosen Zustande* die Länge l' hat. In bezug auf diese Längen seien $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3 \ldots, \Delta l'$ die *durch irgend welche Ursachen* herbeigeführten Längenänderungen.

Nach Gleichung 9 ist:

$$\Delta l' = -x'_1 \Delta l_1 - x'_2 \Delta l_2 - x'_3 \Delta l_3 - \ldots = -\Sigma x' \Delta l, \quad (13)$$

wenn $x'_1 S'$, $x'_2 S'$, $x'_3 S' \ldots$ die Stabkräfte der Stäbe 1, 2, 3... des *unbelasteten* einfachen Fachwerks bezeichnen, welche von einer Stabkraft S' des überzähligen Stabes hervorgerufen werden. Da für diesen Stab

$$x' = +1$$

ist, so kann man der Gleichung 13) auch die Form

$$0 = \Sigma' x' \Delta l$$

geben. Das Zeichen Σ' soll andeuten, daß die Summierung auf *den überzähligen Stab* (1) und auf sämtliche Stäbe des einfachen Fachwerks mit Einschluß der Stützstäbe sich erstreckt. Letztere kommen selbstverständlich nur dann in Betracht, wenn die Stützenlage sich ändert, und wenn zugleich die Stützstäbe durch die Stabkraft S' des überzähligen Stabes in Spannung versetzt werden, mit anderen Worten, wenn für die Stützstäbe weder Δl noch $\varkappa'$ gleich null ist. Enthält das Fachwerk *mehrere* überzählige Stäbe (1), (2), (3) . . ., so besteht für jeden eine Bedingung von dieser Form:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \Sigma'\varkappa'\Delta l \\ 0 = \Sigma''\varkappa''\Delta l \\ 0 = \Sigma'''\varkappa'''\Delta l \text{ usf.} \end{array}\right\} \quad (14)$$

Die Gleichung 13) gilt für *jede* Formänderung, also auch in dem Falle, wenn

$$\Delta l' : \Delta l_1 : \Delta l_2 : \ldots = l' : l_1 : l_2 : \ldots$$

ist, d. h. wenn das Fachwerk der Form seines spannungslosen Zustandes geometrisch ähnlich bleibt. Daher ist die Länge l' des überzähligen Stabes im spannungslosen Zustande des Fachwerks

$$l' = -\varkappa'_1 l_1 - \varkappa'_2 l_2 - \varkappa'_3 l_3 - \ldots = -\Sigma\varkappa' l. \quad (15)$$

Hat der spannungslose Stab bei der Temperatur t_0 die Länge l_0, so wird seine Temperatur t_1 *für den spannungslosen Zustand des Fachwerks* durch die Gleichung

$$t_1 = t_0 + \frac{l' - l_0}{l_0 \delta} \quad (16)$$

bestimmt, in der δ den Wärmeausdehnungskoeffizient des Stabmaterials bezeichnet. In manchen Fällen ist l_0 nicht bekannt; dann ist es unmöglich, die Temperatur t_1 und ihren Einfluß auf die Stabkräfte des Fachwerks zu bestimmen.

Die Auswahl der überzähligen Stäbe eines zusammengesetzten Fachwerks ist innerhalb gewisser Grenzen willkürlich: es ist nur nötig, daß die übrigen Stäbe ein *einfaches* Fachwerk bilden.

15. Die Stabkräfte des zusammengesetzten Fachwerks. Die Längenänderungen der Stäbe in bezug auf den spannungslosen Zustand des Fachwerks sind abhängig von den Temperaturänderungen t und den Stabkräften S gemäß der Formel

$$\Delta l = l\delta t + Sr. \quad (17)$$

Um die Stabkräfte S zu bestimmen, betrachten wir die überzähligen Stäbe als *Laststäbe*, deren Bedeutung im Abschnitt 6 er-

läutert worden ist. Die Belastungen des einfachen Fachwerks, welches durch Zerschneiden der überzähligen Stäbe entsteht, setzen sich also zusammen aus den gegebenen Knotenlasten K und den unbekannten Stablasten S', S'', S''' . . ., die von den Stabkräften der zerschnittenen überzähligen Stäbe (1), (2), (3) . . . gebildet werden. In jedem Stabe des einfachen Fachwerks erzeugen die Lasten K eine in bekannter Weise zu bestimmende und als lineare Funktion der Kräfte K darzustellende Stabkraft $\mathfrak{S}$, zu der die von den Lasten S', S'', S''' . . . erzeugten Stabkräfte $x'S'$, $x''S''$, $x'''S'''$ hinzutreten:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \mathfrak{S}_1 + x'_1 S' + x''_1 S'' + x'''_1 S''' + \ldots \\ S_2 &= \mathfrak{S}_2 + x'_2 S' + x''_2 S'' + x'''_2 S''' + \ldots \\ S_3 &= \mathfrak{S}_3 + x'_3 S' + x''_3 S'' + x'''_3 S''' + \ldots \text{ usf.} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Durch Verbindung der Gleichungen 14), 17) und 18) entstehen die Bedingungen, durch welche die unbekannten Stabkräfte S', S'', S''' . . . der überzähligen Stäbe bestimmt werden:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \Sigma' x' l\delta t + \Sigma x' \mathfrak{S} r + S' \Sigma' x'^2 r + S'' \Sigma x' x'' r + S''' \Sigma x' x''' r + \ldots \\ 0 &= \Sigma'' x'' l\delta t + \Sigma x'' \mathfrak{S} r + S' \Sigma x' x'' r + S'' \Sigma'' x''^2 r + S''' \Sigma x'' x''' r + \ldots \\ 0 &= \Sigma''' x''' l\delta t + \Sigma x''' \mathfrak{S} r + S' \Sigma x' x''' r + S'' \Sigma x'' x''' r + S''' \Sigma''' x'''^2 r + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

usf. Nachdem die Stabkräfte der überzähligen Stäbe berechnet worden sind, ergeben sich die übrigen Stabkräfte durch die Gleichungen 18).

In betreff der Summierungen ist zu beachten, daß die Größe $\mathfrak{S}$ für alle überzähligen Stäbe gleich null ist; daher erstrecken sich die Summen $\Sigma x \mathfrak{S} r$ nur auf die Stäbe des einfachen Fachwerks. Die Größe x' ist für den überzähligen Stab (1) gleich eins, für alle anderen überzähligen Stäbe gleich null. Die Summen $\Sigma' x' l\delta t$ und $\Sigma' x'^2 r$ erstrecken sich also auf die Stäbe des einfachen Fachwerks und außerdem nur auf den überzähligen Stab (1), was durch das Zeichen Σ' angedeutet wird. Ebenso erstrecken sich die Summen $\Sigma'' x'' l\delta t$ und $\Sigma'' x''^2 r$ auf die Stäbe des einfachen Fachwerks und außerdem nur auf den überzähligen Stab (2), usf. Für alle *Stützstäbe* ist r gleich null; die Summen mit dem Faktor r erstrecken sich also nicht auf die Stützstäbe. Soll eine Aenderung der Stützenlage in Rechnung gestellt werden, so kann man sich vorstellen, daß die betreffenden Längenänderungen der Stützstäbe durch *Temperaturänderungen* derselben herbeigeführt worden sind. In die Summen $\Sigma x l\delta t$, die sich alsdann auch auf die Stützstäbe erstrecken, ist die gegebene Längenänderung eines solchen Stabes gleich $l\delta t$ einzusetzen.

Die in den Gleichungen 19) vorkommenden Summen sind in der Regel *durch Rechnung* zu bestimmen, weil das graphische Verfahren nicht genau genug ist und in den meisten Fällen auch keine Zeitersparnis gewährt. Nur in besonderen Fällen kann dieses Verfahren in Betracht kommen. Wir verweisen auf das im Abschnitt 19 dieser Abhandlung beschriebene Beispiel.

Bevor wir zu Anwendungen auf die gebräuchlichsten Formen der zusammengesetzten Fachwerke übergehen, sollen in den folgenden Abschnitten einige allgemeine Beziehungen abgeleitet werden, die an Stelle unseres Verfahrens zur Berechnung der Stabkräfte zusammengesetzter Fachwerke benutzt werden können, *wenn Aenderungen der Temperatur und der Stützenlage nicht in Betracht kommen.* Der Leser erhält hierdurch Gelegenheit, Vergleiche anzustellen.

16. Die Formänderungsarbeit eines zusammengesetzten Fachwerks. Wir bestimmen zunächst die Arbeit A, welche zur Längenänderung der Stäbe erforderlich ist, *wenn das unbelastete und gewichtslose Fachwerk im spannungslosen Zustande sich befindet,* wenn also die Temperaturen der überzähligen Stäbe den Bedingungen

$$0 = \Sigma' \varkappa' l \delta t = \Sigma'' \varkappa'' l \delta t = \ldots$$

entsprechen. Werden die Lasten K mit Einschluß des Eigengewichtes in beliebiger, aber stetiger Weise auf das Fachwerk gebracht, so ändert sich jede Stabkraft stetig von *null* bis zu ihrem Endwerte, der mit U bezeichnet werden möge, und die Länge des Stabes von l bis

$$l + \Delta l = l + Ur.$$

Der Stab erfordert eine Formänderungsarbeit von der Größe

$$\int_{S=0}^{S=U} S\,dl = r \int_0^U S\,dS = \frac{1}{2} U^2 r = \frac{1}{2} U \Delta l.$$

Die Formänderungsarbeit für *alle* Stäbe ist demnach

$$A = \frac{1}{2} \Sigma U^2 r = \frac{1}{2} \Sigma U \Delta l.$$

Ein zweiter Wert ergibt sich *durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten,* indem man aus jedem Stab des belasteten Fachwerks ein Stück herausschneidet und von den Knoten des Fachwerks die Wege durchlaufen läßt, welche durch die Formänderung des Fachwerks, d. h. durch die Längenänderungen Δl der

Stäbe bestimmt sind. Legen die Lasten K_1, K_2, K_3 ... in ihren Richtungen hierbei die Wege w_1, w_2, w_3 ... zurück, so ist nach Gleichung 1):

$$\Sigma U \Delta l = \Sigma K w$$

und folglich:

$$A = \frac{1}{2} \Sigma U \Delta l = \frac{1}{2} \Sigma U^2 r = \frac{1}{2} \Sigma K w. \tag{20}$$

Läßt man also bei der Temperatur des spannungslosen Zustandes die Lasten eines Fachwerks in beliebiger, aber stetiger Weise von null bis zu ihren Endwerten K anwachsen, so ist die von den Lasten während der Formänderung geleistete Arbeit unabhängig von der Art und Weise, wie die Lasten entstehen, und immer halb so groß, wie sie sein würde, wenn die Lasten während der ganzen Formänderung ihre Endwerte K hätten.

Jeder elastische Körper kann angesehen werden als eine Gruppe von materiellen Punkten, deren Abstände voneinander unter Einwirkung der inneren Kräfte nach dem Hookeschen Gesetze sich ändern. Er bildet also ein Fachwerk, allerdings mit unendlich vielen überzähligen Stäben, was aber hier nicht in Betracht kommt. Der vorstehende, zuerst von *Clapeyron* ausgesprochene Satz gilt demnach nicht nur für das Fachwerk, sondern auch für jeden gestützten elastischen Körper.

Wir wenden uns nun zu dem allgemeinen Falle, in dem die Stabkräfte T des *unbelasteten* Fachwerks *nicht* gleich null sind. Durch die Wirkung der Belastungen kommen zu den Kräften T die Stabkräfte U hinzu, so daß das belastete Fachwerk die Stabkräfte

$$S = T + U$$

aufzunehmen hat. Man hat auch in diesem Falle die Arbeitsumme

$$A_1 = \frac{1}{2} \Sigma S^2 r = \frac{1}{2} \Sigma T^2 r + \Sigma T U r + \frac{1}{2} \Sigma U^2 r \tag{21}$$

die *Formänderungsarbeit des Fachwerks* genannt, was, wie die Erfahrung gezeigt hat, sehr geeignet ist, Verwirrungen anzurichten. Der vorstehende Ausdruck läßt sich vereinfachen, indem man beachtet, daß zufolge Gleichung 1) die Summe

$$\Sigma T U r = 0$$

ist. Denn die Kräfte T bilden an jedem Knoten des *unbelasteten* Fachwerks eine Gleichgewichtsgruppe, und die Längenänderungen

$$\Delta l = U r$$

bestimmen eine mögliche Formänderung des Fachwerks. Demnach ist

$$A_1 = \frac{1}{2} \Sigma U^2 r + \frac{1}{2} \Sigma T^2 r = A + \frac{1}{2} \Sigma T^2 r. \qquad (22)$$

Die Arbeit A ist bei gegebener Belastung eine *unveränderliche* Größe, die Stabkräfte T dagegen ändern sich *mit den Stabtemperaturen.* Da alle Glieder der Summe $\Sigma T^2 r$ *positiv* sind, so folgt der Satz von *Menabrea: Bei gegebener Belastung erreicht die Formänderungsarbeit A_1 ihren kleinsten Wert A, wenn das unbelastete Fachwerk spannungslos ist.* Dieser Satz gilt auch, wenn das Fachwerk durch einen gestützten elastischen Körper ersetzt wird.

Die Bedingungen des Minimums der Formänderungsarbeit A_1 können angewandt werden, um die von einer gegebenen Belastung erzeugten Stabkräfte zu bestimmen, *wenn das unbelastete Fachwerk spannungslos ist.* Die voneinander unabhängigen veränderlichen Größen, von denen A_1 abhängig ist, sind die *Stabtemperaturen t.* Aus den Gleichungen 19) ist jedoch zu ersehen, daß auch jede der Stabkräfte S', S'', S''' ... der *überzähligen* Stäbe unabhängig von den anderen willkürlich geändert werden kann, wenn gleichzeitig die Stabtemperaturen so geändert werden, daß die Bedingungen der Gleichungen 19) bestehen bleiben. Als Bedingungen des Minimums können daher die Gleichungen gelten:

$$0 = \frac{\partial A_1}{\partial S'} = \Sigma Sr \frac{\partial S}{\partial S'}, \quad 0 = \frac{\partial A_1}{\partial S''} = \Sigma Sr \frac{\partial S}{\partial S''}, \text{ usf.,} \qquad (23)$$

aus denen in Verbindung mit den Gleichungen 18) folgt:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \Sigma x' \mathfrak{S} r + S' \Sigma' x'^2 r + S'' \Sigma x' x'' r + \ldots \\ 0 &= \Sigma x'' \mathfrak{S} r + S' \Sigma x' x'' r + S'' \Sigma'' x''^2 r + \ldots \end{aligned} \right\} \qquad (24)$$

usf. Das Ergebnis der vorstehenden Betrachtung wird auf einem einfacheren Wege erreicht, indem man in unseren Gleichungen 19) die Abweichungen t der Stabtemperaturen von denen des spannungslosen Zustandes gleich null setzt.

Zwei weitere bemerkenswerte Beziehungen lassen sich ableiten, indem man die Formänderungsarbeit A *bei unveränderlichen Stabtemperaturen* ansieht als eine Funktion der veränderlichen Lasten K_1, K_2, K_3 ... und nun die erste Abgeleitete dieser Funktion nach einer

der Lasten, z. B. nach K_1 bildet. Man gelangt zu zwei verschiedenen Ausdrücken, je nachdem man die Form

$$A = \frac{1}{2} \Sigma U^2 r$$

oder

$$A = \frac{1}{2} \Sigma K w$$

in Rechnung bringt. Im *ersten* Falle ist

$$\frac{\partial A}{\partial K_1} = \Sigma U r \frac{\partial U}{\partial K_1}.$$

Die Größen $\frac{\partial U}{\partial K_1}$ bezeichnen die Stabkräfte, die *in den Stäben des zusammengesetzten Fachwerks* von einer einzigen Last

$$K_1 = 1$$

hervorgerufen werden. Läßt man die Knoten des Fachwerks mit dieser Einzellast und den zugehörigen Stabkräften $\frac{\partial U}{\partial K_1}$ die Wege durchlaufen, welche durch die Längenänderungen

$$\Delta l = U r$$

bestimmt sind, so ergibt sich nach Gleichung 1) der Weg w_1, den die Last K_1 zurücklegt, durch die Gleichung

$$w_1 \cdot 1 = w_1 = \Sigma U r \frac{\partial U}{\partial K_1}.$$

Demnach ist

$$\frac{\partial A}{\partial K_1} = w_1 \tag{25}$$

oder in Worten: *Betrachtet man die Formänderungsarbeit A eines zusammengesetzten Fachwerks bei unveränderlichen Stabtemperaturen als eine Funktion der voneinander unabhängigen veränderlichen Lasten, so ist bei jeder gegebenen Belastung K_1, K_2, K_3 ... der elastische Weg w_1 der Last K_1 in der Richtung dieser Kraft gleich der ersten Abgeleiteten von A nach K_1.*

Auch dieser, zuerst von *Castigliano* ausgesprochene Satz kann ebenso wie der Satz von Clapeyron ohne weiteres auf jeden gestützten elastischen Körper übertragen werden. Zur Berechnung des Weges w_1 eignet sich die Gleichung 25) nicht, weil die Bestimmung *der Stabkräfte* $\frac{\partial U}{\partial K}$ *in den Stäben des zusammengesetzten*

Fachwerks zu umständlich sein würde. Zu diesem Zweck erfordert die Formel eine weitere Umformung, auf die wir hier nicht näher eingehen, weil wir in der Gleichung 8) ein einfacheres Hilfsmittel gegeben haben; denn der Weg w_1 ist vollkommen bestimmt durch die Längenänderungen

$$\Delta l = Ur$$

der *notwendigen* Stäbe des *zusammengesetzten* Fachwerks. Bezeichnet man mit $\varkappa$ die Einflußzahlen der Last K_1 für die Stabkräfte des *einfachen* Fachwerks, das durch Beseitigung der überzähligen Stäbe entsteht, so ist nach jener Gleichung

$$w_1 = \Sigma \varkappa U r. \tag{26}$$

Diese Summe erstreckt sich also nur auf die Stäbe des *einfachen* Fachwerks (vergl. Abschnitt 10).

Wählt man *zweitens* die Form:

$$A = \frac{1}{2}(K_1 w_1 + K_2 w_2 + K_3 w_3 + \ldots),$$

so erhält man durch Differentiieren:

$$\frac{\partial A}{\partial K_1} = \frac{1}{2}\left(w_1 + K_1 \frac{\partial w_1}{\partial K_1} + K_2 \frac{\partial w_2}{\partial K_1} + K_3 \frac{\partial w_3}{\partial K_1} + \ldots\right)$$

und in Verbindung mit der Gleichung 25):

$$w_1 = K_1 \frac{\partial w_1}{\partial K_1} + K_2 \frac{\partial w_2}{\partial K_1} + K_3 \frac{\partial w_3}{\partial K_1} + \ldots \tag{27}$$

oder

$$w_1 \, \partial K_1 = K_1 \, \partial w_1 + K_2 \, \partial w_2 + K_3 \, \partial w_3 + \ldots$$

Diese Gleichung bildet einen besonderen Fall des Satzes von Betti, den wir im nächsten Abschnitt ableiten und erklären werden.

17. Eine allgemeine Beziehung zwischen je zwei elastischen Formänderungen eines einfachen oder zusammengesetzten Fachwerks. Wir bezeichnen mit p und q zwei *vollkommen gleiche* Fachwerke, die im unbelasteten Zustande spannungslos sind. Das Fachwerk p trägt die nach Größe, Lage und Richtung gegebenen Lasten P_1, P_2, P_3 . . ., welche die Stabkräfte S_p und also Längenänderungen Δl der Stäbe von der Größe rS_p hervorrufen. Ebenso werden die Lasten des Fachwerks q mit Q_1, Q_2, Q_3 . . ., die Stabkräfte mit S_q und die Längenänderungen Δl der Stäbe mit rS_q bezeichnet. Wir bilden die Gleichgewichtsgruppen der einzelnen Knoten beider Fachwerke, in-

dem wir aus jedem Stabe ein Stück herausschneiden, und lassen zunächst die Knoten des Fachwerks p die Wege durchlaufen, welche der elastischen Formänderung des Fachwerks q entsprechen. Bei dieser Bewegung leisten die Kräfte P eine Arbeitsumme A_p und die Stabkräfte S_p die Arbeit $-\Sigma S_p S_q r$. Zufolge Gleichung 1) ist

$$0 = A_p - \Sigma S_p S_q r.$$

Wir lassen zweitens die Knoten des Fachwerks q die Wege durchlaufen, welche der Formänderung des Fachwerks p entsprechen und welche durch die Längenänderungen der Stäbe $S_p r$ bestimmt sind. Hierbei leisten die Lasten Q eine Arbeit A_q und die Stabkräfte S_q die Arbeitsumme $-\Sigma S_q S_p r$. Gleichung 1) fordert wiederum

$$0 = A_q - \Sigma S_q S_p r.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$A_p = A_q. \qquad (28)$$

Die Lasten P_1, P_2, P_3 . . . des Fachwerks p leisten also bei der elastischen Formänderung des Fachwerks q dieselbe Arbeitsumme wie die Lasten Q_1, Q_2, Q_3 . . . des Fachwerks q bei der Formänderung des Fachwerks p.

Auch dieser Satz, welcher in anderer Form und Herleitung von Professor *Betti* in der italienischen Zeitschrift Nuovo Cimento, 1872 mitgeteilt wurde, kann ohne weiteres auf jeden gestützten, elastischen Körper übertragen werden. Von seinen Anwendungen sind folgende die wichtigsten:

1. Das Fachwerk p trägt nur *eine* Last P, das Fachwerk q ebenfalls nur *eine* Last Q. Beide Lasten sind von gleicher Größe, können aber nach Richtung und Angriffspunkt verschieden sein. Bei der elastischen Formänderung des Fachwerks p legt der Angriffspunkt der Last Q den Weg w_p zurück; ebenso bezeichnet w_q den Weg des Angriffspunktes von P bei der Formänderung des Fachwerks q. Nach dem Satze von Betti ist:

$$P w_q \cos(P, w_q) = Q w_p \cos(Q, w_p)$$

oder

$$w_q \cos(P, w_q) = w_p \cos(Q, w_p),$$

d. h. *die Projektion des Weges w_q auf die Kraft P ist ebenso groß wie die Projektion des Weges w_p auf die Kraft Q.*

Diese Beziehung wurde im Jahre 1864 von *Maxwell* in der englischen Zeitschrift The Philosophical Magazine mitgeteilt und aus dem Satze Clapeyrons abgeleitet. In Deutschland, wo sie erst

zwanzig Jahre später bekannt wurde, bezeichnet man sie als den *Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen.*

2. Das Fachwerk p trägt eine einzige Last P_0, das Fachwerk q dagegen eine Gruppe von Lasten Q_1, Q_2, Q_3 . . .; alle Lasten P, Q sind gleich gerichtet, z. B. lotrecht. Die Biegungslinie, welche die Formänderung des Fachwerks p darstellt, bestimmt die Senkungen y_1, y_2, y_3 . . . der Angriffspunkte der Lasten Q_1, Q_2, Q_3. . . . Bezeichnet man ferner mit y_0 die Senkung des Angriffspunktes von P_0 bei der Formänderung des Fachwerks q, so folgt aus dem Satze von Betti:

$$P_0 y_0 = Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + Q_3 y_3 + \cdots$$

oder

$$y_0 = \frac{\Sigma Q y}{P_0}. \tag{29}$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Beziehung wurde in meinem *Beitrage zur Theorie des Fachwerks* vom Jahre 1875 vermittels des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten abgeleitet, und zwar zu einer Zeit, als die Sätze von Betti und Maxwell mir und überhaupt in Deutschland noch nicht bekannt waren. Man vergleiche die Gleichung 12 der vorliegenden Abhandlung und den Abschnitt 5 der Abhandlung IX.

3. Das Fachwerk p trägt eine einzige Last P, das Fachwerk q dagegen eine Gruppe von *beliebig gerichteten* Lasten Q_1, Q_2, Q_3 . . .

Vermittels des Geschwindigkeitsplanes der Formänderung p läßt sich für jede gegebene Lastengruppe (Q) die Arbeit A_q bestimmen. Die Bedingung

$$A_q = A_p = Pw$$

ergibt dann den Weg w, den der Angriffspunkt von P in der Richtung dieser Last bei der Formänderung q zurücklegt.

Hierher gehört auch der durch Gleichung 27) bezeichnete Fall: Die Einzellast

$$P = \partial K_1$$

erzeugt eine Formänderung des Fachwerks p, bei der die Angriffspunkte der Lasten K_1, K_2, K_3 . . . in den Richtungen dieser Lasten die Verschiebungen ∂w_1, ∂w_2, ∂w_3 . . . erleiden. Die Verschiebung w_1, die der Angriffspunkt von ∂K_1 bei der von den Lasten K_1, K_2, K_3 . . . erzeugten Formänderung in der Richtung von K_1 ausführt, hat daher die Größe

$$w_1 = K_1 \frac{\partial w_1}{\partial K_1} + K_2 \frac{\partial w_2}{\partial K_1} + K_3 \frac{\partial w_3}{\partial K_1} + \cdots$$

Zu den Anwendungen des Satzes von Betti gehört ferner die *Bestimmung von Einflußlinien*, wovon *ein* Beispiel bereits in Gleichung 29) gegeben wurde. Als zweites Beispiel wählen wir die folgende Aufgabe:

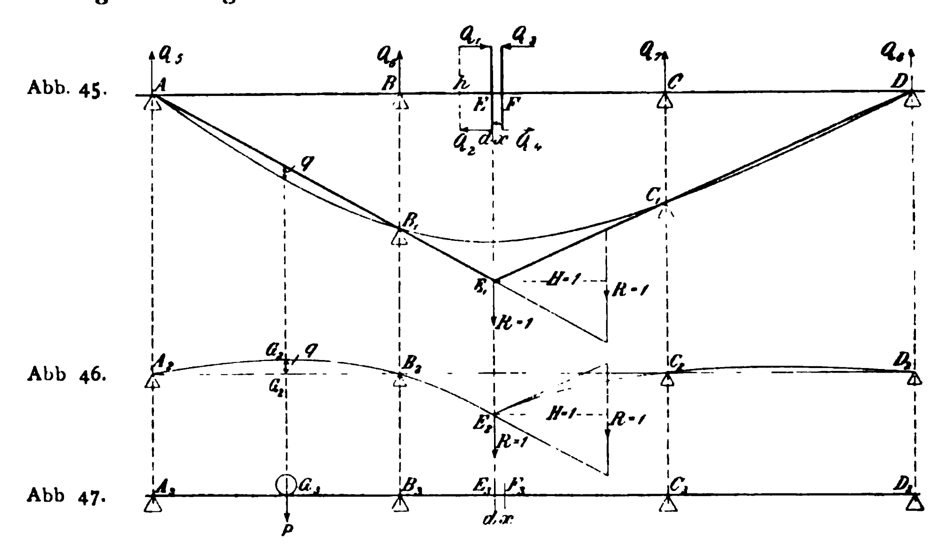


Abb. 45.

Abb 46.

Abb 47.

Der in Abb. 45 dargestellte kontinuierliche Balken konstanten Querschnitts ruht auf den vier in einer Horizontalen liegenden Stützen A, B, C, D. Es soll das Biegungsmoment M_e, das von der wandernden Einzellast P in dem gegebenen Balkenquerschnitt E erzeugt wird, für jede Lage der Last bestimmt und durch die Einflußlinie $A_2 B_2 E_2 C_2 D_2$ (Abb. 46) graphisch dargestellt werden. Dieselbe Aufgabe ist auf einem anderen Wege in der Abhandlung IX, Abschnitt 12 gelöst worden.

Wir bezeichnen mit ε den Elastizitätsmodul des Balkenmaterials, mit J das Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts und mit dx die Länge einer unendlich kleinen, dem Querschnitt E *benachbarten* Balkenstrecke EF. Um die Kräftegruppe (Q) zu bilden, lassen wir auf den Balkenquerschnitt E das Kräftepaar Q_1, Q_2 mit dem unendlich großen positiven Moment

$$Q_1 h = \frac{\varepsilon J}{dx}$$

und auf den Querschnitt F das Kräftepaar Q_3, Q_4 mit einem ebenso großen negativen Moment einwirken. Die bezeichneten vier Lasten Q erzeugen die Stützendrücke Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, die Biegungsmomente M_q und die in Abb. 46 durch die elastische Linie $A_2 B_2 E_2 C_2 D_2$ dar-

gestellte Formänderung. Bei dieser Formänderung leistet eine im Punkte G_3 (Abb. 47) angebrachte Last P die Arbeit

$$A_p = -Pq.$$

Diese Arbeit ist in dem vorliegenden Beispiel negativ, weil der Punkt G_3 des Balkens um die Strecke

$$q = G_3 G_2$$

sich *hebt.*

Die Belastung der Seilkurve $A_2 B_2 E_2 C_2 D_2$ hat auf der unendlich kleinen Strecke EF die *endliche* Größe

$$R = \frac{Q_1 h \, dx}{\varepsilon J} = \frac{\varepsilon J \, dx}{dx \, \varepsilon J} = 1.$$

Daher hat die Seilkurve im Punkte E_2 einen *Knick,* dessen Größe durch die Horizontalkraft H und die Last R:

$$H = R = 1$$

bestimmt wird. Auf jeder anderen Strecke dx, auf welcher das Biegungsmoment die Größe M_q hat, ist die Belastung der Seilkurve von der *unendlich kleinen* Größe $-\frac{M_q \, dx}{\varepsilon J}$ (vergl. IX, 1). Im vorliegenden Beispiel sind alle diese Lasten negativ, d. h. sie zeigen nach oben.

Man kann die Bestimmung der Ordinaten q vereinfachen, indem man, wie in Abb. 45 geschehen ist, das Seilpolygon $A E_1 D$ der Last R und gesondert davon die Seilkurve $A B_1 C_1 D$ der positiven Lasten $+\frac{M_q \, dx}{\varepsilon J}$ bildet. Auf jeder Vertikalen schneiden diese beiden Seillinien die Ordinate q ab. Die Seilkurve $A B_1 C_1 D$ ist die elastische Linie des *unbelasteten* und in den Punkten A, B_1, C_1, D gestützten Balkens. Die Bildung dieser Linie wurde in der Abhandlung IX, Abschnitt 16 beschrieben; es erscheint unnötig, die Beschreibung hier zu wiederholen.

Bei der Belastung des Balkens durch die Einzellast P im Punkte G_3 (Abb. 47) nimmt der Balkenquerschnitt E_3 ein negatives Biegungsmoment M_e auf und dreht sich gegen seinen Nachbarquerschnitt F_3 in negativem Sinne um den unendlich kleinen Winkel

$$d\varphi = \frac{M_e \, dx}{\varepsilon J}$$

(vergl. VIII, 2). Die beiden Kräftepaare (Q_1, Q_2) und (Q_3, Q_4) leisten daher bei der Formänderung p die negative Arbeit

$$A_q = Q_1 h\, d\varphi = \frac{\varepsilon J}{dx} \cdot \frac{M_e\, dx}{\varepsilon J} = M_e.$$

Die Bedingung

$$A_q = A_p$$

des Satzes von Betti fordert demnach im vorliegenden Falle

$$M_e = -Pq.$$

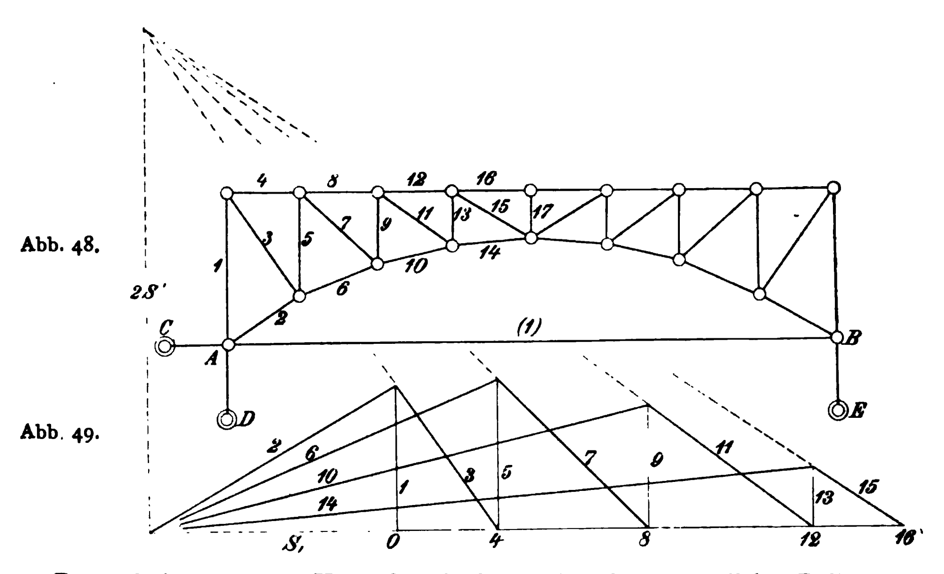
Legt man der Ordinate q das *positive* Vorzeichen bei, wenn sie in Abb. 46 *unter* der Abszissenachse $A_2 D_2$ liegt, so wird für jede Lage der wandernden Last P das Biegungsmoment M_e *auch dem Vorzeichen nach* durch das Produkt

$$M_e = Pq$$

bestimmt, und da P unveränderlich ist, also graphisch dargestellt durch die Ordinaten q in den Abb. 45 und 46.

Die Lösung der vorstehenden Aufgabe ändert sich nicht wesentlich, wenn der Querschnitt des Balkens veränderlich ist.

18. Das Bogenfachwerk mit Kämpfergelenken. Die drei wichtigsten Formen des zusammengesetzten Fachwerks sind das



Bogenfachwerk mit Kämpfergelenken, das kontinuierliche Balkenfachwerk und das Bogenfachwerk ohne Kämpfergelenke. Um die Anwendung der Gleichungen 19) auf diese drei Formen zu erläutern,

wählen wir drei Beispiele, in denen die Anzahl der überzähligen Stäbe 1, 2 und 3 ist.

Das durch Abb. 48 im Maßstabe 1 : 300 dargestellte Bogenfachwerk enthält 18 Knoten und mit Einschluß der vier Stützstäbe CA, DA, AB, EB 37 Stäbe. Es enthält demnach nur *einen* überzähligen Stab (1), dessen Stabkraft S' durch die erste der Gleichungen 19) bestimmt wird:

$$S' = -\frac{\Sigma' x' l \delta t + \Sigma x' \mathfrak{S} r}{\Sigma' x'^2 r}. \tag{30}$$

Als *überzähliger* Stab kann zwar nach Belieben irgend ein Stab des Fachwerks bezeichnet werden; man gewinnt jedoch einen Rechnungsvorteil, wenn man den die beiden Kämpfergelenke verbindenden Stützstab AB wählt, weil dieser Stab zu den beiden Bogenhälften ***symmetrisch*** liegt. Infolgedessen sind für je zwei symmetrisch liegende Stäbe die Einflußzahlen x' und bei symmetrischer Belastung auch die Stabkräfte $\mathfrak{S}$ von gleicher Größe.

Wir nehmen an, daß die Stabquerschnitte F und also die Größen $r = \frac{l}{\varepsilon F}$ gegeben sind. Für die vier Stützstäbe ist $r = 0$ zu setzen, weil diese Stäbe an den elastischen Formänderungen nicht teilnehmen. Die Rechnung zerfällt nun in folgende Abschnitte:

1. *Graphische Bestimmung der Einflußzahlen x'.* Die Stabkräfte $x'S'$, die in den Stäben des einfachen Fachwerks durch eine Stabkraft S' gleich eins des überzähligen Stabes AB hervorgerufen werden, sind durch den Kräfteplan Abb. 49 in dem Maßstabe 1 cm = 0,3 bestimmt worden. Bei der Bildung desselben wurde zur Ermäßigung der Zeichenfehler das im Abschnitt 4 der Abhandlung II beschriebene Verfahren angewandt.

Abb. 50.

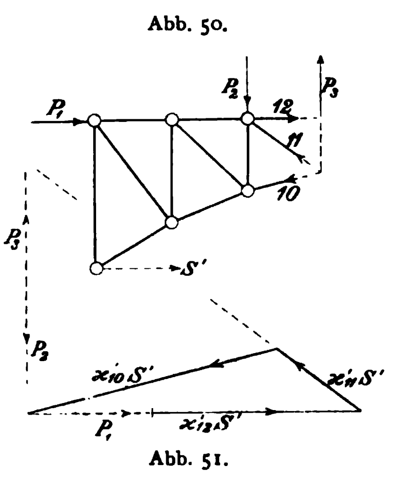


Abb. 51.

Beispiel. Die in Abb. 50 mit 10, 11, 12 bezeichneten Kräfte $x'_{10}S'$, $x'_{11}S'$, $x'_{12}S'$ bilden mit S' eine Gleichgewichtsgruppe. Wir ersetzen die Kraft S' durch drei Kräfte P_1, P_2, P_3, die durch Schnittpunkte der Kräfte 10, 11, 12 gehen:

$$P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ldots S'.$$

P_1 hat Größe, Richtung und Sinn von S':

$$P_1 = S' = 1.$$

Daher ist

$$P_2 \ddagger P_3 \equiv S' +\!\!+ P_1.$$

Da im vorliegenden Beispiel der Arm des Kräftepaares $(S' +\!\!+ P_1)$ doppelt so groß ist als der des Paares $(P_2 \ddagger P_3)$, so ist

$$P_2 = P_3 = 2S' = 2.$$

Aus der Gleichgewichtsgruppe

$$0 \equiv P_1 \ddagger P_2 \ddagger P_3 \ddagger \varkappa'_{10} S' \ddagger \varkappa'_{11} S' \ddagger \varkappa'_{12} S'$$

entstehen die beiden gleichwertigen Gruppen:

$$+\!\!+ \varkappa'_{10} S' +\!\!+ P_3 \qquad P_2 \ddagger P_1 \ddagger \varkappa'_{12} S' \ddagger \varkappa'_{11} S',$$

deren gemeinschaftliche Resultante die Richtung des Stabes 11 hat. Hiernach konnte der Kräfteplan dieser beiden Gruppen (Abb. 51) im Maßstabe 1 cm = 0,6 gebildet werden.

In der Abb. 49 sind die Kräfte $\varkappa'_1 S'$, $\varkappa'_2 S'$, $\varkappa'_3 S' \ldots$, die im Maßstabe 1 cm = 0,3 die Einflußzahlen $\varkappa'_1$, $\varkappa'_2$, $\varkappa'_3 \ldots$ bestimmen, mit 1, 2, 3 . . . bezeichnet. Die Strecken $\varkappa'_4$, $\varkappa'_8$, $\varkappa'_{12}$, $\varkappa'_{16}$ haben den gemeinschaftlichen Anfangspunkt 0, und ihre Endpunkte sind mit 4, 8, 12, 16 bezeichnet. Die *negativen* Werte von $\varkappa'$ werden durch kräftigere Linien gekennzeichnet.

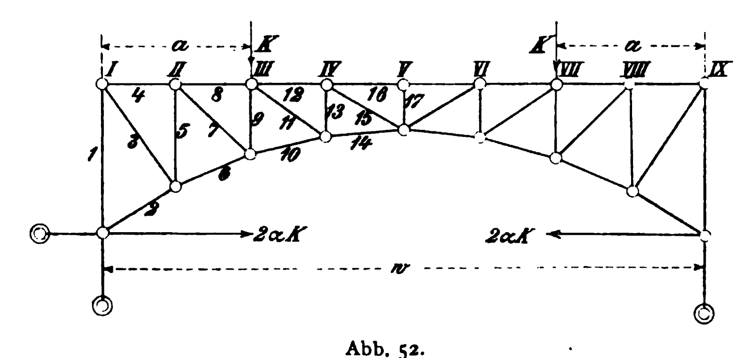


Abb. 52.

2. *Die Bestimmung der Stabkräfte* $\mathfrak{S}$, welche von zwei symmetrisch liegenden Einzellasten K hervorgerufen werden. Die Berechnung der Stabkraft S' des überzähligen Stabes (1)

$$S' = \alpha K,$$

die von einer Last K irgend eines Knotens III erzeugt wird, vereinfacht sich, wenn eine zweite Last K des zum Knoten III sym-

metrisch belegenen Knotens VII (Abb. 52) hinzugefügt wird. Um die von dieser symmetrischen Belastung erzeugte Stabkraft

$$S' = 2\,\alpha K \tag{31}$$

zu ermitteln, brauchen die Stabkräfte $\mathfrak{S}$ nur für *eine* Balkenhälfte bestimmt zu werden. Der belastete Knoten III, dessen wagerechter Abstand vom linken Auflager mit a bezeichnet wird, trennt die Stäbe der linken Balkenhälfte in zwei Gruppen. Die Stabkräfte

$$\mathfrak{S} = \beta K \tag{32}$$

der ***ersten*** Gruppe, zu der die Stäbe 1 bis 10 gehören, werden in dem Maßstabe

$$1\,\text{cm} = 1{,}5\,K$$

durch den Kräfteplan Abb. 53 bestimmt; die mit den Zahlen 1, 2, 3 ... bezeichneten Strecken ergeben also die Einflußzahlen β in dem Maßstabe 1 cm = 1,5.

Beispiel. In Abb. 54 bilden die mit 6, 7, 8 bezeichneten Kräfte $\beta_6 K$, $\beta_7 K$, $\beta_8 K$ mit dem Auflagerdruck K eine Gleichgewichts-

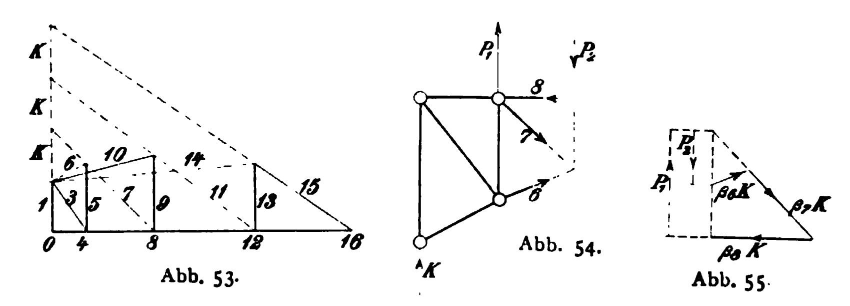


Abb. 53. Abb. 54. Abb. 55.

gruppe. Die Kraft K wird ersetzt durch die gleichwertige Gruppe der zwei Kräfte P_1, P_2, deren Größen

$$P_1 = 2\,K, \quad P_2 = K$$

aus ihrer Lage unmittelbar sich ergeben. Die Gleichgewichtsgruppe:

$$0 = P_1 \ddagger P_2 \ddagger \beta_6 K \ddagger \beta_7 K \ddagger \beta_8 K$$

bestimmt die beiden gleichwertigen Gruppen:

$$+\!\!\!+\, \beta_6 K +\!\!\!+\, P_2 \quad \beta_7 K \ddagger \beta_8 K \ddagger P_1,$$

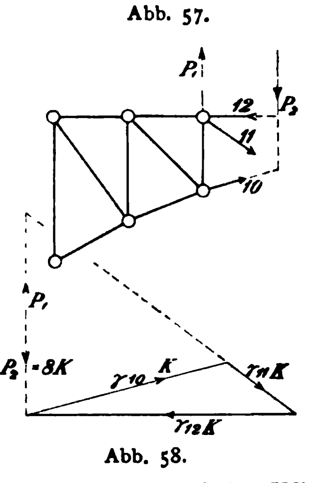
deren gemeinschaftliche Resultante mit dem Stabe 7 zusammenfällt. Hieraus ergibt sich der Kräfteplan der beiden Gruppen, welcher in Abb. 55 in dem oben angegebenen Maßstabe dargestellt ist.

Die Stabkräfte $\mathfrak{S}$ der *zweiten* Stabgruppe, zu der die Stäbe 11 bis 17 gehören, werden in folgender Weise bestimmt:

Beispiel. Die Stabkräfte $\mathfrak{S}$ der Stäbe 10, 11, 12 (Abb. 57) bilden eine Gleichgewichtsgruppe mit dem Kräftepaar, welches aus dem Auflagerdruck K und der Last K des Knotens III besteht. Das positive Moment dieses Kräftepaars ist

$$Ka = \frac{a}{w} Kw, \qquad (33)$$

Abb. 57.



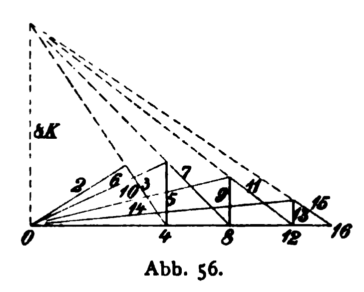


Abb. 56.

Abb. 58.

wenn mit w die Stützweite des Balkens bezeichnet wird. Wir bestimmen nun die Stabkräfte γK, welche durch ein Kräftepaar von dem *konstanten* positiven Moment Kw hervorgerufen werden, und erhalten darauf für $\mathfrak{S}$ die Werte:

$$\mathfrak{S} = \frac{a}{w} \gamma K. \qquad (34)$$

Wir legen die Vertikalkräfte

$$P_1 = P_2 = 8 K,$$

welche das Kräftepaar von dem positiven Moment Kw bilden, durch die Schnittpunkte der Stäbe 11, 12 und 10, 11 und zerlegen die Gleichgewichtsgruppe:

$$0 \mathrel{\bar{=}} P_1 \ddagger P_2 \ddagger \gamma_{10} K \ddagger \gamma_{11} K \ddagger \gamma_{12} K$$

in die beiden gleichwertigen Gruppen:

$$\mathbin{+\!\!+} \gamma_{10} K \mathbin{+\!\!+} P_2 \mathrel{\bar{=}} \gamma_{11} K \ddagger \gamma_{12} K \ddagger P_1,$$

deren gemeinschaftliche Resultante mit dem Stabe 11 zusammenfällt. Die Kraftepläne (Abb. 58 und 56) bestimmen die Kräfte γK in dem Maßstabe 1 cm gleich $3 K$, die Einflußzahlen γ also in dem Maßstabe 1 cm gleich 3.

Es ist zu bemerken, daß der Stab 10 nach Belieben zur ersten oder zur zweiten Stabgruppe gezählt werden kann, da die Gleichungen 32) und 34) für diesen Stab dieselbe Stabkraft $\mathfrak{S}$ ergeben.

Nachdem die Einflußzahlen $\varkappa'$, β und γ bestimmt worden sind, kann die Summe $\Sigma \varkappa' \mathfrak{S} r$ gebildet werden; sie zerfällt in zwei Teile, die durch die Summenzeichen Σ_0^a und $\Sigma_a^{\frac{w}{2}}$ bezeichnet werden. Der

erste Teil bezieht sich auf die Stäbe der ersten Gruppe, im vorstehenden Beispiel also auf die Stäbe 1 bis 10 und auf die symmetrisch liegenden Stäbe der rechten Balkenhälfte:

$$2\,\Sigma_0^a x'\beta K r = 2\,K\,\Sigma_0^a x'\beta r.$$

Der zweite Teil bezieht sich auf die Stäbe 11 bis 17 der zweitenStabgruppe und auf die entsprechenden Stäbe der rechten Balkenhälfte:

$$2\,\Sigma_a^{\frac{w}{2}} x'\,\frac{a}{w}\gamma K r = 2\,\frac{a}{w}\,K\,\Sigma_a^{\frac{w}{2}} x'\gamma r.$$

Demnach ist für die in Abb. 52 angegebene Belastung:

$$\Sigma x'\mathfrak{S} r = 2K\left(\Sigma_0^a x'\beta r + \frac{a}{w}\,\Sigma_a^{\frac{w}{2}} x'\gamma r\right). \qquad (35)$$

3. *Die Berechnung der Einflußzahlen* α. Wenn, wie wir zunächst annehmen, die Stabtemperaturen des spannungslosen Zustandes sich nicht ändern, die Summe $\Sigma x' l\delta t$ also gleich null ist, so ist nach den Gleichungen 30), 31) und 35) für die aus den zwei Lasten K bestehende symmetrische Belastung:

$$S' = 2\alpha K = -\frac{\Sigma x'\mathfrak{S} r}{\Sigma x'^2 r} = -\frac{2\,K\left(\Sigma_0^a x'\beta r + \frac{a}{w}\,\Sigma_a^{\frac{w}{2}} x'\gamma r\right)}{\Sigma x'^2 r}.$$

Demnach ist

$$\alpha = -\frac{\Sigma_0^a x'\beta r + \frac{a}{w}\,\Sigma_a^{\frac{w}{2}} x'\gamma r}{2\,\Sigma_0^{\frac{w}{2}} x'^2 r}. \qquad (36)$$

Für das vorliegende Beispiel sind die Werte der Einflußzahl α für die Abszissen a gleich $\frac{1}{8}w$, $\frac{2}{8}w$, $\frac{3}{8}w$, $\frac{4}{8}w$ in der umstehenden Tabelle berechnet worden.

Die Spalten 3, 4 und 5 enthalten die gegebenen Stablängen l, die gegebenen Stabquerschnitte F und das 10^7-fache der Größen

$$r = \frac{l}{\varepsilon F},$$

wobei der Elastizitätsmodul

$$\varepsilon = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/qcm}$$

angenommen wurde. Die Spalten 6, 7, 8 geben die 10-fachen Werte der aus den Kräfteplänen Abb. 49, 53, 56 entnommenen unbenannten Zahlen x', β, γ. Hieraus wurden die in den Spalten 9, 10 und 12 verzeichneten 10^7-fachen Werte von $x'^2 r$, $x'\beta r$ und $x'\gamma r$ berechnet. Durch Summierung ergaben sich die Größen $10^7\Sigma_0^{\frac{w}{2}} x'^2 r$ in

Tabelle, enthaltend die Berechnung der Einflußzahlen α.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\frac{a}{w}$	Stab	l	F	r	$10\,x'$	$10\,\beta$	$10\,\gamma$	$x'^2 r$	$x'\beta r$	$\sum_0^a x'\beta r$	$x'\gamma r$	$\sum_a^{\frac{w}{2}} x'\gamma r$	α
		cm	cm²	$\frac{1\ \text{cm}}{10^7\,\text{kg}}$				Einheit $\frac{1\ \text{cm}}{10^7\,\text{kg}}$					
	1	600	30	100	+ 6	− 10	—	36	− 60				
	2	347	150	12	− 12	0	—	17	0				
	3	520	40	65	− 7	+ 12	—	32	− 55				
	4	300	50	30	+ 4	− 7	—	5	− 8				
	5	425	30	71	+ 6	− 13	—	26	− 55				
$\frac{1}{8}$										− 178		− 2410	0,42
	6	325	150	11	− 15	+ 8	+ 61	25	− 13		− 101		
	7	424	40	53	− 8	+ 18	+ 33	34	− 76		− 140		
	8	300	50	30	+ 10	− 20	− 80	30	− 60		− 240		
	9	300	30	50	+ 5	− 15	− 20	13	− 38		− 50		
$\frac{2}{8}$										− 365		− 1879	0,72
	10	309	150	10	− 20	+ 21	+ 82	40	− 42		− 164		
	11	375	40	47	− 8	+ 25	+ 33	30	− 94		− 124		
	12	300	50	30	+ 17	− 40	− 107	87	− 204		− 546		
	13	225	30	38	+ 2	− 13	− 9	2	− 10		− 7		
$\frac{3}{8}$										− 715		− 1038	0,96
	14	301	150	10	− 27	+ 40	+ 107	73	− 108		− 289		
	15	361	40	45	− 4	+ 24	+ 16	7	− 43		− 29		
	16	300	50	30	+ 20	− 60	− 120	120	− 360		− 720		
	17	200	30	33	0	0	0	0	0		0		
$\frac{4}{8}$						$10^7 \sum_0^{\frac{w}{2}} x'^2 r =$		577		− 1226			1,06

Spalte 9, ferner $10^7 \sum_0^a x'\beta r$ sowie $10^7 \sum_a^{\frac{w}{2}} x'\gamma r$ in den Spalten 11 und 13. Die in Spalte 14 enthaltenen Werte der Einflußzahl α wurden nach Gleichung 36) berechnet. Beispielsweise ist für

$$a = \frac{2}{8} w: \quad \sum_0^a x'\beta r = -\frac{365}{10^7}, \quad \sum_a^{\frac{w}{2}} x'\gamma r = -\frac{1879}{10^7},$$

und da aus Spalte 9 für das ganze Fachwerk

$$\Sigma x'^2 r = \frac{2 \cdot 577}{10^7}$$

sich ergibt, so ist

$$\alpha = \frac{365 + \frac{2}{8} 1879}{1154} = 0{,}72.$$

4. *Die Bestimmung der Grenzwerte der Stabkräfte.* Die veränderlichen lotrechten Lasten K_1, K_2, $K_3 \ldots$ werden von den Knoten I, II, III . . . der *oberen* Gurtung des Fachwerks aufgenommen. Werden mit α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots$ die in der Tabelle berechneten Einflußzahlen dieser Lasten für die Stabkraft S' des überzähligen Stabes (1) bezeichnet, so hat bei einer gegebenen zusammengesetzten Belastung $K_1, K_2, K_3 \ldots$ die Stabkraft S' die Größe

$$S' = \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3 + \ldots$$

Wir bezeichnen ferner wie bisher für irgend einen Stab des durch Beseitigung des überzähligen Stabes entstehenden *einfachen* Fachwerks mit x_1, x_2, $x_3 \ldots$ die Einflußzahlen der Lasten K_1, K_2, $K_3 \ldots$, so daß die Stabkraft $\mathfrak{S}$ bestimmt wird durch die Gleichung

$$\mathfrak{S} = x_1 K_1 + x_2 K_2 + x_3 K_3 + \ldots$$

Die Stabkraft S dieses Stabes im zusammengesetzten Fachwerk hat also nach Gleichung 18) die Größe:

$$S = \mathfrak{S} + x' S'$$

oder

$$S = K_1 (x_1 + x'\alpha_1) + K_2 (x_2 + x'\alpha_2) + K_3 (x_3 + x'\alpha_3) + \ldots \quad (37)$$

Die Zahlenwerte x', α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots$ sind aus der Tabelle zu entnehmen. Um jede Stabkraft S als Funktion aller Lasten K darzustellen, bedarf es also nur noch der Bestimmung von x_1, x_2, $x_3 \ldots$ Diese Einflußzahlen können durch Kräftepläne dargestellt werden, wie im Abschnitt 8 beschrieben worden ist. Zieht man die *Rechnung* vor, so können hierbei die bereits bekannten Zahlen β und γ benutzt werden, wie an einem Beispiel gezeigt werden soll.

Beispiel. Einflußzahlen der Stabkraft des Stabes 15. Der Schnitt ss durch die Stäbe 14, 15 und 16 (Abb. 59) trennt die zu belastenden Knoten in zwei Gruppen (I, II, III, IV) und (V, VI, VII, VIII, IX), für die der Wert x verschiedene Formen annimmt. Wir belasten zunächst einen Knoten der *ersten* Gruppe, z. B. den Knoten III, und fügen zu den beiden Kräften P und $\frac{w-a}{w} P$, welche auf den Fach-

werksteil links vom Schnitt ss einwirken, noch die Gleichgewichtsgruppe P_1, P_2 hinzu, wodurch die zu bestimmende Stabkraft $\mathfrak{S}_{15}$

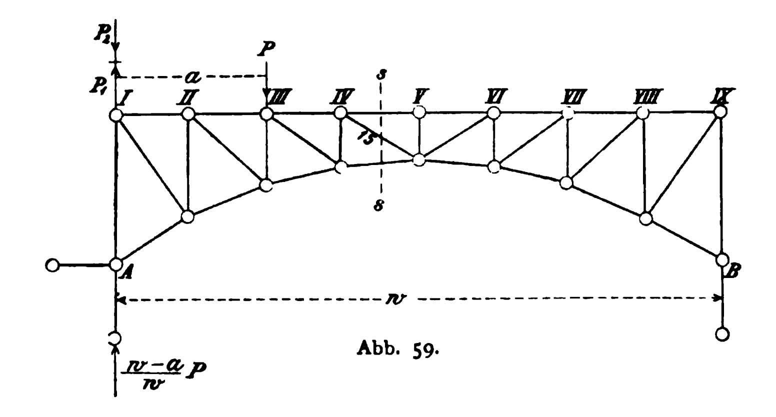


Abb. 59.

nicht geändert wird. Die beiden lotrechten Kräfte P_1, P_2 sind der Größe nach gleich P und dem Sinne nach einander entgegengesetzt. Das Kräftepaar P, P_1 erzeugt in dem Stabe 15 die Stabkraft

$$\frac{a}{w}\gamma_{15}P = \frac{2}{8}\cdot 1{,}6\,P = +\,0{,}4\,P.$$

Ferner haben die beiden zusammenfallenden Kräfte P_2 und $\frac{w-a}{w}P$ eine nach unten zeigende Resultante $\frac{a}{w}P$ und rufen also im Stabe 15 die Stabkraft

$$-\frac{a}{w}\beta_{15}P = -\frac{2}{8}\,2{,}4\,P = -\,0{,}6\,P$$

hervor. Demnach ist für jede links vom Schnitt liegende Last K

$$\varkappa = \frac{a}{w}(-\beta + \gamma). \tag{38}$$

Im vorliegenden Beispiel ist für den Stab 15:

$$\varkappa_3 = \frac{2}{8}(-\,2{,}4 + 1{,}6) = -\,0{,}2.$$

Ebenso ergibt sich für diesen Stab

$$\varkappa_1 = 0,\quad \varkappa_2 = -\,0{,}1,\quad \varkappa_4 = -\,0{,}3.$$

Wir belasten ferner einen Knoten der *zweiten* Gruppe, z. B. den Knoten VI. In diesem Falle wirkt auf den Fachwerksteil links vom

Schnitt eine einzige Kraft: die nach oben zeigende Stützkraft der Stütze A von der Größe

$$\frac{w-a}{w} P = \frac{3}{8} P,$$

welche im Stabe 15 die Stabkraft

$$\mathfrak{S} = \frac{w-a}{w} \beta P = \frac{3}{8} 2{,}4 P = +0{,}9 P$$

erzeugt. Demnach ist für jede *rechts* vom Schnitt liegende Last die Einflußzahl

$$\varkappa = \frac{w-a}{w} \beta \tag{39}$$

und für den Stab 15:

$$\varkappa_5 = +1{,}2, \quad \varkappa_6 = +0{,}9, \quad \varkappa_7 = +0{,}6, \quad \varkappa_8 = 0{,}3, \quad \varkappa_9 = 0.$$

Wir entnehmen ferner aus der Tabelle:

$$\alpha_1 = \alpha_9 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_8 = 0{,}42, \quad \alpha_3 = \alpha_7 = 0{,}72, \quad \alpha_4 = \alpha_6 = 0{,}96,$$
$$\alpha_5 = 1{,}06$$

und erhalten durch Einsetzen dieser Zahlenwerte in die Gleichung 37) für das vorliegende Beispiel:

$$S_{15} = -0{,}27 K_2 - 0{,}49 K_3 - 0{,}68 K_4 + 0{,}78 K_5 + 0{,}52 K_6$$
$$+ 0{,}31 K_7 + 0{,}13 K_8.$$

Beträgt für jeden der sieben Knoten die ständige Last 3 t und die größte bewegliche Last 9 t, so ist nach der vorstehenden Gleichung für den Stab 15:

$$S_{\min} = (-0{,}27 - 0{,}49 - 0{,}68 + 0{,}78 + 0{,}52 + 0{,}31 + 0{,}13)\, 3\,\text{t}$$
$$+ (-0{,}27 - 0{,}49 - 0{,}68)\, 9\,\text{t} = -12{,}1\,\text{t}$$

und

$$S_{\max} = (-0{,}27 - 0{,}49 - 0{,}68 + 0{,}78 + 0{,}52 + 0{,}31 + 0{,}13)\, 3\,\text{t}$$
$$+ (0{,}78 + 0{,}52 + 0{,}31 + 0{,}13)\, 9\,\text{t} = +16{,}6\,\text{t}.$$

Im *ersten* Falle sind die Knoten II, III, IV, im zweiten die Knoten V, VI, VII, VIII belastet.

Wenn eine solche Rechnung für alle Stäbe des Fachwerks auszuführen ist, so gibt man ihr zweckmäßig die tabellarische Form.

Will man zur Bestimmung der Grenzwerte *Einflußlinien* anwenden, so bildet man zweckmäßig *zwei* Polygone für jeden Stab: das erste mit den Ordinaten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ . . ., das zweite mit den Ordinaten $\varkappa'\alpha_1$, $\varkappa'\alpha_2$, $\varkappa'\alpha_3$ . . ., und zwar so, daß auf jeder Ordinate von den beiden Polygonen die algebraische Summe $(\varkappa + \varkappa'\alpha)$ abgeschnitten wird. Die Ausführung dieses Verfahrens bedarf keiner weiteren Beschreibung.

5. *Berechnung der Wirkungen von Temperaturänderungen der Stäbe.* Gewöhnlich wird das Fachwerk bei einer mittleren Temperatur aufgestellt, so daß die größten Temperaturänderungen + 40 und — 40° C. erreichen können.

Wir bestimmen für das vorliegende Beispiel die Wirkung einer gleichmäßigen Temperatur*erhöhung*

$$t = + 40^\circ \text{ C.}$$

unter der Voraussetzung, daß die vier Stützstäbe ihre Länge *nicht* ändern.

Infolge dieser Aenderung entsteht nach Gleichung 30) im überzähligen Stab (1) die Stabkraft

$$S' = - \frac{\delta t \Sigma' x' l}{\Sigma' x'^2 r}.$$

Da der überzählige Stab seine Länge nicht ändert, so erstrecken sich die beiden Summen nur auf die Stäbe des *einfachen* Balkenfachwerks, und es ist daher zu setzen:

$$S' = - \frac{\delta t \Sigma x' l}{\Sigma x'^2 r}. \tag{40}$$

Nach Gleichung 15) ist

$$\Sigma x' l = - l' = - 2400 \text{ cm.}$$

Ferner entnehmen wir aus der Tabelle:

$$\Sigma x'^2 r = + 1154 \frac{1 \text{ cm}}{10^7 \text{ kg}}.$$

Der Ausdehnungskoeffizient des Schmiedeisens ist

$$\delta = \frac{1}{80\,000}.$$

Daher ist

$$\delta t = \frac{40}{80\,000} = \frac{1}{2000}$$

und

$$S' = \frac{+ 2400 \; 10^7}{2000 \cdot 1154} = + 10\,400 \text{ kg.}$$

Die Stabkräfte des Fachwerks ändern sich infolge dieser Temperatureinwirkung um

$$x' S' = 10\,400 \, x' \text{ kg,}$$

die Stabkraft des Stabes 15 z. B. um

$$- 0{,}4 \cdot 10\,400 = - 4160 \text{ kg.}$$

6. *Wirkung von Aenderungen der Stützenlage.* Da in den drei Stützstäben CA, DA, EB (Abb. 48) des einfachen Balkenfachwerks durch eine Stabkraft S' des überzähligen Stabes (1) keine Spannungen hervorgerufen werden, so haben Längenänderungen jener drei Stäbe keinen Einfluß auf die Stabkräfte der übrigen Stäbe. Es kommen hier also nur die Längenänderungen des überzähligen Stabes (1) in Betracht, die durch Bewegungen der Widerlager des Bogenfachwerks herbeigeführt werden können. Für das vorliegende Beispiel sollen die Stabkräfte berechnet werden, die durch eine *Verlängerung des Stabes (1) um 1 cm* erzeugt werden. Man kann sich vorstellen, daß diese Längenänderung herbeigeführt wird von einer Temperaturerhöhung des überzähligen Stabes (1), durch welche seine Länge l' um

$$\Delta l' = l'\delta t = +1 \text{ cm}$$

sich vergrößert, während die Temperatur der übrigen Stäbe unverändert bleibt. Da für den Stab (1)

$$\varkappa' = +1$$

ist, so folgt

$$\Sigma' \varkappa' l \delta t = +1 \text{ cm}$$

und nach Gleichung 30):

$$S' = -\frac{\Sigma' \varkappa' l \delta t}{\Sigma' \varkappa'^2 r} = \frac{-10^7}{1154} = -8700 \text{ kg}.$$

In den übrigen Stäben ändert sich die Stabkraft infolgedessen um

$$S = \varkappa' S' = -8700 \varkappa' \text{ kg},$$

im Stabe 15 z. B. um

$$+0{,}4 \cdot 8700 = +3480 \text{ kg}.$$

19. Das kontinuierliche Balkenfachwerk. Das in Abb. 60 im Maßstabe 1 : 200 dargestellte Fachwerk hat 13 Knoten und, mit Einschluß der 5 Stützstäbe, 28 Stäbe, folglich 2 überzählige Stäbe, als welche die beiden Stützstäbe (1) und (2) gewählt werden können. Die Knoten I, II, III . . . der *unteren* Gurtung nehmen die Lasten auf.

Werden die beiden überzähligen Stäbe beseitigt, so entsteht ein *einfaches Balkenfachwerk*, dessen Stabkräfte $\mathfrak{S}$ bestimmt werden durch die Gleichung:

$$\mathfrak{S} = \varkappa_2 K_2 + \varkappa_3 K_3 + \varkappa_4 K_4 + \varkappa_5 K_5 + \varkappa_6 K_6, \tag{41}$$

wenn wie bisher mit $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ . . . die Einflußzahlen der von den Knoten II, III . . . aufzunehmenden Lasten K_2, K_3 . . . für die Stabkräfte des einfachen Fachwerks bezeichnet werden. Es ist zu

beachten, daß für die beiden starren Stützstäbe (1), (2) r gleich null ist, und daß die Einflußzahlen $\varkappa'$, $\varkappa''$ der Stabkräfte dieser beiden Stäbe mit den Einflußzahlen der Lasten K_3, K_5 übereinstimmen:

$$\varkappa' = \varkappa_3, \quad \varkappa'' = \varkappa_5.$$

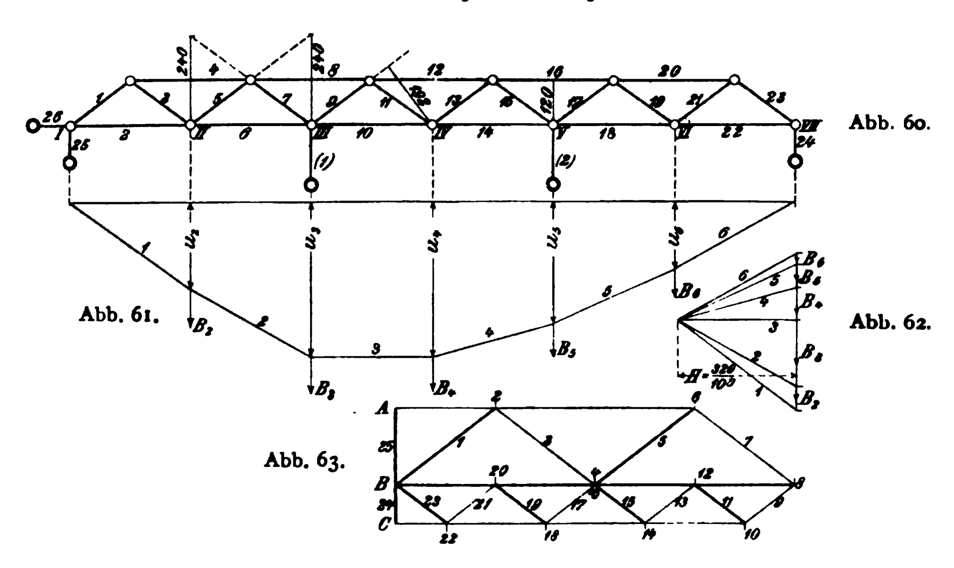


Abb. 60. Abb. 61. Abb. 62. Abb. 63.

Die Gleichungen 19) nehmen daher in diesem Beispiele die folgende Form an:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \Sigma' \varkappa_3 l \delta t + S' \Sigma \varkappa_3^2 r + S'' \Sigma \varkappa_3 \varkappa_5 r + K_2 \Sigma \varkappa_3 \varkappa_2 r + K_3 \Sigma \varkappa_3^2 r + K_4 \Sigma \varkappa_3 \varkappa_4 r + \ldots \\ 0 = \Sigma' \varkappa_5 l \delta t + S' \Sigma \varkappa_5 \varkappa_3 r + S'' \Sigma \varkappa_5^2 r + K_2 \Sigma \varkappa_5 \varkappa_2 r + K_3 \Sigma \varkappa_5 \varkappa_3 r + K_4 \Sigma \varkappa_5 \varkappa_4 r + \ldots \end{array}\right\} \quad (42)$$

Die Summenwerte in diesen Gleichungen lassen sich in verhältnismäßig einfacher Weise auf graphischem Wege bestimmen, mit Ausnahme der beiden Summen $\Sigma' \varkappa_3 l \delta t$ und $\Sigma' \varkappa_5 l \delta t$, die in der Regel bequemer zu berechnen sind. Wir benutzen daher dieses Beispiel, um das graphische Verfahren zu erläutern.

Wir bezeichnen mit u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 die elastischen Senkungen der Knoten II, III, IV, V, VI, welche erfolgen, wenn das in den Knoten I und VII unterstützte einfache Balkenfachwerk im Knoten III mit

$$K_3 = 1 \text{ kg} \quad \text{oder} \quad S' = 1 \text{ kg}$$

belastet wird; ebenso mit v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 die Senkungen dieser Knoten bei einer Belastung

$$K_5 = 1 \text{ kg} \quad \text{oder} \quad S'' = 1 \text{ kg}.$$

Der Symmetrie wegen ist

$$v_2 = u_6, \quad v_3 = u_5, \quad v_4 = u_4, \quad v_5 = u_3, \quad v_6 = u_2;$$

daher braucht nur eine der beiden Biegungslinien gebildet zu werden. Wir wählen die Biegungslinie für die Belastung K_3 gleich 1 kg. Bei dieser Belastung erhalten die Stabkräfte des einfachen Fachwerks die Größen:

$$\mathfrak{S} = 1\ \mathrm{kg} \cdot x_3 = 1\ \mathrm{kg} \cdot x',$$

also die Längenänderungen der Stäbe:

$$\Delta l = x_3 r \cdot 1\ \mathrm{kg} = x' r \cdot 1\ \mathrm{kg}.$$

Nach Gleichung 8) sind folglich die Senkungen der Knoten II, III, IV ...:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= 1\ \mathrm{kg} \cdot \Sigma x' x_2 r = 1\ \mathrm{kg} \cdot \Sigma x_3 x_2 r \\ u_3 &= 1\ \mathrm{kg} \cdot \Sigma x' x_3 r = 1\ \mathrm{kg} \cdot \Sigma x_3^2 r \\ u_4 &= 1\ \mathrm{kg} \cdot \Sigma x' x_4 r = 1\ \mathrm{kg} \cdot \Sigma x_3 x_4 r \\ u_5 &= 1\ \mathrm{kg} \cdot \Sigma x' x_5 r = 1\ \mathrm{kg} \cdot \Sigma x_3 x_5 r \\ u_6 &= 1\ \mathrm{kg} \cdot \Sigma x' x_6 r = 1\ \mathrm{kg} \cdot \Sigma x_3 x_6 r. \end{aligned}\right\} \qquad (43)$$

Die Gleichungen 42) erhalten, wenn man von der Wirkung von Temperaturänderungen absieht, hierdurch die Form:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= S' u_3 + S'' u_5 + K_2 u_2 + K_3 u_3 + K_4 u_4 + K_5 u_5 + K_6 u_6 \\ 0 &= S' v_3 + S'' v_5 + K_2 v_2 + K_3 v_3 + K_4 v_4 + K_5 v_5 + K_6 v_6. \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Die Stabkräfte S', S'' der beiden überzähligen Stäbe ergeben sich hieraus als Funktionen der Lasten K. Im Abschnitt 17 ist gezeigt worden, wie die Gleichungen 44) auch aus dem Satze von Betti abgeleitet werden können.

Um die Senkungen u_2, u_3, u_4 ... vermittels eines Seilpolygons (Abb. 61) zu bestimmen, sind in der umstehenden Tabelle nach Anleitung des Abschnittes 13 die Belastungen B_2, B_3, B_4 ... dieses Seilpolygons berechnet worden. Die ersten Spalten der Tabelle enthalten die *gegebenen* Größen der Stablängen l, der Stabquerschnitte F und die Werte

$$r = \frac{l}{\varepsilon F}.$$

Der Elastizitätsmodul ε wurde mit $2 \cdot 10^6$ kg/qcm in Rechnung gestellt. Der Kräfteplan Abb. 63 bestimmt im Maßstabe 1 cm $= \frac{2}{3}$ die in Spalte 5 verzeichneten Einflußzahlen

$$x' = x_3,$$

d. h. die Stabkräfte, welche entstehen, wenn der Knoten III mit der *Zahl* + 1 belastet wird. Die Längenänderungen der Stäbe

$$\Delta l = x' r \cdot 1\ \mathrm{kg}$$

sind in Spalte 6 angegeben. Ferner sind die in den Spalten 7, 8, 9 wiederholt vorkommenden Werte von h, h_1, h_2 in Abb. 60 ein-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Stab	l cm	F cm²	$10^6 r$ $\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$100\,x'$	$10^7 \Delta l = 10^7 x' r \cdot 1$ kg cm	h cm	h_1 cm	h_2 cm	Das 10^9-fache der Lasten des Seilpolygons B_2	B_3	B_4	B_5	$\frac{\Delta l}{h}$ B_6
1	200	25	4	−111	−44			−192	+23				
2	320	80	2	+ 89	+18			+240	+ 7				
3	200	25	4	+111	+44			+192	+23				
4	320	80	2	−178	−36	−120			+30				
5	200	25	4	−111	−44		+192	−192	−23	+23			
6	320	80	2	+267	+53		+240	+240	+22	+22			
7	200	25	4	+111	+44		−192	+192	−23	+23			
8	320	80	2	−356	−71	−120				+59			
9	200	25	4	+ 56	+22		+192	−192		+12	−12		
10	320	80	2	+311	+62		+240	+240		+26	+26		
11	200	25	4	− 56	−22		−192	+192		+12	−12		
12	320	80	2	−267	−53	−120					+44		
13	200	25	4	+ 56	+22		+192	−192			+12	−12	
14	320	80	2	+222	+44		+240	+240			+18	+18	
15	200	25	4	− 56	−22		−192	+192			+12	−12	
16	320	80	2	−178	−36	−120						+30	
17	200	25	4	+ 56	+22		+192	−192				+12	−12
18	320	80	2	+133	+27		+240	+240				+11	+11
19	200	25	4	− 56	−22		−192	+192				+12	−12
20	320	80	2	− 89	−18	−120							+15
21	200	25	4	+ 56	+22		+192						+12
22	320	80	2	+ 44	+ 9		+240						+ 4
23	200	25	4	− 56	−22		−192						+12
								Summen	+59	+177	+88	+59	+30

getragen worden. Aus den Werten von Δl, h, h_1, h_2 ergeben sich die in den Spalten 10—14 verzeichneten, durch die Längenänderungen der einzelnen Stäbe hervorgerufenen Lasten B des Seilpolygons. Die Summierung bestimmt die durch *unbenannte* Zahlen dargestellten Belastungen in 10^{-9} als Einheit:

$$B_2 = +59, \quad B_3 = +177, \quad B_4 = +88, \quad B_5 = +59, \quad B_6 = +30.$$

Aus diesen Lasten ist der Kräfteplan, Abb. 62, in dem Maßstabe 1 cm $= \frac{2}{10^7}$ und das Seilpolygon, Abb. 61, gebildet worden.

Da der Maßstab der Abszissen in Abb. 61 1 : 200 ist, und da für die Horizontalkraft H des Seilpolygons die Größe der unbenannten Zahl

$$H = \frac{320}{10^9}$$

gewählt wurde, so ist der Maßstab der Ordinaten des Seilpolygons, d. h. der Senkungen u, welche durch die Belastung des Knotens III mit 1 kg herbeigeführt werden:

$$1 \text{ cm} = 200 \text{ cm} \frac{320}{10^9} = \frac{64 \text{ cm}}{10^6}.$$

Mit diesem Maßstabe gemessen ist

$$u_2 = \frac{76 \text{ cm}}{10^6}, \quad u_3 = \frac{132 \text{ cm}}{10^6}, \quad u_4 = \frac{132 \text{ cm}}{10^6}, \quad u_5 = \frac{104 \text{ cm}}{10^6},$$

$$u_6 = \frac{57 \text{ cm}}{10^6}.$$

Nach den Gleichungen 44) ist also

$$0 = 132\, S' + 104\, S'' + 76\, K_2 + 132\, K_3 + 132\, K_4 + 104\, K_5 + 57\, K_6$$
$$0 = 104\, S' + 132\, S'' + 57\, K_2 + 104\, K_3 + 132\, K_4 + 132\, K_5 + 76\, K_6$$

oder

$$S' = -0{,}62\, K_2 - K_3 - 0{,}56\, K_4 + 0{,}06\, K_6$$
$$S'' = +0{,}06\, K_2 - 0{,}56\, K_4 - K_5 - 0{,}62\, K_6.$$

Nachdem für einen gegebenen Belastungsfall die Stabkräfte S', S'' der beiden überzähligen Stäbe nach den vorstehenden Gleichungen bestimmt worden sind, ergeben sich zunächst die Stabkräfte der beiden Stützstäbe 24, 25 und darauf die Stabkräfte aller übrigen Stäbe in bekannter Weise durch Momentengleichungen.

Wirkung einer Aenderung der Stützenlage. Wir wählen als Beispiel den Fall, in welchem die Länge des Stützstabes (1) um 1 cm sich verkürzt, während alle anderen Stäbe ihre Länge beibehalten. In die Gleichungen 19) ist dann einzusetzen:

$$\Sigma' x' l \delta t = -1 \text{ cm}, \quad \Sigma'' x'' l \delta t = 0$$

$$\Sigma x'^2 r = \Sigma x''^2 r = \Sigma x_3^2 r = \frac{u_3}{1 \text{ kg}} = \frac{132 \text{ cm}}{10^6 \text{ kg}}$$

$$\Sigma x' x'' r = \Sigma x_3 x_5 r = \frac{u_5}{1 \text{ kg}} = \frac{104 \text{ cm}}{10^6 \text{ kg}};$$

und wenn das Fachwerk unbelastet ist:

$$\Sigma x' \mathfrak{S} r = \Sigma x'' \mathfrak{S} r = 0.$$

Die Gleichungen 19) oder 42) fordern also:

$$0 = -1 + \frac{132}{10^6} S' + \frac{104}{10^6} S'',$$

$$0 = \frac{104}{10^6} S' + \frac{132}{10^6} S'',$$

woraus folgt:

$$S' = +20\,000 \text{ kg}, \quad S'' = -15\,700 \text{ kg}.$$

Beispielsweise ist für den Stab 5 nach der Tabelle:

$$x'_5 = -1{,}11$$

und der Symmetrie wegen:

$$x''_5 = x'_{19} = -0{,}56.$$

Die oben bezeichnete Aenderung der Stützenlage erzeugt also in dem Stabe 5 eine Stabkraft von der Größe

$$S_5 = x'_5 S' + x''_5 S'' = -1{,}11 \cdot 20\,000 + 0{,}56 \cdot 15\,700 = -13\,400 \text{ kg},$$

und da sein Querschnitt

$$F_5 = 25 \text{ qcm}$$

ist, so beträgt seine Spannung

$$-\frac{13\,400}{25} = -536 \text{ kg/qcm}.$$

20. Das Bogenfachwerk ohne Kämpfergelenke. Das in Abb. 64 im Maßstabe 1 : 200 dargestellte Bogenfachwerk enthält 11 Knoten und 17 durch die Nummern 1 bis 17 bezeichnete Stäbe. Die 4 Knoten D, E, J, K werden von festen Auflagern gestützt, die scheinbar am einfachsten durch 8 Stützstäbe ersetzt werden können. Es entstehen jedoch erhebliche Rechnungsvorteile, wenn anstatt der 8 Stützstäbe die in Abb. 64 durch gestrichelte Linien dargestellten und mit den Nummern 18 bis 30 und (1), (2), (3) bezeichneten starren Stützstäbe eingeführt werden. Die 13 Stäbe 18 bis 27 und (1), (2), (3) verbinden die Knoten D, E, J, K starr miteinander, während die 3 Stäbe 28, 29 und 30 das Fachwerk in seiner Ebene festlegen. Durch die Einführung der 16 Stützstäbe wird die Anzahl der Knoten von 11 auf 15 erhöht. Die Anzahl der überzähligen Stäbe wird dagegen nicht geändert; sie beträgt:

$$17 + 8 - 2 \cdot 11 = 17 + 16 - 2 \cdot 15 = 3.$$

Als *überzählig* bezeichnen wir die beiden wagerechten Stäbe (1), (3) und den mit der lotrechten Symmetrieachse des Fachwerks zusammenfallenden Stab (2). Man kann, wie sich im folgenden ergibt, den Abstand a zwischen den beiden Stäben (1) und (3) so

wählen, daß jede der drei Summen $\Sigma x' x'' r$, $\Sigma x' x''' r$, $\Sigma x'' x''' r$ gleich null wird. Infolgedessen enthalten die drei Gleichungen 19) nur je *eine* Unbekannte und ergeben ohne weiteres:

$$\left.\begin{aligned} S' &= -\frac{\Sigma x' \mathfrak{S} r + \Sigma' x' l \delta t}{\Sigma x'^2 r} \\ S'' &= -\frac{\Sigma x'' \mathfrak{S} r + \Sigma'' x'' l \delta t}{\Sigma x''^2 r} \\ S''' &= -\frac{\Sigma x''' \mathfrak{S} r + \Sigma''' x''' l \delta t}{\Sigma x'''^2 r}. \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Es ist zu beachten, daß für die drei überzähligen Stäbe die Größe r gleich null ist; die Summen $\Sigma x^2 r$ erstrecken sich daher ebenso wie die Summen $\Sigma x \mathfrak{S} r$ nur auf die Stäbe 1 bis 17.

Abb. 64.

Abb. 65.

Abb. 66.

Abb. 67.

Die Berechnung der Summenwerte der Gleichungen 45) zerfällt in folgende Abschnitte.

Die Bestimmung der Einflußzahlen x'. Wenn aus jedem der drei überzähligen Stäbe (1), (2), (3) ein Stück herausgeschnitten wird, so entsteht ein einfaches, durch die Stäbe 28, 29, 30 gestütztes Balkenfachwerk. In den Stäben dieses einfachen Fachwerks entstehen die Stabkräfte x', wenn das aus dem Stabe (1) herausgeschnittene Stück durch die beiden Stabkräfte

$$S' = (S') = +1$$

ersetzt wird. Durch Zerlegen des Fachwerks vermittels eines Schnittes lassen sich die folgenden Gleichgewichtsgruppen bilden, die auf den Fachwerksteil rechts vom Schnitt einwirken:

$$\begin{aligned} 0 &= S' \pm x'_1 \pm x'_2 \pm x'_3 \\ 0 &= S' \pm x'_3 \pm x'_4 \pm x'_5 \\ 0 &= S' \pm x'_5 \pm x'_6 \pm x'_7 \\ 0 &= S' \pm x'_7 \pm x'_8 \pm x'_9. \end{aligned}$$

Die Abb. 65 enthält die Kräftepolygone dieser Gleichgewichtsgruppen im Maßstabe 1 cm = 0,5; die Kräfte x'_1, x'_2, x'_3 ... sind mit 1, 2, 3 ... bezeichnet. Für je zwei symmetrisch belegene Stäbe sind die Werte der Einflußzahlen x' nach Größe und Vorzeichen einander gleich; daher ist:

$$x'_{10} = x'_8, \quad x'_{11} = x'_7, \quad x'_{12} = x'_6 \text{ usf.}$$

Die Bestimmung der Einflußzahlen x''. Die Stabkräfte x'' entstehen im einfachen Fachwerk, wenn das aus dem überzähligen Stabe (2) herausgeschnittene Stück durch die beiden Stabkräfte

$$S'' = (S'') = +1$$

ersetzt wird. Durch Zerlegung des Fachwerks vermittels eines Schnittes lassen sich die folgenden, auf den Fachwerksteil rechts vom Schnitt einwirkenden Gleichgewichtsgruppen bilden:

$$\begin{aligned} 0 &= S'' \pm x''_9 \pm x''_8 \pm x''_7 \\ 0 &= S'' \pm x''_7 \pm x''_6 \pm x''_5 \\ 0 &= S'' \pm x''_5 \pm x''_4 \pm x''_3 \\ 0 &= S'' \pm x''_3 \pm x''_2 \pm x''_1. \end{aligned}$$

Die Abb. 66 enthält die Kräftepolygone dieser Gleichgewichtsgruppen ebenfalls in dem Maßstabe 1 cm = 0,5; die Kräfte x''_1, x''_2, x''_3 ... sind mit 1, 2, 3 ... bezeichnet. Für je zwei symmetrisch belegene

Stäbe sind die Werte x'' der Größe nach gleich, dem Vorzeichen nach einander entgegengesetzt; daher ist

$$x_{10}'' = -x_8'', \quad x_{11}'' = -x_7'', \quad x_{12}'' = -x_6'' \text{ usf.,}$$

und folglich ist die Summe:

$$\Sigma x' x'' r = 0. \tag{46}$$

Die Bestimmung der Einflußzahlen x'''. Die Stabkräfe x''' entstehen, wenn das aus dem überzähligen Stabe (3) herausgeschnittene Stück durch die beiden Stabkräfte

$$S''' = (S''') = +1$$

ersetzt wird. In den auf den Fachwerksteil rechts vom Schnitt einwirkenden Gleichgewichtsgruppen:

$$0 = S''' + x_9''' + x_8''' + x_7'''$$
$$0 = S''' + x_7''' + x_6''' + x_5'''$$
$$0 = S''' + x_5''' + x_4''' + x_3'''$$
$$0 = S''' + x_3''' + x_2''' + x_1'''$$

läßt sich die Kraft S''' ersetzen durch die Kraft

$$S' = +1$$

und das Kräftepaar $(S''' \# S')$, dessen Moment die noch unbekannte negative Größe

$$-aS''' = -a \text{ Zentimeter}$$

hat. Wir bezeichnen mit x_0 die Stabkräfte, welche entstehen, wenn das eben bezeichnete unbekannte Kräftepaar ersetzt wird durch ein Kräftepaar von dem *gegebenen positiven* Moment $+1$ cm. Demnach ist für jeden Stab

$$x''' = x' - \frac{a x_0}{1 \text{ cm}}. \tag{47}$$

Die Stabkräfte x_0 sind im Kräfteplan Abb. 67 im Maßstabe 1 cm = 0,002 dargestellt. Für die Bildung dieses Kräfteplans wurde der Wert von x_0 für den Stab 9 durch Rechnung bestimmt. Da der Abstand des Knotens III vom Stabe 9 gleich 241 cm ist, so folgt aus der Momentengleichung

$$0 = 241 \text{ cm}\, x_{0_9} + 1 \text{ cm}$$

$$x_{0_9} = -\frac{1}{241} = -0{,}00415.$$

Im übrigen bedarf der Kräfteplan, in dem die Stabkräfte x_0 für die Stäbe 1, 2, 3 ... wieder mit 1, 2, 3 ... bezeichnet sind, keiner Erläuterung. Für je zwei symmetrisch belegene Stäbe sind die Werte

von $\varkappa_0$ und folglich auch die Werte von $\varkappa'''$ nach Größe und Vorzeichen einander gleich; daher ist die Summe

$$\Sigma \varkappa'' \varkappa''' r = 0. \tag{48}$$

Die Bestimmung des Abstandes a zwischen den beiden wagerechten Stäben (1) und (3). Zufolge Gleichung 47) ist

$$\Sigma \varkappa' \varkappa''' r = \Sigma \varkappa'^2 r - \frac{a}{1\,\text{cm}} \Sigma \varkappa_0 \varkappa' r. \tag{49}$$

Damit auch diese Summe gleich null werde, ist

$$\frac{a}{1\,\text{cm}} = \frac{\Sigma \varkappa'^2 r}{\Sigma \varkappa_0 \varkappa' r} \tag{50}$$

zu wählen.

Die Summenwerte $\Sigma \varkappa \mathfrak{S} r$. Die Belastungen der Fahrbahn werden durch Zwischenträger auf die Knoten I, II, III, IV, V übertragen. Da die Knoten I und V mit festen Stützen zusammenfallen, so erzeugen ihre Lasten keine Stabkräfte. Es sind daher im folgenden nur die Stabkräfte $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ zu ermitteln, die in dem nach Beseitigung der überzähligen Stäbe (1), (2), (3) entstehenden einfachen Fachwerk hervorgerufen werden, wenn nacheinander die Knoten II, III, IV mit einer lotrechten Kraft von der Größe $+1$ belastet werden. Wenn diese Einflußzahlen bekannt sind, so ergibt sich die Stabkraft $\mathfrak{S}$ bei einer Belastung K_2, K_3, K_4 der Knoten II, III, IV aus der Gleichung

$$\mathfrak{S} = \varkappa_2 K_2 + \varkappa_3 K_3 + \varkappa_4 K_4. \tag{51}$$

Durch Einsetzen dieses Wertes nehmen die Gleichungen 45) die Form an:

$$\left.\begin{aligned}
S' &= -\frac{K_2 \Sigma \varkappa' \varkappa_2 r + K_3 \Sigma \varkappa' \varkappa_3 r + K_4 \Sigma \varkappa' \varkappa_4 r + \Sigma' \varkappa' l \delta t}{\Sigma \varkappa'^2 r} \\
S'' &= -\frac{K_2 \Sigma \varkappa'' \varkappa_2 r + K_3 \Sigma \varkappa'' \varkappa_3 r + K_4 \Sigma \varkappa'' \varkappa_4 r + \Sigma'' \varkappa'' l \delta t}{\Sigma \varkappa''^2 r} \\
S''' &= -\frac{K_2 \Sigma \varkappa''' \varkappa_2 r + K_3 \Sigma \varkappa''' \varkappa_3 r + K_4 \Sigma \varkappa''' \varkappa_4 r + \Sigma''' \varkappa''' l \delta t}{\Sigma \varkappa'''^2 r}.
\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Schließlich sind die Gleichungen 51) und 52) mit den Gleichungen 18):

$$S = \mathfrak{S} + \varkappa' S' + \varkappa'' S'' + \varkappa''' S''' \tag{53}$$

zu verbinden, um jede Stabkraft S als Funktion der Lasten K und der Temperaturänderungen t darzustellen.

Die Einflußzahlen $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$ können durch Kräftepläne bestimmt werden (vergl. Abschnitt 8). Anstatt dessen können diese Zahlen

auch aus den bereits bekannten Einflußzahlen $\varkappa_0$ und $\varkappa''$ durch Rechnung ermittelt werden, wie im folgenden beschrieben werden soll.

Die Einflußzahlen $\varkappa_2$. Wenn das einfache, von den Stäben 28, 29, 30 gestützte Fachwerk nur in dem Knoten II mit der lotrechten Last K_2 gleich eins belastet ist, so entstehen die Stabkräfte $\varkappa_2$. Für die 13 Stäbe 5 bis 17 hat $\varkappa_2$ die Größe null, weil der rechts vom Knoten II liegende Fachwerksteil weder Lasten, noch Stützkräfte aufnimmt. Bei der Bestimmung der Stabkräfte $\varkappa_2$ in den 4 Stäben 1 bis 4 kann die Last K_2 ersetzt werden durch die Kraft S'' gleich eins in Verbindung mit einem Kräftepaar von dem negativen Moment

$$-b = -487 \text{ cm},$$

weil der Abstand zwischen den beiden lotrechten Kräften K_2 und S''

$$b = 487 \text{ cm}$$

beträgt. Die Last S'' gleich eins erzeugt Stabkräfte von der Größe $\varkappa''$, während das Kräftepaar Stabkräfte von der Größe

$$-\frac{b}{1 \text{ cm}} \varkappa_0 = -487\, \varkappa_0$$

hervorruft. Demnach ist für jeden der 4 Stäbe 1 bis 4:

$$\varkappa_2 = \varkappa'' - \frac{b}{1 \text{ cm}} \varkappa_0 = \varkappa'' - 487\, \varkappa_0. \qquad (54)$$

Die in den Gleichungen 52) vorkommenden Summen welche den Faktor $\varkappa_2$ enthalten, haben folglich die Größen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma \varkappa' \varkappa_2 r &= \Sigma_1^4 \varkappa' \varkappa'' r - 487\, \Sigma_1^4 \varkappa' \varkappa_0 r \\ \Sigma \varkappa'' \varkappa_2 r &= \Sigma_1^4 \varkappa''^2 r - 487\, \Sigma_1^4 \varkappa'' \varkappa_0 r \\ \Sigma \varkappa''' \varkappa_2 r &= \Sigma_1^4 \varkappa''' \varkappa'' r - 487\, \Sigma_1^4 \varkappa''' \varkappa_0 r. \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Das Zeichen Σ_1^4 deutet an, daß sich die Summierung nur auf die Stäbe 1 bis 4 erstreckt.

Die Einflußzahlen $\varkappa_3$. Wenn das Fachwerk nur die Last K_3 gleich eins im Knoten III und die Stützkräfte der Stäbe 28, 29 und 30 aufnimmt, so entstehen in den 9 Stäben 9 bis 17 keine Stabkräfte; für diese 9 Stäbe ist also $\varkappa_3$ gleich null. Dagegen haben die Stabkräfte in den 8 Stäben 1 bis 8 die Größen

$$\varkappa_3 = \varkappa'', \qquad (56)$$

weil die Last K_3 gleich eins mit der ebenso großen Kraft S'' zusammenfällt. Die Summen in den Gleichungen 52), welche die Werte x_3 enthalten, haben demnach die Größen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma x' x_3 r &= \Sigma_1^8 x' x'' r \\ \Sigma x'' x_3 r &= \Sigma_1^8 x''^2 r \\ \Sigma x''' x_3 r &= \Sigma_1^8 x'' x''' r. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Die Einflußzahlen x_4. Bei einer Belastung des Knotens IV mit der Last K_4 gleich eins entstehen in den 4 Stäben 14 bis 17 keine Stabkräfte; daher ist für diese Stäbe x_4 gleich null. Bei der Bestimmung der Stabkräfte x_4 für die übrigen 13 Stäbe 1 bis 13 kann die Last K_4 ersetzt werden durch eine ebenso große Last S'' in Verbindung mit einem Kräftepaar von dem positiven Moment

$$+ b = + 487 \text{ cm}.$$

Für die Stäbe 1 bis 13 ist also

$$x_4 = x'' + \frac{b}{1 \text{ cm}} x_0 = x'' + 487\, x_0, \tag{58}$$

und in die Gleichungen 52) ist demnach einzusetzen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma x' x_4 r &= \Sigma_1^{13} x' x'' r + 487\, \Sigma_1^{13} x' x_0 r \\ \Sigma x'' x_4 r &= \Sigma_1^{13} x''^2 r + 487\, \Sigma_1^{13} x'' x_0 r \\ \Sigma x''' x_4 r &= \Sigma_1^{13} x'' x''' r + 487\, \Sigma_1^{13} x''' x_0 r. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Bei der Bildung dieser Summen ist zu beachten, daß für je zwei symmetrisch belegene Stäbe die Einflußzahlen x_0, x', x''' nach Größe und Vorzeichen übereinstimmen, daß dagegen die gleich großen Zahlen x'' verschiedene Vorzeichen haben. Daher ist

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_1^{13} x' x'' r &= \Sigma_1^4 x' x'' r \\ \Sigma_1^{13} x' x_0 r &= \Sigma_1^{17} x_1 x_0 r - \Sigma_1^4 x_1 x_0 r \\ \Sigma_1^{13} x''^2 r &= \Sigma_1^{17} x''^2 r - \Sigma_1^4 x''^2 r \\ \Sigma_1^{13} x'' x_0 r &= \Sigma_1^4 x'' x_0 r \\ \Sigma_1^{13} x'' x''' r &= \Sigma_1^4 x'' x''' r \\ \Sigma_1^{13} x''' x_0 r &= \Sigma_1^{17} x''' x_0 r - \Sigma_1^4 x''' x_0 r. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Zahlenrechnung für das vorliegende Beispiel. Die folgende Tabelle 1 enthält die gegebenen Stablängen l, die Stabquerschnitte F und die hieraus berechneten Größen

$$r = \frac{l}{\varepsilon F},$$

wobei, wie in den früheren Beispielen,

$$\varepsilon = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/qcm}$$

eingesetzt wurde; ferner enthält die Tabelle die aus den Abb. 65, 66, 67 entnommenen Werte von x', x'', x_0 und die nach Gleichung 47) berechneten Werte von x'''.

Tabelle 1.

Stab	l cm	F cm²	r 10^{-9} cm/kg	x_0 10^{-5}	x' 10^{-3}	x'' 10^{-3}	x''' 10^{-3}
1	400	50	4000	—415	—1264	—3612	+1066
2	313	20	7825	—158	—1554	— 108	— 667
3	500	50	5000	+531	+1700	+2962	—1281
4	313	20	7825	—158	+ 72	— 2057	+ 959
5	400	50	4000	—415	—2596	—2023	— 266
6	313	20	7825	—158	—1370	+ 850	— 483
7	500	50	5000	+531	+2650	+1062	— 331
8	313	20	7825	—158	— 804	—1615	+ 83
9	200	50	2000	—415	- 3072	0	— 742

Zu bemerken ist, daß für den Stab 9 nur die halbe Länge 200 cm angesetzt wurde, weil die zu berechnenden Summen auf die *Fachwerkshälfte* sich beziehen. In der folgenden zweiten Tabelle sind die in den Formeln vorkommenden Summenwerte berechnet worden. Für die Berechnung der Zahlen x''' in der Tabelle 1 nach Gleichung 47) ergab sich der Abstand a nach Gleichung 50) aus den Werten der umstehenden Tabelle 2:

$$a = 1 \text{ cm} \frac{\Sigma x'^2 r}{\Sigma x_0 x' r} = \frac{2810 \cdot 10^{-7}}{500 \cdot 10^{-9}} = 562 \text{ cm}.$$

Die Summenwerte für die Stäbe 1 bis 13 in der letzten Reihe der Tabelle 2 ergeben sich aus den Gleichungen 60).

Einflußzahlen der Last K_2 des Knotens II. Wird nur der Knoten II mit

$$K_2 = 1 \text{ kg}$$

belastet, und läßt man die Temperaturen unverändert, so ist nach den Gleichungen 52) und 55):

$$S' = -\frac{\Sigma x' x_2 r}{\Sigma x'^2 r} = -\frac{\Sigma_1^4 x' x'' r - b \Sigma_1^4 x' x_0 r}{\Sigma x'^2 r} = -\frac{43600 - 487 \cdot 84}{281000} = -0{,}010 \text{ kg}$$

$$S'' = -\frac{\Sigma x'' x_2 r}{x''^2 r} = -\frac{\Sigma_1^4 x''^2 r - b \Sigma_1^4 x'' x_0 r}{\Sigma x''^2 r} = -\frac{129300 - 487 \cdot 166}{354800} = -0{,}137 \text{ kg}$$

$$S''' = -\frac{\Sigma x''' x_2 r}{\Sigma x'''^2 r} = -\frac{\Sigma_1^4 x'' x''' r - b \Sigma_1^4 x''' x_0 r}{\Sigma x'''^2 r} = -\frac{-49200 + 487 \cdot 55}{54500} = +0{,}411 \text{ kg}.$$

Tabelle 2.

	Stab	$x_0 x' r$ $10^{-9}\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x_0 x'' r$ $10^{-9}\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x_0 x''' r$ $10^{-9}\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x'^2 r$ $10^{-7}\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x''^2 r$ $10^{-7}\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x'''^2 r$ $10^{-7}\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x' x'' r$ $10^{-7}\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$	$x'' x''' r$ $10^{-7}\frac{\text{cm}}{\text{kg}}$
	1	+ 21	+ 60	− 18	64	522	45	+ 183	− 154
	2	+ 19	+ 1	+ 8	189	1	35	+ 3	+ 6
	3	+ 45	+ 79	− 34	145	439	82	+ 252	− 190
	4	− 1	+ 26	− 12	0	331	72	− 12	− 154
Summen für . .	1—4	+ 84	+ 166	− 55		1293		+ 436	− 492
	5	+ 43	+ 34	+ 5	270	164	3	+ 210	+ 22
	6	+ 17	− 11	+ 6	147	57	18	− 91	− 32
	7	+ 70	+ 28	− 9	351	56	6	+ 141	− 18
	8	+ 10	+ 20	− 1	51	204	1	+ 101	− 11
Summen für . .	1—8	+ 224	+ 237	− 54		1774		+ 797	− 531
	9	+ 26	0	+ 6	189	0	11	0	0
Summen für . .	1—9	+ 250	+ 237	− 48	1405	1774	272	+ 797	− 531
Summen für . .	1—17	+ 500	0	− 96	2810	3548	545	0	0
Summen für . .	1—13	+ 416	+ 166	− 41		2255		+ 436	− 492

Die Stabkräfte S im zusammengesetzten Fachwerk erhalten bei dieser Belastung die Größen (Gleichung 53):

$$S = x_2 - 0{,}010\, x' - 0{,}137\, x'' + 0{,}411\, x'''.$$

Da für die Stäbe 1 bis 4 nach Gleichung 54)

$$x_2 = x'' - 487\, x_0$$

und für die Stäbe 5 bis 17

$$x_2 = 0$$

ist, so gilt für die Stäbe 1 bis 4:

$$S = -487\, x_0 - 0{,}010\, x' + 0{,}863\, x'' + 0{,}411\, x''' \tag{61}$$

und für die Stäbe 5 bis 17:

$$S = -0{,}010\, x' - 0{,}137\, x'' + 0{,}411\, x'''. \tag{62}$$

Diese beiden Gleichungen ergeben durch Einsetzen der Werte von x_0, x', x'', x''' die in der ersten Reihe der Tabelle 3 verzeichneten Stabkräfte; z. B. für den Stab 2:

$$S_2 = + \frac{487 \cdot 158}{100\,000} + \frac{0{,}01 \cdot 1554 - 0{,}863 \cdot 108 - 0{,}411 \cdot 667}{1000}$$

$$S_2 = +0{,}42 \text{ kg}.$$

Einflußzahlen der Last K_3 des Knotens III. Eine Belastung

$$K_3 = 1 \text{ kg}$$

des Knotens III erzeugt nach den Gleichungen 52) und 57) in den überzähligen Stäben (1), (2), (3) die Kräfte:

$$S' = -\frac{\Sigma x' x_3 r}{\Sigma x'^2 r} = -\frac{\Sigma_1^8 x' x'' r}{\Sigma x'^2 r} = -\frac{797}{2810} = -0{,}284 \text{ kg}$$

$$S'' = -\frac{\Sigma x'' x_3 r}{\Sigma x''^2 r} = -\frac{\Sigma_1^8 x''^2 r}{\Sigma x''^2 r} = -\frac{1774}{3548} = -0{,}500 \text{ kg}$$

$$S''' = -\frac{\Sigma x''' x_3 r}{\Sigma x'''^2 r} = -\frac{\Sigma_1^8 x'' x''' r}{\Sigma x'''^2 r} = +\frac{531}{545} = +0{,}976 \text{ kg}$$

und in den übrigen Stäben 1 bis 17 nach Gleichung 53):

$$S = x_3 - 0{,}284\, x' - 0{,}500\, x'' + 0{,}976\, x'''.$$

Da für die Stäbe 1 bis 8 nach Gleichung 56):

$$x_3 = x''$$

und für die Stäbe 9 bis 17:

$$x_3 = 0$$

ist, so gilt für die Stäbe 1 bis 8:

$$S = -0{,}284\, x' + 0{,}500\, x'' + 0{,}976\, x''' \tag{63}$$

und für die Stäbe 9 bis 17:

$$S = -0{,}284\, x' - 0{,}500\, x'' + 0{,}976\, x'''. \tag{64}$$

Die Reihe 2 der Tabelle 3 enthält die hiernach berechneten Werte von S.

Einflußzahlen der Last K_4 des Knotens IV. Die Last

$$K_4 = 1 \text{ kg}$$

erzeugt nach den Gleichungen 52) und 59) in den überzähligen Stäben die Kräfte:

$$S' = -\frac{\Sigma x' x_4 r}{\Sigma x'^2 r} = -\frac{\Sigma_1^{13} x' x'' r + b\, \Sigma_1^{13} x' x_0 r}{\Sigma x'^2 r} = -\frac{43600 + 487 \cdot 416}{281000} = -0{,}876 \text{ kg}$$

$$S'' = -\frac{\Sigma x'' x_4 r}{\Sigma x''^2 r} = -\frac{\Sigma_1^{13} x''^2 r + b\, \Sigma_1^{13} x'' x_0 r}{\Sigma x''^2 r} = -\frac{225500 + 487 \cdot 166}{354800} = -0{,}863 \text{ kg}$$

$$S''' = -\frac{\Sigma x''' x_4 r}{\Sigma x'''^2 r} = -\frac{\Sigma_1^{13} x'' x''' r + b\, \Sigma_1^{13} x''' x_0 r}{\Sigma x'''^2 r} = -\frac{-49200 - 487 \cdot 41}{54500} = +1{,}277 \text{ kg}.$$

Die Stabkräfte S der übrigen Stäbe 1 bis 17 erhalten nach Gleichung 53) die Größen

$$S = x_4 - 0{,}876\, x' - 0{,}863\, x'' + 1{,}277\, x'''.$$

Da für die Stäbe 1 bis 13 nach Gleichung 58)

$$x_4 = x'' + 487\, x_0$$

und für die übrigen Stäbe 14 bis 17

$$x_4 = 0$$

ist, so gilt für die Stäbe 1 bis 13:

$$S = 487\, x_0 - 0{,}876\, x' + 0{,}137\, x'' + 1{,}277\, x''' \qquad (65)$$

und für die Stäbe 14 bis 17:

$$S = -0{,}876\, x' - 0{,}863\, x'' + 1{,}277\, x'''. \qquad (66)$$

Nach Gleichung 65) sind die in der dritten Reihe der Tabelle 3 verzeichneten Werte von S berechnet worden.

Tabelle 3.
Einflußzahlen der Lasten für die Stabkräfte des zusammengesetzten Fachwerks.

	Stab	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$K_2 = 1, S =$	− 0,65	+ 0,42	− 0,57	− 0,61	+ 0,19	− 0,30	− 0,31	+ 0,27	− 0,28
2	$K_3 = 1, S =$	− 0,41	− 0,26	− 0,25	− 0,11	− 0,54	+ 0,34	− 0,54	− 0,50	+ 0,15
3	$K_4 = 1, S =$	− 0,05	− 0,27	− 0,13	+ 0,11	− 0,36	− 0,07	− 0,01	− 0,18	− 0,28

Die Wirkungen von Temperaturänderungen. Wir wählen als Beispiel den Fall, in dem alle Fachwerkstäbe 1 bis 17 ihre Temperatur vom spannungslosen Zustande aus um

$$t = +40^\circ \text{ Celsius}$$

erhöhen, während die Stützenlage, also die Temperatur der Stützstäbe, unverändert bleibt; δt hat die Größe 0,0005. Die überzähligen Stäbe (1), (2), (3) des *unbelasteten* Fachwerks haben nach den Gleichungen 45) in diesem Falle die Stabkräfte

$$\left.\begin{aligned} S' &= -\frac{\delta t\, \Sigma x' l}{\Sigma x'^2 r} \\ S'' &= -\frac{\delta t\, \Sigma x'' l}{\Sigma x''^2 r} \\ S''' &= -\frac{\delta t\, \Sigma x''' l}{\Sigma x'''^2 r}. \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

Die Summenwerte in diesen Gleichungen erstrecken sich nur auf die 17 Stäbe des einfachen Fachwerks, weil die Stützstäbe ihre Länge nicht ändern. Man erhält aus Tabelle 1:

$$\Sigma x' l = \frac{2}{1000}\{400(-1264-2596-1536)+313(-1554+72-1370-804)+500(1700+2650)\}$$

$$\Sigma x' l = -2255 \text{ cm}$$

$$\Sigma x'' l = 0$$

$$\Sigma x''' l = \frac{2}{1000}\{400(1066-266-371)+313(-667+959-483+83)+500(-1281-331)\}$$

$$\Sigma x''' l = -1336 \text{ cm}.$$

Demnach ist

$$S' = + \frac{0{,}0005 \cdot 2255}{2810} 10^7 = + 4012 \text{ kg}$$

$$S'' = 0$$

$$S''' = + \frac{0{,}0005 \cdot 1336}{545} 10^7 = + 12260 \text{ kg}.$$

In den 17 Stäben des einfachen Fachwerks werden hierdurch Stabkräfte von der Größe

$$S = (4012\,\varkappa' + 12260\,\varkappa''') \text{ kg}$$

erzeugt; z. B. ist für den Stab 9

$$\varkappa' = -3{,}072, \quad \varkappa''' = -0{,}742$$

$$S_9 = -4012 \cdot 3{,}072 - 12260 \cdot 0{,}742 = -21400 \text{ kg}$$

Die Wirkungen einer Aenderung der Stützenlage. Als Beispiel wählen wir eine Aenderung, durch die der überzählige Stab (1) um 1 cm länger, der Stab (3) dagegen um 0,5 cm kürzer wird, während alle übrigen Stützstäbe ihre Länge nicht verändern. Man kann sich vorstellen, daß die beiden angegebenen Längenänderungen durch Temperaturänderungen herbeigeführt worden sind. Dann ist

$$\Sigma' \varkappa' l \delta t = + 1 \text{ cm}$$

$$\Sigma'' \varkappa'' l \delta t = 0$$

$$\Sigma''' \varkappa''' l \delta t = - 0{,}5 \text{ cm}.$$

Im unbelasteten Fachwerk entstehen nach den Gleichungen 52) die Stabkräfte

$$\left.\begin{aligned} S' &= -\frac{\Sigma' \varkappa' l \delta t}{\Sigma \varkappa'^2 r} = -\frac{1 \cdot 10^7}{2810} = -3560 \text{ kg} \\ S'' &= 0 \\ S''' &= -\frac{\Sigma \varkappa''' l \delta t}{\Sigma \varkappa'''^2 r} = + \frac{0{,}5 \cdot 10^7}{545} = + 9170 \text{ kg}. \end{aligned}\right\} \quad (68)$$

Infolgedessen erhalten die 17 Stäbe des einfachen Fachwerks Stabkräfte von der Größe:

$$S = \varkappa' S' + \varkappa''' S''' = (-3560\,\varkappa' + 9170\,\varkappa''') \text{ kg}.$$

Beispielsweise ist für den Stab 3:

$$\varkappa' = + 1{,}700, \quad \varkappa''' = - 1{,}281,$$

folglich:

$$S = -1{,}7 \cdot 3560 - 1{,}281 \cdot 9170 = -17800 \text{ kg}.$$

Da der Querschnitt des Stabes 50 qcm groß ist, so beträgt seine Druckspannung

$$\frac{17800}{50} = 356 \text{ kg/qcm}.$$

21. Die Nebenspannungen im ebenen Fachwerk. Die Voraussetzung, daß die Fachwerksknoten von reibungslosen Gelenken gebildet werden, ist niemals vollkommen erfüllt. In der Regel werden die Knoten durch starre Nietverbindungen hergestellt, und selbst wenn sie die Form von Gelenken erhalten, genügt gewöhnlich die Reibung, um die Drehung der Stäbe gegeneinander zu verhindern. Bei den elastischen Formänderungen des Fachwerks werden daher die Stäbe *gebogen*, und die hierdurch hervorgerufenen Biegungsspannungen werden *Nebenspannungen* genannt, im Gegensatz zu den *Hauptspannungen*, die von den Stabkräften erzeugt würden, wenn sie genau mit den Stabachsen zusammenfielen. Die resultierenden Spannungen setzen sich also zusammen aus den Hauptspannungen und den Nebenspannungen. Wir nehmen an, daß die Schwerpunktsachsen der zu einem Knoten gehörenden Stäbe in *einem* Punkte, dem Knotenpunkte, sich schneiden, und vernachlässigen bei den folgenden Betrachtungen das *Eigengewicht* der Stäbe.

Die Unbekannten der Aufgabe. Wenn ein Stab I II (Abb. 68) in den Knoten I, II mit den anderen Stäben *starr* verbunden ist, so fällt die Gerade der beiden gleich großen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte S_{12}, S_{21}, die von den Knoten I und II auf den Stab übertragen werden, mit der Stabachse nicht genau zusammen. Diese Abweichung ist in der Regel so gering, daß ihr Einfluß auf die *Größen* der Stabkräfte und also auf die Größen der Hauptspannungen vernachlässigt werden darf. Diese Größen dürfen daher unter der Voraussetzung von reibungslosen Gelenken bestimmt werden und gelten hier als gegebene, bekannte Größen.

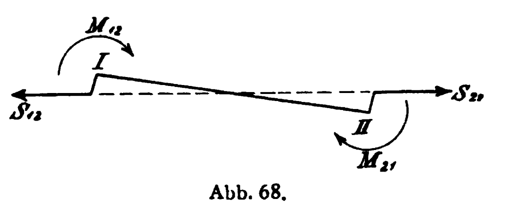


Abb. 68.

Die Lage der Kraftachse gegen die Stabsehne wird durch *zwei* unbekannte Größen bestimmt, z. B. durch das Moment M_{12} der Kraft S_{12} in bezug auf den Knotenpunkt I und das Moment M_{21} der Kraft S_{21} in bezug auf den Knotenpunkt II. Diese Momente tragen das positive Vorzeichen, wenn sie im Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen. Die Anzahl der unbekannten Momente ist demnach doppelt so groß wie die Anzahl der Fachwerkstäbe. Ist z. B. ein einfaches Balkenfachwerk von k Knoten zu berechnen, so beträgt die Anzahl der Unbekannten

$$2(2k-3) = 4k-6.$$

Diese Anzahl wird auf $(3k - 3)$ ermäßigt, also um $(k - 3)$ vermindert, wenn als Unbekannte die Winkel eingeführt werden, um die bei der Formänderung des Fachwerks die k Knotenverbindungen und die $(2k - 3)$ Stabsehnen sich drehen; denn von diesen Drehwinkeln sind die Biegungsmomente M in einfacher Weise abhängig.

Die in einem Knoten miteinander starr verbundenen Stabenden drehen sich bei einer Formänderung des Fachwerks um einen und denselben Winkel, welchen wir den *Knotendrehwinkel* nennen und für die Knoten I, II, III ... mit φ_1, φ_2, φ_3 ... bezeichnen. Die Winkel ferner, um welche die Stabsehnen I II, I III, II III ... sich drehen, sollen *Stabdrehwinkel* genannt und mit ψ_{12}, ψ_{13}, ψ_{23} ... bezeichnet werden. Den Winkeln φ und ψ wird das *positive* Vorzeichen beigelegt, wenn die Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung erfolgt. Der Vorteil, der mit der Einführung der Winkel φ und ψ verbunden ist, ergibt sich aus dem Umstande, daß die $(2k - 3)$ Größen ψ auf graphischem Wege durch einen Geschwindigkeitsplan bestimmt werden können. Nur die k Größen φ sind miteinander verbunden durch eine Gruppe von k Gleichungen ersten Grades, aus welchen ihre Werte entwickelt werden müssen.

Die Bestimmung der Stabdrehwinkel ψ durch den Geschwindigkeitsplan der Formänderung des Fachwerks. Im Abschnitt 11 ist die Bildung des Geschwindigkeits- oder Verschiebungsplans eines elastischen Fachwerks aus den gegebenen Längenänderungen der Stäbe beschrieben worden; es wird daher genügen, hier die Bestimmung der Stabdrehwinkel ψ an einem Beispiel zu erläutern. In Abb. 69 sind die Maße des betrachteten Fachwerks in Zentimetern

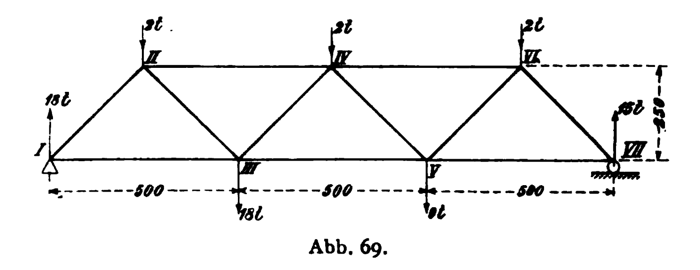


Abb. 69.

und die äußeren Kräfte in Tonnen angegeben. Die umstehende Tabelle enthält ferner die Stablängen l, die Stabquerschnitte F, die Stabkräfte S und die hieraus berechneten Längenänderungen

$$\Delta l = \frac{lS}{\varepsilon F}.$$

Der Elastizitätsmodul ε des Stabmaterials ist gleich $2000\,t \cdot cm^{-2}$. Der Maßstab des Verschiebungsplanes, Abb. 70, ist 10 : 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stab	l	F	S	$10 \cdot \Delta l$	$100\,000\,\psi'$	$100\,000\,\psi'''$	$10\,000\,\psi$	$\frac{N}{1000}$
	cm	cm²	t	cm				cm · t
I II	350	50	−26	−0,9	+160	−17	+14	9
I III	500	50	+18	+0,9	+168	−17	+15	6
II III	350	40	+23	+1,0	+126	17	+11	7
II IV	500	60	−34	−1,4	+88	−17	+7	8
III IV	350	30	+3	+0,2	+34	−17	+2	5
III V	500	70	+32	+1,2	0	−17	−2	9
IV V	350	30	−6	−0,3	−17	−17	−3	5
IV VI	500	60	−28	−1,2	−62	−17	−8	8
V VI	350	40	+18	+0,8	−77	−17	−9	7
V VII	500	50	+15	+0,8	−118	−17	−13	6
VI VII	350	50	−21	−0,8	−114	−17	−13	9

Die Bewegung der Formänderung, als deren Zeitdauer wir die Zeiteinheit annehmen, läßt sich in *drei* gleichzeitige Bewegungen A, B, C zerlegen. Bei der Bewegung A wird *ein* Knotenpunkt, z. B. der Knoten III, und die Richtung eines von ihm ausgehenden Stabes III V festgehalten, während alle Stäbe ihre gegebenen Längenänderungen ausführen. Die Wahl jenes Stabes ist zwar willkürlich; es empfiehlt sich aber, einen Stab in der Nähe der Mitte des Fachwerks zu wählen, damit die Größe des Geschwindigkeitsplanes und die Anzahl der sich summierenden Zeichenfehler tunlichst eingeschränkt werden.

Im Geschwindigkeitsplan der Bewegung A entsprechen den Knoten I, II, III . . . die Ziffern 1, 2, 3 . . . (Abb. 70). Von dem willkürlich gewählten Punkte 3 ist also die Strecke 3 5 in der Richtung und dem Sinne der Stabstrecke III V:

$$\overline{35} = 10\,\Delta l_{35} = +1{,}2\,\text{cm}$$

aufzutragen. Man bestimmt darauf den Punkt 4 durch die Dehnungen der Stabstrecken III IV und V IV:

$$\begin{aligned} 3a &= 10\,\Delta l_{34} = +0{,}2\,\text{cm} \\ 5b &= 10\,\Delta l_{45} = -0{,}3\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Die Strecke 3a hat wegen des positiven Vorzeichens den Sinn III IV, während die Strecke $5b$ wegen des negativen Vorzeichens den Sinn IV V erhält. Der Punkt 4 bestimmt die Drehgeschwindigkeiten ψ'_{34}, ψ'_{45} der Stabsehnen III IV und V IV in der Bewegung A:

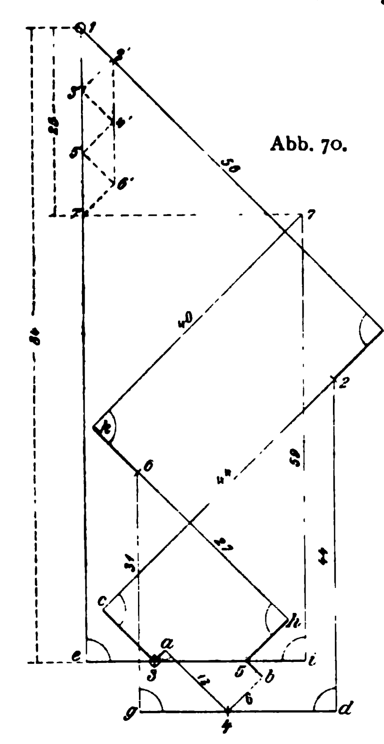


Abb. 70.

$$\psi'_{34} = \frac{a\,4}{l_{34}} = + \frac{0{,}12}{350} = + 0{,}00034$$

und

$$\psi'_{45} = \frac{b\,4}{l_{45}} = - \frac{0{,}06}{350} = - 0{,}00017.$$

Die Drehgeschwindigkeit ψ'_{34} ist *positiv*, weil die relative Drehgeschwindigkeit $a\,4$ des Knotens IV gegen den Knoten III von III aus gesehen nach rechts zeigt. Die relative Drehgeschwindigkeit $b\,4$ des Knotens IV gegen den Knoten V zeigt von V aus gesehen nach links, und daher ist ψ'_{45} negativ.

In gleicher Weise ergibt sich im Geschwindigkeitsplan der Punkt
2 durch die Dehnungen der beiden Stabstrecken III II und IV II
1 „ „ „ „ „ „ III I „ II I
6 „ „ „ „ „ „ IV VI „ V VI
7 „ „ „ „ „ „ V VII „ VI VII.

Die in den Geschwindigkeitsplan eingeschriebenen relativen Drehgeschwindigkeiten bestimmen die Winkel:

$$\psi'_{12} = \frac{f\,1}{l_{12}} = + \frac{0{,}56}{350} = + 0{,}00160$$

$$\psi'_{13} = \frac{e\,1}{l_{13}} = + \frac{0{,}84}{500} = + 0{,}00168$$

$$\psi'_{23} = \frac{c\,2}{l_{23}} = + \frac{0{,}44}{350} = + 0{,}00126$$

$$\psi_{24} = \frac{d\,2}{l_{24}} = + \frac{0{,}44}{500} = + 0{,}00088$$

$$\psi'_{34} = \frac{a\,4}{l_{34}} = + \frac{0{,}12}{350} = + 0{,}00034$$

$$\psi'_{35} = 0$$

$$\psi'_{45} = \frac{b\,4}{l_{45}} = - \frac{0{,}06}{350} = - 0{,}00017$$

$$\psi'_{46} = \frac{g\,6}{l_{46}} = - \frac{0{,}31}{500} = - 0{,}00062$$

$$\psi'_{56} = \frac{h\,6}{l_{56}} = - \frac{0{,}27}{350} = - 0{,}00077$$

$$\psi'_{57} = \frac{i\,7}{l_{57}} = - \frac{0{,}59}{500} = - 0{,}00118$$

$$\psi'_{67} = \frac{k\,7}{l_{67}} = - \frac{0{,}40}{350} = - 0{,}00114.$$

Bei der Bewegung A hat der Knoten III die Geschwindigkeit null, während die Geschwindigkeiten der übrigen Knoten I, II, IV . . . durch die Strecken 3 1, 3 2, 3 4 . . . dargestellt werden.

Die *zweite* Bewegung B besteht aus einer *Parallelverschiebung* mit der allen Knoten gemeinschaftlichen Geschwindigkeit 1 3. Durch Zusammensetzung der beiden Bewegungen A und B erhalten die Knoten I, II, III, IV . . . die Geschwindigkeiten null, 1 2, 1 3, 1 4 . . . Die *Drehgeschwindigkeiten* der Stäbe ändern sich hierbei nicht, bleiben also wie in der Bewegung A.

Die *dritte* Bewegung C, deren Geschwindigkeiten durch die Strecken 2′ 1, 3′ 1, 4′ 1 . . . 7′ 1 dargestellt werden, besteht in einer *Drehung des starren Fachwerks um den Knoten I.* Daher sind diese Geschwindigkeitsstrecken zu den entsprechenden Strecken II I, II I, IV I . . . des Fachwerks rechtwinklig gerichtet, und es ist

$$1\ 2'\ 3'\ 4'\ 5'\ 6'\ 7' \approxeq \text{I II III IV V VI VII}$$

(vergl. Abhandlung IV, 2).

Die Drehgeschwindigkeit der Bewegung C:

$$\psi''' = \frac{7'\,1}{\text{VII I}} = - \frac{0{,}25}{1500} = - 0{,}00017$$

st so groß zu wählen, daß die aus allen drei Bewegungen für den Knoten VII resultierende Geschwindigkeit 7′ 7 die Richtung der Auflagerbahn dieses Knotens erhält. Die resultierenden Geschwindig-

keiten der übrigen Knoten II, III, IV ... werden durch die Strecken 2' 2, 3' 3, 4' 4 ... dargestellt.

Die resultierenden Drehwinkel ψ werden durch die algebraischen Summen der Winkel ψ' und ψ''' gebildet. Die Tabelle enthält die Zusammenstellung dieser Werte.

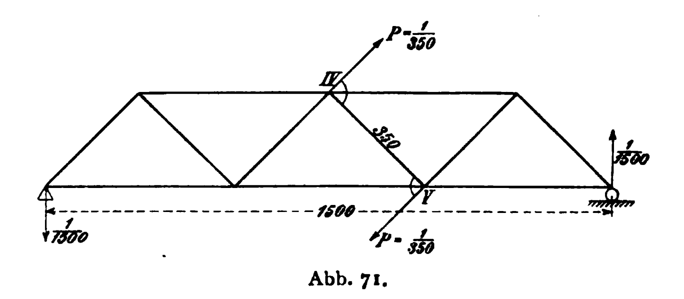


Abb. 71.

Die Bestimmung der Stabdrehwinkel ψ durch Rechnung. Mit einem etwas größeren Zeitaufwande können die Winkel ψ auch durch Rechnung bestimmt werden. Um z. B. den Drehwinkel ψ_{45} des Stabes IV V zu berechnen, belastet man in Abb. 71 die Knoten IV und V mit zwei Kräften

$$P = \frac{1}{l_{45}} = \frac{1}{350\ \mathrm{cm}},$$

die zum Stabe IV V rechtwinklig gerichtet sind und ein Kräftepaar von dem *positiven* Moment

$$m = +1$$

bilden. Man berechnet die von diesen Lasten hervorgerufenen Stabkräfte σ und bildet für jeden Stab den algebraischen Wert des Produktes $\sigma\,\Delta l$. Die auf alle Stäbe ausgedehnte Summe dieser Produkte ist gleich ψ_{45}:

$$\psi_{45} = \Sigma\sigma\,\Delta l;$$

denn die Gleichgewichtsgruppen der Knoten, welche von den beiden Lasten P, den beiden Auflagerkräften und den Stabkräften σ gebildet werden, leisten bei jeder sehr kleinen Bewegung die Arbeitsumme null. Bei der durch die Formänderung gegebenen Bewegung leisten die Auflagerkräfte die Arbeit null, die Lasten P die Arbeit $m\,\psi_{45}$ und die Stabkräfte σ die Arbeit $-\Sigma\sigma\,\Delta l$. Daher ist wie in Gleichung 1):

$$m\psi_{45} = \psi_{45} = \Sigma\sigma\,\Delta l. \qquad (69)$$

Die Beziehung zwischen den Biegungsmomenten M, den Stabdrehwinkeln ψ und den Knotendrehwinkeln φ. In Abb. 72 bezeichnet die Kurve I II die elastische Linie des Stabes *nach* der Formänderung, während die beiden parallelen Geraden IA und IIB die Richtung des Stabes I II *vor* der Formänderung angeben. Die eingeschriebenen Bezeichnungen lassen unmittelbar erkennen, daß der Drehwinkel im Sinne der Uhrzeigerbewegung von der Stabsehne I II nach der Tangente der elastischen Linie im Knoten I die Größe $(\varphi_1 - \psi_{12})$ und im Knoten II die Größe $(\varphi_2 - \psi_{12})$ hat. Wir erinnern an das Ergebnis der Abhandlung IX, daß die elastische Linie eines Stabes, dessen Querschnitt in bezug auf die zur Biegungsebene senkrecht gerichtete Hauptschwerpunktsachse das Trägheitsmoment J hat, als Seilkurve angesehen werden kann, wenn die zur Stabsehne parallel gerichtete Seilkraft gleich εJ und die zur Stabsehne senkrecht gerichtete Längeneinheitsbelastung des Seils dem Biegungsmoment des Stabes gleichgesetzt wird. Bei Bestimmung der Biegungsmomente darf in der Regel (Abb. 73) die sehr kleine Ordinate z der elastischen Linie in bezug auf die Stabsehne im Vergleich mit der Ordinate y der Kraftachse vernachlässigt werden. Die Belastungsfläche des Seils hat demnach die Form eines Trapezes $ABCD$ (Abb. 74), welches in die beiden Dreiecksflächen:

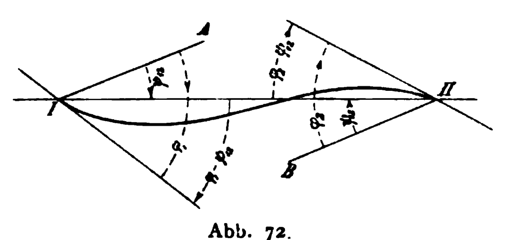


Abb. 72.

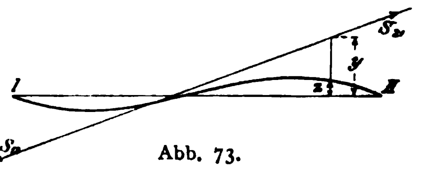


Abb. 73.

$$P = ABD = \frac{1}{2} l_{12} M_{12}$$

und

$$Q = DBC = \frac{1}{2} l_{12} M_{21}$$

zerlegt werden kann. Die Resultanten P, Q der von diesen Dreiecken dargestellten Seillasten gehen durch die Schwerpunkte S_1, S_2 der Dreiecke und zerlegen also die Stablänge AB in drei gleiche Teile. Damit in den folgenden Momentengleichungen ohne weiteres

die richtigen Vorzeichen sich ergeben, ist den Abb. 72 und 74 die Form gegeben, bei der alle vorkommenden Größen: M_{12}, M_{21},

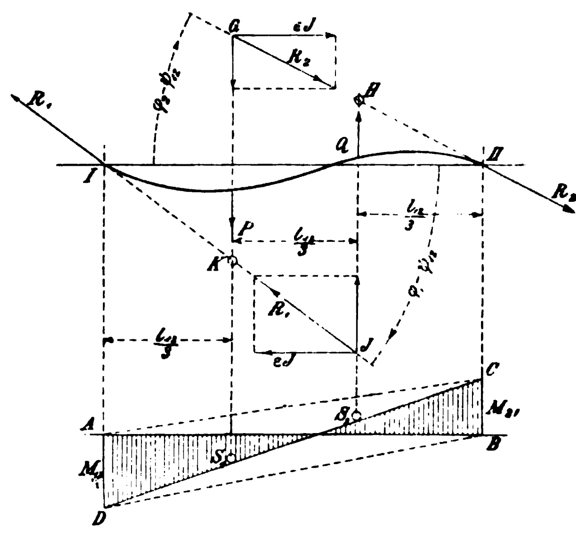


Abb. 74.

$(\varphi_1 - \psi_{12})$ und $(\varphi_2 - \psi_{12})$ *positive* Werte haben. Die Kraftachsen der aus den beiden Seilkräften R_1, R_2 und den beiden Einzellasten P, Q gebildeten Gleichgewichtsgruppe bestimmen ein Trapez $GHJK$, dessen parallele Seiten GK und HJ um $\frac{1}{3} l_{12}$ voneinander abstehen. Da die Winkel φ und ψ sehr klein sind, so ist ferner:

$$GK = \frac{1}{3} l_{12} (\varphi_1 - \psi_{12}) + \frac{2}{3} l_{12} (\varphi_2 - \psi_{12}) = \frac{l_{12}}{3} (\varphi_1 + 2\varphi_2 - 3\psi_{12})$$

und

$$HJ = \frac{2}{3} l_{12} (\varphi_1 - \psi_{12}) + \frac{1}{3} l_{12} (\varphi_2 - \psi_{12}) = \frac{l_{12}}{3} (2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{12}).$$

Die Momentengleichungen jener Gleichgewichtsgruppe in bezug auf die beiden Punkte H und K lauten demnach:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{3} \varepsilon J l_{12} (2\varphi_1 + \varphi_2 - 3\psi_{12}) - \frac{1}{6} l_{12}^2 M_{12} \\ 0 &= \frac{1}{3} \varepsilon J l_{12} (\varphi_1 + 2\varphi_2 - 3\psi_{12}) - \frac{1}{6} l_{12}^2 M_{21}. \end{aligned}\right| \qquad (70)$$

Setzt man zur Abkürzung das bekannte Moment

$$\frac{2\varepsilon J}{l_{12}} = N_{12}, \qquad (71)$$

so ergeben sich aus den vorstehenden Gleichungen die einfachen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} M_{12} &= N_{12}\,(2\,\varphi_1 + \varphi_2 - 3\,\psi_{12}) \\ M_{21} &= N_{12}\,(\varphi_1 + 2\,\varphi_2 - 3\,\psi_{12}). \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

Die *gegebenen* Werte der Momente N sind in der Tabelle für alle Stäbe in Zentimeter-Tonnen angegeben.

Die Bestimmung der Knotendrehwinkel φ aus den Gleichgewichtsbedingungen. Das Gleichgewicht der auf *einen* Knoten einwirkenden Kräfte wird durch drei Gleichungen ausgedrückt. *Zwei* dieser Gleichungen sind bereits zur Bestimmung der Stabkräfte verwendet worden; sie bedingen, daß die geometrische Summe der Gleichgewichtsgruppe gleich null ist. Die dritte Gleichgewichtsbedingung fordert, daß die Momentensumme der Kräftegruppe in bezug auf irgend einen Punkt, z. B. in bezug auf den Knotenpunkt, gleich null sein muß. Wir setzen voraus, daß die äußere Kraft des Knotens, die Last oder die Stützkraft, durch den Knotenpunkt geht, also ein Moment null hat. Trifft diese Voraussetzung nicht zu, so muß selbstverständlich auch das Moment der äußeren Kraft in die Momentengleichung eingesetzt werden. In dem vorliegenden Beispiel lautet die Momentengleichung für den Knoten

$$\left.\begin{aligned} \text{I:}\quad 0 &= M_{12} + M_{13} \\ \text{II:}\quad 0 &= M_{21} + M_{23} + M_{24} \\ \text{III:}\quad 0 &= M_{31} + M_{32} + M_{34} + M_{35} \\ \text{IV:}\quad 0 &= M_{42} + M_{43} + M_{45} + M_{46} \\ \text{V:}\quad 0 &= M_{53} + M_{54} + M_{56} + M_{57} \\ \text{VI:}\quad 0 &= M_{64} + M_{65} + M_{67} \\ \text{VII:}\quad 0 &= M_{75} + M_{76}. \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

In diese Gleichgewichtsbedingungen sind nach den Gleichungen 72) die Größen M mit Benutzung der Zahlenwerte der Momente N und der Winkel ψ aus der Tabelle einzusetzen. Es entstehen hierdurch k Gleichungen ersten Grades mit den k unbekannten Knotendrehwinkeln φ, die für das vorliegende Beispiel die Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -648 + 30\,\varphi_1 + 9\,\varphi_2 + 6\,\varphi_3 \\ 0 &= -777 + 9\,\varphi_1 + 48\,\varphi_2 + 7\,\varphi_3 + 8\,\varphi_4 \\ 0 &= -477 + 6\,\varphi_1 + 7\,\varphi_2 + 54\,\varphi_3 + 5\,\varphi_4 + 9\,\varphi_5 \\ 0 &= +39 + 8\,\varphi_2 + 5\,\varphi_3 + 52\,\varphi_4 + 5\,\varphi_5 + 8\,\varphi_6 \\ 0 &= +522 + 9\,\varphi_3 + 5\,\varphi_4 + 54\,\varphi_5 + 7\,\varphi_6 + 6\,\varphi_7 \\ 0 &= +732 + 8\,\varphi_4 + 7\,\varphi_5 + 48\,\varphi_6 + 9\,\varphi_7 \\ 0 &= +585 + 6\,\varphi_5 + 9\,\varphi_6 + 30\,\varphi_7. \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Wenn, wie in dem vorliegenden Beispiele, das Fachwerk in bezug auf seine Mittelachse symmetrisch geformt ist, so nehmen auch die Gleichgewichtsbedingungen eine symmetrische Form an. In einem solchen Falle wird die Auflösung der Gleichungen wesentlich vereinfacht, indem man zunächst die Summen und die Differenzen der symmetrisch belegenen Knotendrehwinkel φ berechnet. Man erhält aus den Gleichungen 74):

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -63 + 30(\varphi_1 + \varphi_7) + 9(\varphi_2 + \varphi_6) + 6(\varphi_3 + \varphi_5) \\
0 &= -45 + 9(\varphi_1 + \varphi_7) + 48(\varphi_2 + \varphi_6) + 7(\varphi_3 + \varphi_5) + 16\varphi_4 \\
0 &= +45 + 6(\varphi_1 + \varphi_7) + 7(\varphi_2 + \varphi_6) + 63(\varphi_3 + \varphi_5) + 10\varphi_4 \\
0 &= +39 + 8(\varphi_2 + \varphi_6) + 5(\varphi_3 + \varphi_5) + 52\varphi_4
\end{aligned}\right\} \quad (75)$$

und hieraus das 10000-fache der Winkelsummen:

$$\varphi_1 + \varphi_7 = +1{,}99, \quad \varphi_2 + \varphi_6 = +0{,}96, \quad \varphi_3 + \varphi_5 = -0{,}88, \quad \varphi_4 = -0{,}81. \quad (76)$$

Ferner ergibt sich aus den Gleichungen 74):

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -1233 + 30(\varphi_1 - \varphi_7) + 9(\varphi_2 - \varphi_6) + 6(\varphi_3 - \varphi_5) \\
0 &= -1509 + 9(\varphi_1 - \varphi_7) + 48(\varphi_2 - \varphi_6) + 7(\varphi_3 - \varphi_5) \\
0 &= -999 + 6(\varphi_1 - \varphi_7) + 7(\varphi_2 - \varphi_6) + 45(\varphi_3 - \varphi_5)
\end{aligned}\right\} \quad (77)$$

und in $\frac{1}{10000}$ als Einheit:

$$\varphi_1 - \varphi_7 = +31{,}17, \quad \varphi_2 - \varphi_6 = +23{,}49, \quad \varphi_3 - \varphi_5 = +14{,}39. \quad (78)$$

Die Gleichungen 76) und 78) bestimmen dann ebenfalls in $\frac{1}{10000}$ als Einheit:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 = +16{,}58, \quad \varphi_2 = +12{,}23, \quad \varphi_3 = +6{,}76, \quad \varphi_4 = -0{,}81, \\
\varphi_5 = -7{,}64, \quad \varphi_6 = -11{,}27, \quad \varphi_7 = -14{,}59.
\end{aligned}\right\} \quad (79)$$

Um die Biegungsmomente M der Stabenden und hieraus die Nebenspannungen zu berechnen, sind die Werte von N, ψ und φ in die Gleichungen 72) einzusetzen, was einer weiteren Erklärung nicht bedarf.

Annäherungsverfahren zur Berechnung der Knotendrehwinkel φ. Vergleicht man die Faktoren der unbekannten Winkel φ in den Gleichungen 74), so ersieht man, daß in der ersten Gleichung der Faktor 30 von φ_1 die beiden anderen Faktoren 9 und 6 von φ_2 und φ_3 bedeutend überwiegt. Ebenso ist es in der zweiten Gleichung mit dem Faktor von φ_2, in der dritten mit dem Faktor von φ_3 usf. Es ist ferner zu beachten, daß algebraisch

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3 > \varphi_4 > \varphi_5 > \varphi_6 > \varphi_7$$

ist. Man erhält daher einen Annäherungswert von φ_1, wenn in der ersten der Gleichungen 74)

$$\varphi_3 = \varphi_2 = \varphi_1$$

gesetzt wird. Ebenso erhält man aus der *zweiten* Gleichung einen Annäherungswert von φ_2, wenn φ_1, φ_3, φ_4 gleich φ_2 eingesetzt werden, usf. Man erhält auf diesem Wege als erste Annäherungswerte φ_1', φ_2', φ_3' . . .:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1' &= \frac{648}{45} = +14{,}4 \\
\varphi_2' &= \frac{777}{72} = +10{,}8 \\
\varphi_3' &= \frac{477}{81} = +5{,}9 \\
\varphi_4' &= -\frac{39}{78} = -0{,}5 \\
\varphi_5' &= -\frac{522}{81} = -6{,}4 \\
\varphi_6' &= -\frac{732}{72} = -10{,}2 \\
\varphi_7' &= -\frac{585}{45} = -13{,}0.
\end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

Eine *zweite* Annäherung φ_1'', φ_2'', φ_3'' . . . gewinnt man dadurch, daß man den Gleichungen 74) die folgende Form gibt:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -648 + \varphi_1''\left(30 + \frac{9\varphi_2' + 6\varphi_3'}{\varphi_1'}\right) \\
0 &= -777 + \varphi_2''\left(48 + \frac{9\varphi_1' + 7\varphi_3' + 8\varphi_4'}{\varphi_2'}\right) \\
0 &= -477 + \varphi_3''\left(54 + \frac{6\varphi_1' + 7\varphi_2' + 5\varphi_4' + 9\varphi_5'}{\varphi_3'}\right) \\
0 &= +39 + \varphi_4''\left(52 + \frac{8\varphi_2' + 5\varphi_3' + 5\varphi_5' + 8\varphi_6'}{\varphi_4'}\right) \\
0 &= +522 + \varphi_5''\left(54 + \frac{9\varphi_3' + 5\varphi_4' + 7\varphi_6' + 6\varphi_7'}{\varphi_5'}\right) \\
0 &= +732 + \varphi_6''\left(48 + \frac{8\varphi_4' + 7\varphi_5' + 9\varphi_7'}{\varphi_6'}\right) \\
0 &= +585 + \varphi_7''\left(30 + \frac{6\varphi_5' + 9\varphi_6'}{\varphi_7'}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

woraus sich durch Einsetzen der ersten Annäherungswerte φ_1', φ_2', φ_3' . . . ergibt:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1'' = +16{,}53,\quad \varphi_2'' = +12{,}25,\quad \varphi_3'' = +6{,}69,\quad \varphi_4'' = -0{,}82, \\
\varphi_5'' = -7{,}52,\quad \varphi_6'' = -11{,}39,\quad \varphi_7'' = -14{,}62.
\end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

Diese Werte stimmen nahezu mit den genauen Werten aus den Gleichungen 79) überein. Wird eine größere Genauigkeit verlangt, so ist das letzte Verfahren zu wiederholen und eine *dritte* Reihe von Annäherungswerten mit Benutzung der Verhältniszahlen aus der zweiten Reihe zu berechnen.

22. Literarische Notizen. Bei der Abfassung der vorstehenden Abhandlung wurden folgende Aufsätze verwendet:

1. *Beitrag zur Theorie der Bogenfachwerksträger*; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1874 S. 223. In diesem Aufsatze wurde zum ersten Mal das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten benutzt, um, wie es im Abschnitt 18 der hier vorliegenden Abhandlung beschrieben worden ist, die Stabkräfte eines zusammengesetzten Fachwerks mit *einem* überzähligen Stabe zu berechnen.

2. *Beiträge zur Theorie des Fachwerks*; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1874 S. 509 und 1875 S. 17. Das im zuerst genannten Aufsatze beschriebene Verfahren wird hier verallgemeinert und auf die Berechnung der Stabkräfte und der Formänderungen aller zusammengesetzten Fachwerke angewandt.

3. *Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerks*; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1881 S. 243. Dieser Aufsatz enthält das im Abschnitt 20 beschriebene Verfahren zur Vereinfachung der Berechnung eines Bogenfachwerks mit *drei* überzähligen Stäben.

4. *Beitrag zur Theorie des Fachwerks*; Zivilingenieur, 1885 S. 289. Hier werden die Ergebnisse der vorhergehenden Aufsätze zusammengefaßt, um die Vorteile zu zeigen, die mit der Anwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten verbunden sind. Zu dem Zweck werden auch die Arbeiten von Clapeyron, Maxwell und Castigliano kurz besprochen. Es wird in dem Aufsatze nachdrücklich darauf hingewiesen, daß das genannte Prinzip, das in der Gleichung 1) der vorliegenden Abhandlung seinen Ausdruck findet, nicht nur geeignet ist, die Formänderungen der Fachwerke und die Stabkräfte der zusammengesetzten Fachwerke zu bestimmen, sondern daß es außerdem *alle* Fragen beantwortet, die bei der Berechnung einfacher und zusammengesetzter Fachwerke vorkommen können.

5. *Ueber das sogenannte Prinzip der kleinsten Deformationsarbeit*, Wochenblatt für Architekten und Ingenieure, 1883 S. 171; enthält die im Abschnitt 16 gegebene Ableitung des Satzes von *Menabrea*.

6. *Ueber Geschwindigkeitspläne und Beschleunigungspläne,* Zivilingenieur, 1887 S. 631; enthält als Anwendung das im Abschnitt 4 der vorliegenden Abhandlung beschriebene Verfahren.

7. *Die Berechnung des Fachwerks mit starren Knotenverbindungen*; Zivilingenieur, 1892 S. 577 und 1893 S. 67. Dieser Aufsatz enthält die im Abschnitt 21 entwickelte Berechnung der *Nebenspannungen* eines ebenen Fachwerks.

8. *Technische Mechanik*; nach den Vorlesungen von Mohr bearbeitet und herausgegeben vom Ingenieur-Verein am Polytechnikum zu Stuttgart, 1877; enthält u. a. die im Abschnitt 7 beschriebene *erste* Anordnung der Kräftepläne einfacher Fachwerke.

In neuester Zeit ist die erste Anwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten auf die Theorie des Fachwerks Gegenstand einer Streitfrage geworden. Um dieselbe darzulegen, lasse ich zunächst die Worte hier folgen, mit denen ich im Zivilingenieur, 1885 S. 307, über die Arbeit von Maxwell berichtet habe:

„Bis vor kurzem scheint in Deutschland eine kleine, aber inhaltsreiche Abhandlung: On the Calculation of the Equilibrium and the Stiffness of Frames, welche Professor Maxwell bereits im Jahre 1864 in The Philosophical Magazine veröffentlicht hat, unbekannt geblieben zu sein; es findet sich wenigstens nirgends ein Hinweis auf diese Arbeit. Mir ist dieselbe, da die genannte Zeitschrift in den Dresdener Bibliotheken nicht gehalten wird, erst durch einen Bericht von *Swain:* On the application of the principle of virtual velocities etc. im Journal of the Franklin Institute 1883 bekannt geworden. Vielleicht ist auch die sehr knappe Fassung und das Fehlen erläuternder Anwendungen die Ursache gewesen, daß die Abhandlung nicht die verdiente Beachtung gefunden hat.

Maxwell benutzt nicht das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, sondern das Theorem Clapeyrons, um den Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen zunächst für das einfache und sodann auch für das zusammengesetzte Fachwerk abzuleiten. Mit Hilfe dieses Satzes wird darauf die Bestimmung der Spannungen der überzähligen Stäbe *für den Fall, daß das unbelastete Fachwerk im spannungslosen Zustande sich befindet,* im wesentlichen auf dieselbe Form gebracht, welche in meinem *Beitrage zur Theorie des Fachwerks* in der Zeitschrift des Hannoverschen Architekten- und Ingenieur-Vereins 1874 enthalten ist.

Die Natur des Clapeyronschen Theorems gestattet nicht ohne weiteres, die Betrachtung auf die Bestimmung der Temperatureinwirkungen auszudehnen.“

Der letzte Satz hat Widerspruch gefunden, und zwar in der vor kurzem erschienenen Schrift von *Müller-Breslau:* Die neueren Methoden der Festigkeitslehre, 3. Auflage, 1904. Auf S. 23 dieses Buches wird eine Reihe von Gleichungen, die in der Abhandlung von Maxwell nicht vorkommen, als *Maxwellsche Gleichungen* bezeichnet, und in einer Anmerkung wird in betreff der Berechtigung zu dieser Bezeichnung auf S. 335 der Schrift verwiesen. Dort finden sich die folgenden Sätze:

„Die Vergleichung der von den Lasten P und den Stabkräften S geleisteten Arbeiten vollzieht Maxwell mit Hilfe des Gesetzes

$$\frac{1}{2} P\delta = \frac{1}{2} S\Delta s, \tag{1}$$

indem er P und S als Kräfte auffaßt, die von null aus allmählich anwachsen. *Die auf diesem Wege abgeleitete Grundgleichung*

$$\Sigma P\delta = \Sigma S\Delta s \tag{2}$$

ist übrigens von derselben allgemeinen Bedeutung, wie die unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen gefolgerte Bedingung

$$\Sigma P\delta = \Sigma S\Delta s. \tag{3}$$

Denn solange es sich nur um die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen handelt, ist die Größe der Elastizitätsziffer ε und Querschnittsinhalte F der Stäbe gleichgültig, und man kann daher auch mit Hilfe der aus dem Clapeyronschen Gesetze gefolgerten Gleichung 2) leicht auf den von Maxwell nicht berücksichtigten Einfluß der Temperaturänderungen schließen, ebenso wie man beobachteten Stützenverschiebungen durch Anbringen von Auflagerstäben mit passend gewählten Querschnitten Rechnung tragen kann."

Die vorstehenden Angaben sind falsch und irreführend. Nicht *Maxwell*, sondern *Clapeyron* vollzieht das, was durch die Gleichung 1) ausgedrückt wird, und deshalb trägt diese Gleichung nicht Maxwells, sondern Clapeyrons Namen. In ihr bezeichnen Δs und δ die von den Lasten P und den zugehörigen Stabkräften S hervorgerufenen elastischen Längenänderungen der Stäbe und die entsprechenden Verschiebungen der Knoten. Nicht *Maxwell*, sondern *Müller-Breslau* vollzieht den Uebergang von der Clapeyronschen Gleichung zum Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, und zwar auf einem ebenso einfachen wie unzulässigen Wege, indem er nämlich beide Seiten jener Gleichung mit der Zahl zwei multipliziert. In der *„auf diesem Wege abgeleiteten Grundgleichung"* bezeichnen δ und Δs etwas ganz anderes, nämlich *willkürlich ge-*

wählte Knotenverschiebungen und die zugehörigen Längenänderungen der Stäbe. Auch der angefügte Versuch einer Begründung, der übrigens nicht ohne weiteres verständlich ist, stammt nicht von Maxwell her, sondern von Müller-Breslau. Es handelt sich also hier überhaupt nicht um Gedanken, die Maxwell in Wirklichkeit gehabt und geäußert hat, sondern um Gedanken, die er nach der Meinung Müller-Breslaus gehabt haben könnte und die aus diesem Grunde mit Maxwells Namen belegt werden sollen.

Derartige Bestrebungen, Ergebnisse der deutschen Wissenschaft Ausländern zuzueignen, sind in der literarischen Tätigkeit des Herrn Müller-Breslau nicht neu. In dieser Absicht wurde bei einer früheren Gelegenheit versucht, die Sätze *Castiglianos* mit allerlei Zutaten auszustatten, an die Castigliano selbst nicht gedacht hatte. Mein Aufsatz: *Ueber die Elastizität der Deformationsarbeit* im Zivilingenieur 1886, S. 395 enthält hierüber die näheren Angaben. Auch die falsche Darstellung des sogenannten Williotschen Verfahrens gehört hierher (vergl. IV, 31).

In betreff der umfangreichen Literatur der Theorie des ebenen Fachwerks verweisen wir im übrigen auf die Abhandlung *Hennebergs*: *Die graphische Statik* in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Abteilung IV, 1, Heft 3.

Abhandlung XII.

Das Raumfachwerk.

1. Einleitende Bemerkungen. Die Theorie des Raumfachwerks beruht auf derselben Grundlage wie die des ebenen Fachwerks. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, welches in der Hauptgleichung (XI, 2)

$$0 = \Sigma K\,dw - \Sigma S\,dl \tag{1}$$

zum Ausdruck kommt, beantwortet wie beim ebenen Fachwerk jede Frage, die in bezug auf das Gleichgewicht und die Formänderungen des Raumfachwerks gestellt werden kann. Auch das *zusammengesetzte* Raumfachwerk ist genau in derselben Weise zu berechnen, wie für das ebene Fachwerk in dem Abschnitt 15 der Abhandlung XI beschrieben wurde. In der Wahl der Hilfsmittel zur Ausführung der Untersuchungen besteht jedoch ein wesentlicher Unterschied. Die graphische Statik, die beim ebenen Fachwerk eine so vielseitige Anwendung findet, ist für das Raumfachwerk fast unbrauchbar, weil die Konstruktionen im Raume nicht allein viel verwickelter, sondern in gleichem Maße auch ungenauer sind als die in der Ebene. Wir geben hauptsächlich aus dem letztgenannten Grunde dem *Rechnungsverfahren* entschieden den Vorzug.

2. Die Stützung des Raumfachwerks. Wie beim ebenen Fachwerk kann die Art der Stützung *durch Hinzufügung von Stützstäben* veranschaulicht werden, also durch Hinzufügung von starren Stäben, welche die Auflagerknoten mit festen Stützpunkten verbinden. Nach der Zahl der Stützstäbe eines Auflagers unterscheiden wir *einfache, zweifache* und *dreifache* Stützen oder Auflager. Ist ein Auflagerknoten A nur durch *einen* Stab AB gestützt, so kann er in der zu AB rechtwinklig gestellten Ebene kleine Verschiebungen nach allen Richtungen ausführen. Sind *zwei* Stützstäbe AB, AC vorhanden, so ist nur *eine* zur Ebene ABC

rechtwinklig gerichtete Verschiebung möglich. Ist endlich der Knoten A durch *drei* nicht in einer Ebene liegende Stützstäbe AB, AC, AD mit festen Punkten B, C, D verbunden, so ist jede Verschiebung unmöglich.

3. Die Anzahl und die Anordnung der notwendigen Stäbe. Um k Knoten mit den festen Stützpunkten, *die nicht zu den Knoten gezählt werden*, so zu verbinden, daß die Form und die Lage des Fachwerks durch die Stablängen bestimmt werden, sind $3k$ Stäbe notwendig; denn jeder Knoten erfordert zur Festlegung gegen die übrigen Knoten und gegen die Stützpunkte drei Stäbe. Die Anordnung dieser $3k$ Stäbe muß so sein, daß kein Teil des Fachwerks *überzählige* Stäbe enthält. Das Fachwerk darf also keine Gruppe von k_1 Knoten enthalten, die miteinander durch mehr als $(3k_1 - 6)$ Stäbe und mit den festen Stützpunkten durch mehr als $3k_1$ Stäbe verbunden sind. Es ist hierbei zu beachten, daß *sechs* Stäbe erforderlich sind, um *vier* Knoten starr miteinander zu verbinden, und daß jeder folgende Knoten *drei* Stäbe erfordert. Um k_1 Knoten starr miteinander zu verbinden, sind daher

$$6 + 3(k_1 - 4) = 3k_1 - 6$$

Stäbe notwendig.

Die Anordnung der $3k$ notwendigen Stäbe hat noch eine zweite Bedingung zu erfüllen: *Die Belastungen des Fachwerks dürfen nicht unendlich große Stabkräfte hervorrufen;* denn dann bildet die Stabverbindung keinen Träger, also auch kein Fachwerk. Nach Abschnitt 5 der Abhandlung XI tritt dieser Fall ein, wenn ein Stab im Zustande des Maximums oder des Minimums seiner Länge sich befindet. Um festzustellen, ob der bezeichnete Ausnahmefall vorliegt, berechnet man die Stabkräfte. Nehmen dieselben sehr große oder gar unendlich große Werte an, so ist die gewählte Fachwerksform unbrauchbar. In jedem anderen Falle hat das Fachwerk eine brauchbare Form. Die Wahl zwischen den verschiedenen brauchbaren Formen gehört nicht in das Gebiet der Statik.

4. Die Gleichgewichtsbedingungen. Bei der Berechnung der Stabkräfte wird zunächst vorausgesetzt, daß die Knoten des Fachwerks von reibungslosen Gelenken gebildet werden, und daß die Belastungen nicht von den Stäben, sondern nur von den Knoten aufgenommen werden. Die Stäbe haben dann nur Zug- und Druckkräfte in ihren Achsenrichtungen zu übertragen. Die Bedingungen des Gleichgewichts zwischen den Stabkräften und den Knotenlasten

können für jeden Knoten durch *drei* Gleichungen dargestellt werden. Wenn jeder Knoten im Gleichgewichte sich befindet, so ist dies auch für jeden Teil des Fachwerks und für das ganze Fachwerk der Fall. Für ein Raumfachwerk von k Knoten bestehen also zwischen den Stabkräften und den Knotenlasten nicht mehr als $3\,k$ voneinander unabhängige Gleichgewichtsbedingungen. Bei dieser Abzählung sind, wie nochmals hervorgehoben werden möge, die Stützstäbe zu den Stäben, die festen Stützpunkte aber nicht zu den Knoten des Fachwerks zu zählen.

Wenn ein Raumfachwerk von k Knoten nur die $3\,k$ notwendigen Stäbe in brauchbarer Anordnung enthält, so genügen die Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Stabkräfte aus den gegebenen Knotenlasten. Ein solches Fachwerk wird daher ein *einfaches* Raumfachwerk genannt, zur Unterscheidung von dem *zusammengesetzten* Raumfachwerk, welches *mehr* als die $3\,k$ notwendigen Stäbe enthält. Die Stabkräfte des zusammengesetzten Raumfachwerks sind nicht allein von den Knotenlasten, sondern außerdem von der Temperatur der Stäbe und von der Lage der Stützen abhängig.

5. Die Berechnung der Stabkräfte eines einfachen Raumfachwerks aus den Gleichgewichtsbedingungen der Knoten. Die Bestimmung einer großen Anzahl von Unbekannten aus einer ebenso großen Anzahl von linearen Gleichungen ist in der Regel eine zeitraubende und mühsame Arbeit. Bei der Berechnung eines *ebenen* einfachen Fachwerks kann die Wahl der Gleichgewichtsgruppen und die Reihenfolge der Gleichgewichtsbedingungen in den meisten Fällen so angeordnet werden, daß jede Gleichung nur *eine* unbekannte Stabkraft enthält, und nur in Ausnahmefällen wird ein umständlicheres Verfahren nötig, das am Schluß des Abschnittes 6 der Abhandlung XI beschrieben worden ist. Ein ganz ähnliches Verfahren kann auch beim Raumfachwerk angewandt werden, um der Auflösung der Gleichungen eine tunlichst einfache und übersichtliche Form zu geben.

Unter den Gleichgewichtsgruppen, die durch Zerlegung des Fachwerks in zwei oder mehrere Teile gebildet werden können, sind die von den einzelnen Knoten aufzunehmenden Kräftegruppen in der Regel am einfachsten und für die Bildung der Gleichgewichtsbedingungen am bequemsten, weil alle Kräfte einer solchen Gruppe in *einem* Punkte, dem Knotenpunkte, sich schneiden. Nur in seltenen Fällen gewährt eine andere Zerlegung Vorteile. Es handelt sich

also um die Auflösung von k Gruppen von je drei Gleichungen, die zusammen $3k$ unbekannte Stabkräfte enthalten, während in jeder Gruppe in der Regel *mehr als drei* Unbekannte vorkommen. Um diese Anzahl auf drei zurückzuführen und dadurch die *Auflösung einer jeden einzelnen Gruppe abgesondert von den übrigen zu ermöglichen*, ordnen wir die $3k$ Stäbe des Fachwerks in zwei Gruppen. Die Stabkräfte der *ersten* Gruppe werden zunächst als *unbekannte Belastungen* in die Rechnung eingeführt. Die betreffenden Stäbe werden daher *Laststäbe* und ihre Stabkräfte *Stablasten* genannt. Die Laststäbe werden in möglichst geringer Anzahl n so ausgewählt, daß bei geeigneter Reihenfolge der Knoten an jedem außer den Stablasten *nicht mehr als drei* unbekannte Stabkräfte angreifen, so daß durch Auflösung der drei Gleichungen die unbekannten Stabkräfte der *zweiten* Gruppe als Funktionen der gegebenen Knotenlasten und der unbekannten Stablasten dargestellt werden können. Da die Anzahl der Gleichungen $3k$, die Anzahl der unbekannten Stabkräfte der zweiten Gruppe aber $(3k-n)$ beträgt, so können auf dem bezeichneten Wege n Stabkräfte *zweimal* als Funktionen der Lasten ausgedrückt werden. Indem man jedesmal diese beiden Werte einander gleichsetzt, ergeben sich n Gleichungen, die als Unbekannte nur die Stablasten, d. h. die Stabkräfte der ersten Gruppe enthalten. Um die Auflösung dieser n Gleichungen zu erleichtern, ist es erwünscht, die Anzahl der Laststäbe nicht größer als nötig zu wählen. Die Ausführung der Rechnung soll an einigen Beispielen erläutert werden.

6. Erstes Beispiel. Berechnung der Stabkräfte einer Kuppel nach Zimmermannscher Bauart. Das in den Abb. 1 und 2 im Aufriß und Grundriß dargestellte Raumfachwerk hat zwölf Knoten, die mit den römischen Ziffern I bis XII bezeichnet sind. Die acht unteren Knoten sind *zweifach* gestützt, nämlich durch je einen wagerechten und einen lotrechten Stützstab; der Knoten III z. B. durch die Stützstäbe 25 und 29. Die Stabnummern der lotrechten Stützstäbe sind im Grundriß neben den Knotennummern eingeschrieben. Außer den 16 Stützstäben sind 20 Fachwerkstäbe vorhanden, welche die Nummern 1 bis 20 tragen; die Stützstäbe sind mit den Nummern 21 bis 36 bezeichnet. Das Fachwerk ist ein *einfaches* Raumfachwerk, weil es die folgenden drei Bedingungen erfüllt: es enthält die

$$3 \cdot 12 = 36$$

notwendigen Stäbe, es enthält keinen überzähligen Stab, und die Stabkräfte nehmen, wie die folgende Rechnung zeigt, bestimmte end-

liche Werte an. Jeder der zwölf Knoten trägt drei zueinander rechtwinklig gerichtete Lasten X, Y, Z; der Knoten I z. B. die Lasten X_1, Y_1, Z_1. Die positiven Lasten Y sind lotrecht nach unten gerichtet; die positiven Lasten X und Z zeigen *nach dem Inneren* der

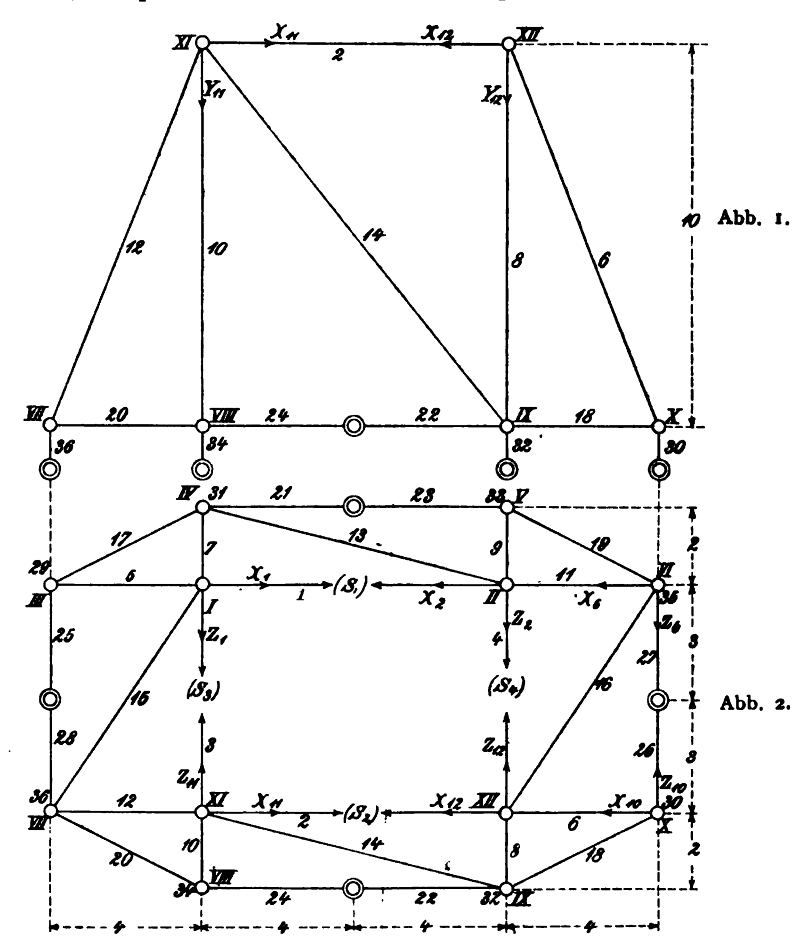


Abb. 1.

Abb. 2.

Kuppel, und zwar die Lasten X parallel zur Längsachse, die Lasten Z parallel zur Querachse der Kuppel. Negative Lasten haben den entgegengesetzten Sinn. Die in Metern angegebenen Maße der Kuppel sind in die Zeichnung eingeschrieben, deren Maßstab 1 : 200 ist.

Die Kräftegruppen der Knotenpaare (I, XII), (II, XI), (III, X) ... sind symmetrisch geformt, so daß die Gleichgewichtsbedingungen der beiden Knoten eines jeden Paares symmetrische Formen erhalten, wodurch die Rechnung erheblich abgekürzt wird.

Die Wahl der Laststäbe. Eine einfache Ueberlegung läßt erkennen, daß es im vorliegenden Falle genügt, *zwei* Stäbe als Laststäbe einzuführen, z. B. die Stäbe 1 und 3 oder 5 und 15 oder 7 und 17 usw. Auf die Form und den Umfang der Rechnung hat diese Wahl keinen Einfluß. Um aber den Vorteil der Symmetrie ausnutzen zu können, empfiehlt es sich, nicht nur *ein* Paar von Stäben, sondern auch das hierzu symmetrisch belegene Paar zu den Laststäben zu zählen. Wir wählen die Stäbe 1, 2, 3, 4 und bezeichnen ihre Stabkräfte, also die *Stablasten,* mit (S_1), (S_2), (S_3), (S_4), um sie von den unbekannten Stabkräften S_5, S_6, S_7 . . . der *zweiten* Stabgruppe zu unterscheiden.

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die Knoten des Raumfachwerks. Auf den Knoten I wirken die drei Knotenlasten X_1, Y_1, Z_1, die beiden Stablasten (S_1), (S_3) und die *drei* unbekannten Stabkräfte S_5, S_7, S_{15}. Den unbekannten Kräften S geben wir den positiven Sinn von *Zugkräften.* Bei *jeder* unendlich kleinen Bewegung des Knotens ist die Summe der Arbeitsgeschwindigkeiten dieser acht Kräfte gleich null. Wir bezeichnen die Geschwindigkeitskomponenten in der Richtung und dem Sinne der Knotenlasten X_1, Y_1, Z_1 mit ξ, η, ζ und setzen, da es sich nicht um die Größe, sondern nur um das Größenverhältnis der Geschwindigkeiten handelt, *eine* dieser Geschwindigkeiten, z. B.

$$\eta = +1.$$

Die drei Knotenlasten haben dann die Arbeitsgeschwindigkeit

$$\xi X_1 + Y_1 + \zeta Z_1;$$

ferner ist die Arbeitsgeschwindigkeit der beiden Stablasten gleich

$$\xi (S_1) + \zeta (S_3),$$

weil die Kräfte (S_1) und (S_3) Richtung und Sinn der Geschwindigkeiten ξ und ζ haben. Um die Arbeitsgeschwindigkeit der Kraft S_5 zu bestimmen, bezeichnen wir mit l_5 die Länge des Stabes 5 und mit x_5, y_5, z_5 die Projektionen der Strecke l_5 vom Sinne der Kraft S_5 auf die Richtungen der Knotengeschwindigkeiten ξ, η, ζ. Mit Benutzung dieser Bezeichnungen erhält die Arbeitsgeschwindigkeit von S_5 den algebraischen Wert

$$\frac{S_5}{l_5} (\xi x_5 + y_5 + \zeta z_5).$$

Wir setzen zur Abkürzung $\dfrac{S_5}{l_5} = s_5$,

und da $x_5 = -4$ Meter, $y_5 = +10$ Meter, $z_5 = 0$ ist, so hat die Arbeitsgeschwindigkeit die Größe

$$s_5 (-4\xi + 10).$$

Die Projektion x_5 ist negativ, weil S_5 nach links, ξ dagegen nach rechts zeigt; y_5 ist positiv, weil S_5 und η beide nach unten zeigen. In gleicher Weise ergeben sich die Arbeitsgeschwindigkeiten der beiden Kräfte S_7 und S_{15}:

$$\frac{S_7}{l_7}(\xi x_7 + y_7 + \zeta z_7) = s_7(10 - 2\zeta)$$

$$\frac{S_{15}}{l_{15}}(\xi x_{15} + y_{15} + \zeta z_{15}) = s_{15}(-4\xi + 10 + 6\zeta).$$

Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung des Knotens I lautet demnach:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \xi X_1 + Y_1 + \zeta Z_1 + \xi(S_1) + \zeta(S_3) + s_5(-4\xi + 10) \\ + s_7(10 - 2\zeta) + s_{15}(-4\xi + 10 + 6\zeta). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die Gleichgewichtsgruppe des Knotens II besteht aus den drei Knotenlasten X_2, Y_2, Z_2, den beiden Stablasten (S_1), (S_4) und den *drei* unbekannten Stabkräften S_9, S_{11}, S_{13}. Als allgemeine Gleichgewichtsbedingung für diesen Knoten ergibt sich auf dem oben beschriebenen Wege:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \xi X_2 + Y_2 + \zeta Z_2 + \xi(S_1) + \zeta(S_4) + s_9(10 - 2\zeta) \\ + s_{11}(-4\xi + 10) + s_{13}(8\xi + 10 - 2\zeta). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Bei der Bildung der Gleichgewichtsbedingungen für die Knoten III, IV, V, VI ist zu beachten, daß die genaue Kenntnis der lotrechten Stützkräfte kein Interesse hat. Um die Bedingungen zu vereinfachen, können daher von vornherein die lotrechten Geschwindigkeiten dieser Knoten

$$\eta = 0$$

gesetzt werden. Die Gleichgewichtsbedingungen erhalten hierdurch die einfachere Form:

$$0 = \xi X_3 + \zeta Z_3 + 4\xi s_5 + s_{17}(4\xi - 2\zeta) + 3 s_{25}\zeta \quad (4)$$

$$0 = \xi X_4 + \zeta Z_4 + 2 s_7 \zeta + s_{13}(8\xi + 2\zeta) + s_{17}(-4\xi + 2\zeta) + 4\xi s_{21} \quad (5)$$

$$0 = \xi X_5 + \zeta Z_5 + 2 s_9 \zeta + s_{19}(-4\xi + 2\zeta) + 4 s_{23}\xi \quad (6)$$

$$0 = \xi X_6 + \zeta Z_6 + 4\xi s_{11} + s_{16}(4\xi + 6\zeta) + s_{19}(4\xi - 2\zeta) + 3 s_{27}\zeta. \quad (7)$$

Die Auflösung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen. Um aus einer der vorstehenden Gleichungen *eine* ihrer drei Unbekannten zu bestimmen, setzt man die Faktoren der anderen beiden Unbekannten gleich null, mit anderen Worten: man wählt die Geschwindigkeiten ξ und ζ jedesmal so, daß nur die zu bestimmende Stabkraft Arbeit verrichtet.

Stabkraft S_5. Um s_5 durch Gleichung 2) zu bestimmen, sind die Faktoren von s_7 und s_{15} gleich null zu setzen:

$$10 - 2\zeta = 0, \quad -4\xi + 10 + 6\zeta = 0;$$

also ist $\quad \zeta = +5, \quad \xi = +10.$

Aus Gleichung 2) folgt dann:

$$s_5 = \frac{S_5}{l_5} = \frac{X_1}{3} + \frac{Y_1}{30} + \frac{Z_1}{6} + \frac{(S_1)}{3} + \frac{(S_3)}{6}. \tag{8}$$

Stabkraft S_7. Man setzt die Faktoren von s_5 und s_{15} in Gleichung 2) gleich null:

$$-4\xi + 10 = 0, \quad -4\xi + 10 + 6\zeta = 0$$

und erhält

$$\xi = +\frac{5}{2}, \quad \zeta = 0$$

und

$$s_7 = \frac{S_7}{l_7} = -\frac{X_1}{4} - \frac{Y_1}{10} - \frac{(S_1)}{4}. \tag{9}$$

Stabkraft S_{15}. Man setzt in Gleichung 2)

$$-4\xi + 10 = 0, \quad 10 - 2\zeta = 0$$

und erhält hierdurch:

$$\xi = +\frac{5}{2}, \quad \zeta = +5$$

$$s_{15} = \frac{S_{15}}{l_{15}} = -\frac{X_1}{12} - \frac{Y_1}{30} - \frac{Z_1}{6} - \frac{(S_1)}{12} - \frac{(S_3)}{6}. \tag{10}$$

In gleicher Weise werden die drei Stabkräfte S_9, S_{11}, und S_{13} durch die Gleichung 3) bestimmt:

Stabkraft S_9. Man setzt

$$-4\xi + 10 = 0, \quad 8\xi + 10 - 2\zeta = 0,$$

also $\quad \xi = +\frac{5}{2}, \quad \zeta = +15$

und erhält aus Gleichung 3):

$$s_9 = \frac{S_9}{l_9} = \frac{X_2}{8} + \frac{Y_2}{20} + \frac{3Z_2}{4} + \frac{(S_1)}{8} + \frac{3(S_4)}{4}. \tag{11}$$

Stabkraft S_{11}.

$$10 - 2\zeta = 0, \quad 8\xi + 10 - 2\zeta = 0$$

$$\zeta = +5, \quad \xi = 0$$

$$s_{11} = \frac{S_{11}}{l_{11}} = -\frac{Y_2}{10} - \frac{Z_2}{2} - \frac{(S_4)}{2}. \tag{12}$$

Stabkraft S_{13}.

$$10 - 2\zeta = 0, \qquad -4\xi + 10 = 0$$

$$\zeta = +5, \qquad \xi = +\frac{5}{2}$$

$$s_{13} = \frac{S_{13}}{l_{13}} = -\frac{X_2}{8} - \frac{Y_2}{20} - \frac{Z_2}{4} - \frac{(S_1)}{8} - \frac{(S_4)}{4}. \tag{13}$$

Jede der folgenden Gleichgewichtsbedingungen 4) bis 7) enthält nur *zwei* unbekannte Stabkräfte. Man kann daher die Geschwindigkeiten ξ und ζ so wählen, daß eine der Unbekannten den Faktor null, die andere den Faktor — 1 erhält, wodurch die Rechnung vereinfacht wird.

Stabkraft S_{17}. Man setzt in Gleichung 4):

$$4\xi - 2\zeta = -1 \quad \text{und} \quad 3\zeta = 0$$

oder

$$\zeta = 0, \qquad \xi = -\frac{1}{4}$$

und erhält hierdurch:

$$s_{17} = -\frac{X_3}{4} - s_5,$$

und indem man den Wert von s_5 aus Gleichung 8) einsetzt:

$$s_{17} = \frac{S_{17}}{l_{17}} = -\frac{X_1}{3} - \frac{Y_1}{30} - \frac{Z_1}{6} - \frac{X_3}{4} - \frac{(S_1)}{3} - \frac{(S_3)}{6}. \tag{14}$$

Stabkraft S_{25}. Man setzt in Gleichung 4):

$$3\zeta = -1, \qquad 4\xi - 2\zeta = 0,$$

also

$$\zeta = -\frac{1}{3}, \qquad \xi = -\frac{1}{6}$$

und erhält:

$$s_{25} = -\frac{X_3}{6} - \frac{Z_3}{3} - \frac{2}{3}s_5,$$

daher nach Gleichung 8):

$$s_{25} = \frac{S_{25}}{l_{25}} = -\frac{2X_1}{9} - \frac{Y_1}{45} - \frac{Z_1}{9} - \frac{X_3}{6} - \frac{Z_3}{3} - \frac{2(S_1)}{9} - \frac{(S_3)}{9}. \tag{15}$$

Stabkraft S_{17}. Man setzt in Gleichung 5):

$$-4\xi + 2\zeta = -1, \quad 4\xi = 0,$$

also

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \zeta = -\frac{1}{2}$$

und erhält in Verbindung mit den Gleichungen 9) und 13):

$$s_{17} = \frac{S_{17}}{l_{17}} = \frac{X_1}{4} + \frac{Y_1}{10} + \frac{X_2}{8} + \frac{Y_2}{20} + \frac{Z_2}{4} - \frac{Z_4}{2} + \frac{3(S_1)}{8} + \frac{(S_4)}{4}. \tag{16}$$

Stabkraft S_{21}. Man setzt:

$$4\xi = -1, \qquad -4\xi + 2\zeta = 0,$$

also
$$\xi = -\frac{1}{4}, \qquad \zeta = -\frac{1}{2}$$

und erhält aus Gleichung 5) in Verbindung mit den Gleichungen 9) und 13):

$$s_{21} = \frac{S_{21}}{l_{21}} = \frac{X_1}{4} + \frac{Y_1}{10} + \frac{3X_2}{8} + \frac{3Y_2}{20} + \frac{3Z_2}{4} - \frac{X_4}{4} - \frac{Z_4}{2} + \frac{5(S_1)}{8} + \frac{3(S_4)}{4}. \qquad (17)$$

Stabkraft S_{19}. Man setzt in Gleichung 6):

$$-4\xi + 2\zeta = -1 \quad \text{und} \quad 4\xi = 0,$$

also
$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \zeta = -\frac{1}{2}$$

und erhält in Verbindung mit Gleichung 11):

$$s_{19} = \frac{S_{19}}{l_{19}} = -\frac{X_2}{8} - \frac{Y_2}{20} - \frac{3Z_2}{4} - \frac{Z_5}{2} - \frac{(S_1)}{8} - \frac{3(S_4)}{4}. \qquad (18)$$

Stabkraft S_{23}. Man setzt in Gleichung 6):

$$4\xi = -1 \quad \text{und} \quad -4\xi + 2\zeta = 0,$$

also
$$\xi = -\frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \zeta = -\frac{1}{2}$$

und erhält in Verbindung mit Gleichung 11):

$$s_{23} = \frac{S_{23}}{l_{23}} = -\frac{X_2}{8} - \frac{Y_2}{20} - \frac{3Z_2}{4} - \frac{X_5}{4} - \frac{Z_5}{2} - \frac{(S_1)}{8} - \frac{3(S_4)}{4}. \qquad (19)$$

Stabkraft S_{19}. Man setzt in Gleichung 7):

$$4\xi - 2\zeta = -1 \quad \text{und} \quad 3\zeta = 0,$$

also
$$\zeta = 0 \quad \text{und} \quad \xi = -\frac{1}{4}$$

und erhält:

$$s_{19} = -\frac{X_6}{4} - s_{11} - s_{16}.$$

Die Größe s_{11} ist durch Gleichung 12) bekannt. Die Größe s_{16} ergibt sich aus dem Wert von s_{15} (Gleichung 10) nach dem Gesetz der Symmetrie:

$$s_{16} = -\frac{X_{12}}{12} - \frac{Y_{12}}{30} - \frac{Z_{12}}{6} - \frac{(S_2)}{12} - \frac{(S_4)}{6}. \qquad (20)$$

Demnach ist:

$$s_{19} = \frac{S_{19}}{l_{19}} = \frac{Y_2}{10} + \frac{Z_2}{2} - \frac{X_6}{4} + \frac{X_{12}}{12} + \frac{Y_{12}}{30} + \frac{Z_{12}}{6} + \frac{(S_2)}{12} + \frac{2(S_4)}{3}. \qquad (21)$$

Stabkraft S_{27}. Man setzt in Gleichung 7):

$$3\zeta = -1 \quad \text{und} \quad 4\xi + 6\zeta = 0,$$

also

$$\zeta = -\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \xi = +\frac{1}{2}$$

und erhält:

$$s_{27} = \frac{X_6}{2} - \frac{Z_6}{3} + 2 s_{11} + \frac{8}{3} s_{19}.$$

Durch Einsetzen der Werte von s_{11} und s_{19} aus den Gleichungen 12) und 18) ergibt sich:

$$s_{27} = \frac{S_{27}}{l_{27}} = -\frac{X_2}{3} - \frac{Y_2}{3} - 3 Z_2 - \frac{4}{3} Z_5 + \frac{X_6}{2} - \frac{Z_6}{3} - \frac{(S_1)}{3} - 3(S_4). \quad (22)$$

Die Berechnung der Stablasten (S_1), (S_2), (S_3), (S_4). In den vorstehenden Gleichungen sind die zehn Stabkräfte S_5, S_7, S_{15}, S_9, S_{11}, S_{13}, S_{25}, S_{21}, S_{23}, S_{27} je *einmal*, die Stabkräfte S_{17} und S_{19} dagegen *zweimal* als Funktionen der Knotenlasten X, Y, Z und der vier Stablasten (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) dargestellt. Indem man die beiden Werte von S_{17} aus den Gleichungen 14) und 16) und die beiden Werte von S_{19} aus den Gleichungen 18) und 21) einander gleichsetzt, ergeben sich zwei Bedingungen, die von den unbekannten Stablasten zu erfüllen sind:

$$\left.\begin{aligned} 0 = 70 X_1 + 16 Y_1 + 20 Z_1 + 15 X_2 + 6 Y_2 + 30 Z_2 + 30 X_3 \\ - 60 Z_4 + 85 (S_1) + 20 (S_3) + 30 (S_4) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

und

$$\left.\begin{aligned} 0 = 15 X_2 + 18 Y_2 + 150 Z_2 + 60 Z_5 - 30 X_6 + 10 X_{12} + 4 Y_{12} \\ + 20 Z_{12} + 15 (S_1) + 10 (S_2) + 170 (S_4). \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Hierzu symmetrisch bestehen für die andere Fachwerkshälfte die beiden Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} 0 = 70 X_{12} + 16 Y_{12} + 20 Z_{12} + 15 X_{11} + 6 Y_{11} + 30 Z_{11} + 30 X_{10} \\ - 60 Z_9 + 85 (S_2) + 20 (S_4) + 30 (S_3) \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

$$\left.\begin{aligned} 0 = 15 X_{11} + 18 Y_{11} + 150 Z_{11} + 60 Z_8 - 30 X_7 + 10 X_1 + 4 Y_1 \\ + 20 Z_1 + 15 (S_2) + 10 (S_1) + 170 (S_3). \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Um aus diesen vier Bedingungen die unbekannten Stablasten zu berechnen, summiert man die Gleichungen 23), 25) und die Gleichungen 24), 26), wodurch zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten $(S_1) + (S_2)$ und $(S_3) + (S_4)$ entstehen. Ferner bildet man zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten $(S_1) - (S_2)$ und $(S_3) - (S_4)$, indem man Gleichung 25) von Gleichung 23) und

Gleichung 26) von Gleichung 24) subtrahiert. Auf diesem Wege erhält man:

$$\left.\begin{aligned}(S_1) = \frac{1}{10560}(&- 8960\,X_1 - 2020\,Y_1 - 2280\,Z_1 - 1600\,X_2\\ &- 356\,Y_2 - 360\,Z_2 - 3910\,X_3 + 7820\,Z_4 + 1420\,Z_5\\ &- 710\,X_6 - 490\,X_7 + 980\,Z_8 + 340\,Z_9 - 170\,X_{10}\\ &+ 160\,X_{11} + 260\,Y_{11} + 2280\,Z_{11} - 160\,X_{12} + 4\,Y_{12}\\ &+ 360\,Z_{12})\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

$$\left.\begin{aligned}(S_2) = \frac{1}{10560}(&- 8960\,X_{12} - 2020\,Y_{12} - 2280\,Z_{12} - 1600\,X_{11}\\ &- 356\,Y_{11} - 360\,Z_{11} - 3910\,X_{10} + 7820\,Z_9\\ &+ 1420\,Z_8 - 710\,X_7 - 490\,X_6 + 980\,Z_5 + 340\,Z_4\\ &- 170\,X_3 + 160\,X_2 + 260\,Y_2 + 2280\,Z_2 - 160\,X_1\\ &+ 4\,Y_1 + 360\,Z_1)\end{aligned}\right\}\quad(28)$$

$$\left.\begin{aligned}(S_3) = \frac{1}{10560}(&- 80\,X_1 - 130\,Y_1 - 1140\,Z_1 + 80\,X_2 - 2\,Y_2\\ &- 180\,Z_2 + 245\,X_3 - 490\,Z_4 - 170\,Z_5 + 85\,X_6\\ &+ 1955\,X_7 - 3910\,Z_8 - 710\,Z_9 + 355\,X_{10} - 800\,X_{11}\\ &- 1102\,Y_{11} - 9420\,Z_{11} + 800\,X_{12} + 178\,Y_{12}\\ &+ 180\,Z_{12})\end{aligned}\right\}\quad(29)$$

$$\left.\begin{aligned}(S_4) = \frac{1}{10560}(&- 80\,X_{12} - 130\,Y_{12} - 1140\,Z_{12} + 80\,X_{11} - 2\,Y_{11}\\ &- 180\,Z_{11} + 245\,X_{10} - 490\,Z_9 - 170\,Z_8 + 85\,X_7\\ &+ 1955\,X_6 - 3910\,Z_5 - 710\,Z_4 + 355\,X_3 - 800\,X_2\\ &- 1102\,Y_2 - 9420\,Z_2 + 800\,X_1 + 178\,Y_1 + 180\,Z_1).\end{aligned}\right\}\quad(30)$$

Indem man diese Werte der Stablasten in die Gleichungen 8) bis 22) einsetzt, werden alle Stabkräfte einer Fachwerkshälfte als Funktionen der Knotenlasten dargestellt.

7. Zweites Beispiel. Berechnung der Stabkräfte einer Kuppel nach Schwedlerscher Bauart. Das in den Abb. 3 und 4 im Aufriß und im Grundriß dargestellte einfache Raumfachwerk hat *zwölf* Knoten und *sechsunddreißig* Stäbe; erstere sind mit den Ziffern I bis XII, letztere mit den Nummern 1 bis 36 bezeichnet. Die sechs Knoten VII bis XII sind durch die zwölf Stützstäbe 25 bis 36 mit den festen Punkten *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* der Stützmauern verbunden, also zweifach gestützt. Die sechs punktierten Stäbe, welche die festen Stützpunkte miteinander verbinden, gehören nicht zum Fachwerk und dienen nur dazu, das Stützmauerwerk zu versteifen. Jeder der zwölf Knoten trägt drei zueinander rechtwinklig gerichtete Lasten X, Y, Z. Die Last Y ist lotrecht und zeigt nach

unten, wenn sie positiv ist. Die beiden Lasten X und Z sind wagerecht; X schneidet die Vertikalachse der Kuppel, und ihr positiver Sinn zeigt nach innen. Der positive Sinn von Z zeigt — im Sinne

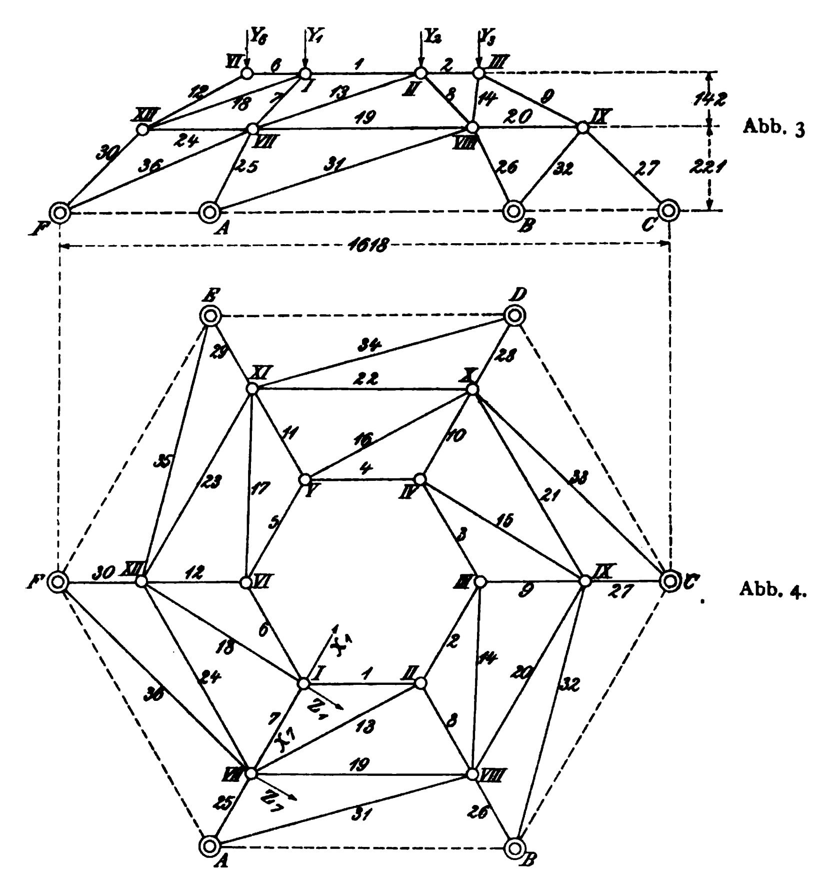


Abb. 3

Abb. 4.

von X gesehen — nach rechts. Durch diese Zerlegung der Lasten wird erreicht, daß die sechs Gleichgewichtsgruppen der Knoten I bis VI und der Knoten VII bis XII gleiche Gestalt annehmen, so daß die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für die sechs Knoten eines Ringes der Form nach übereinstimmen.

Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung für einen Knoten des oberen Ringes, z. B. für den Knoten I. Auf den Knoten I wirken die drei Lasten X_1, Y_1, Z_1 und die vier Stabkräfte S_1, S_6, S_7, S_{18}. Wenn, wie im vorliegenden Falle, die Projektionen der Stablängen auf die Richtungen der Lasten X, Y, Z nicht ohne weiteres aus der Zeichnung abzulesen sind, so empfiehlt es sich, statt jener

Projektionen die Kosinusse der Winkel zu bestimmen, welche von den Stabkräften mit den Lastrichtungen gebildet werden. Die folgende Tabelle enthält diese Kosinuswerte:

	S_1	S_6	S_7	S_{18}
X_1	+ 0,50	+ 0,50	− 0,89	+ 0,03
Y_1	0	0	+ 0,45	+ 0,27
Z_1	+ 0,87	− 0,87	0	− 0,96

In betreff der *Vorzeichen* der Kosinuswerte ist daran zu erinnern, daß den unbekannten Stabkräften der positive Sinn von *Zugkräften* beizulegen ist. Wir erteilen dem Knoten I gleichzeitig drei Geschwindigkeiten von der Richtung und dem Sinne der Lasten X, Y, Z, die in dieser Reihenfolge die Größen

$$100\,\xi, \quad 100, \quad 100\,\zeta$$

haben, und setzen nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten die Summe der Arbeitsgeschwindigkeiten der sieben Kräfte gleich null. Hierdurch entsteht die allgemeine Gleichgewichtsbedingung des Knotens I:

$$\left.\begin{aligned} 0 = 100\,\xi X_1 + 100\,Y_1 + 100\,\zeta Z_1 + S_1\,(50\,\xi + 87\,\zeta) \\ + S_6\,(50\,\xi - 87\,\zeta) + S_7\,(-89\,\xi + 45) + S_{18}\,(3\,\xi + 27 - 96\,\zeta). \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Von gleicher Form sind die Bedingungen für die anderen fünf Knoten II, III, IV, V, VI des oberen Ringes; es ändern sich nur die Kennziffern der Kräfte. Für den Knoten II z. B. ergibt sich in dieser Weise die allgemeine Gleichgewichtsbedingung:

$$\begin{aligned} 0 = 100\,\xi X_2 + 100\,Y_2 + 100\,\zeta Z_2 + S_2\,(50\,\xi + 87\,\zeta) \\ + S_1\,(50\,\xi - 87\,\zeta) + S_8\,(-89\,\xi + 45) + S_{13}\,(3\,\xi + 27 - 96\,\zeta). \end{aligned}$$

Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung für einen Knoten des mittleren Ringes, z. B. für den Knoten VII. Auf den Knoten VII wirken die drei Lasten X_7, Y_7, Z_7 und die sechs Stabkräfte S_7, S_{13}, S_{19}, S_{24}, S_{25}, S_{36}. Die Kosinusse der von den Richtungen der Stabkräfte mit den Richtungen der Lasten gebildeten Winkel sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	S_7	S_{13}	S_{19}	S_{24}	S_{25}	S_{36}
X_7	+ 0,89	+ 0,82	+ 0,50	+ 0,50	− 0,71	+ 0,24
Y_7	− 0,45	− 0,27	0	0	+ 0,71	+ 0,29
Z_7	0	+ 0,51	+ 0,87	− 0,87	0	− 0,93

Werden die Geschwindigkeiten wie im vorhergehenden Falle gewählt, so lautet die allgemeine Gleichgewichtsbedingung des Knotens VII:

$$\left.\begin{aligned} 0 = 100\xi X_7 + 100 Y_7 + 100\zeta Z_7 + S_7(89\xi - 45) + S_{13}(82\xi - 27 + 51\zeta) \\ + S_{19}(50\xi + 87\zeta) + S_{24}(50\xi - 87\zeta) \\ + S_{25}(-71\xi + 71) + S_{36}(24\xi + 29 - 93\zeta). \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Von derselben Form sind die Bedingungen für die übrigen fünf Knoten VIII, IX, X, XI, XII des Mittelringes. Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung z. B. für den Knoten VIII entsteht aus der Gleichung 32), indem man die Kennziffern

7 13 19 24 25 36

mit

8 14 20 19 26 31

vertauscht.

Die Auflösung der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen. In dem vorliegenden Beispiel ist es nicht nötig, *Laststäbe* einzuführen, weil man die besonderen Gleichgewichtsbedingungen so ordnen kann, daß in jeder nur *eine* unbekannte Stabkraft vorkommt. Es hat dies seinen Grund darin, daß von den vier Stabkräften S_1, S_6, S_7, S_{18}, die an einem Knoten I des oberen Ringes angreifen, *drei*, nämlich S_6, S_7, S_{18} in *einer* Ebene liegen. Wählt man die Richtung der Geschwindigkeit des Knotens I rechtwinklig zu dieser Ebene, so verschwinden die Arbeitsgeschwindigkeiten jener drei Kräfte und die Gleichgewichtsbedingung enthält dann nur die unbekannte Kraft S_1. Darauf lassen sich Bedingungen bilden, die ebenfalls nur *eine* unbekannte Stabkraft enthalten, und zwar in der Reihenfolge S_6, S_7, S_{18}, S_{13}, S_{19}, S_{24}, S_{25}, S_{36}. Alle übrigen Stabkräfte ergeben sich dann nach den Regeln der Symmetrie. Die Rechnung nimmt demnach folgende Form an.

In Gleichung 31) können aus dem angegebenen Grunde gleichzeitig die *drei* Bedingungen:

$$50\xi - 87\zeta = 0, \quad -89\xi + 45 = 0, \quad 3\xi + 27 - 96\zeta = 0$$

erfüllt werden. Sie bestimmen die Komponenten der zur Ebene 6, 7, 18 rechtwinklig gerichteten Geschwindigkeit:

$$100\xi = +51, \quad 100\zeta = +30$$

und durch Gleichung 31) die Stabkraft

$$S_1 = -X_1 - 1{,}98 Y_1 - 0{,}57 Z_1. \quad (33)$$

Nach den Regeln der Symmetrie folgt hieraus

$$S_6 = -X_6 - 1{,}98 Y_6 - 0{,}57 Z_6. \quad (34)$$

Um ferner S_{18} zu bestimmen, setzt man in Gleichung 31)

$$50\,\xi + 87\,\zeta = 0, \qquad -89\,\xi + 45 = 0$$

und erhält

$$\xi = +0{,}51, \qquad \zeta = -0{,}30,$$

folglich

$$S_{18} = 0{,}89\,(X_6 - X_1) + 1{,}76\,(Y_6 - Y_1) + 0{,}51\,(Z_6 + Z_1). \quad (35)$$

In derselben Weise ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung für den Knoten II:

$$S_{13} = 0{,}89\,(X_1 - X_2) + 1{,}76\,(Y_1 - Y_2) + 0{,}51\,(Z_1 + Z_2). \quad (36)$$

Man bestimmt endlich die letzte Kraft S_7 am Knoten I, indem man in Gleichung 31) einsetzt:

$$50\,\xi + 87\,\zeta = 0 \quad \text{und} \quad 50\,\xi - 87\,\zeta = 0$$

oder

$$\xi = 0 \quad \text{und} \quad \zeta = 0.$$

Daraus folgt:

$$S_7 = 0{,}53\,(X_1 - X_6) - 1{,}16\,Y_1 - 1{,}06\,Y_6 - 0{,}31\,(Z_1 + Z_6). \quad (37)$$

Aus Gleichung 32) kann zunächst die Stabkraft S_{19} berechnet werden, weil S_7 und S_{13} aus den Gleichungen 37) und 36) bekannt sind, und alle anderen Stabkräfte S_{24}, S_{25}, S_{36} in *einer* Ebene liegen. Infolgedessen können gleichzeitig die *drei* Bedingungen erfüllt werden:

$$50\,\xi - 87\,\zeta = 0, \qquad -71\,\xi + 71 = 0, \qquad 24\,\xi + 29 - 93\,\zeta = 0.$$

Diese Bedingungen ergeben:

$$\xi = 1, \qquad \zeta = 0{,}57$$

und in Verbindung mit den Gleichungen 32), 36) und 37):

$$\left.\begin{aligned} S_{19} = &-0{,}98\,X_1 - 0{,}97\,Y_1 - 0{,}29\,Z_1 + 0{,}75\,X_2 + 1{,}48\,Y_2 - 043\,Z_2 \\ &+ 0{,}23\,X_6 + 0{,}47\,Y_6 + 0{,}14\,Z_6 - X_7 - Y_7 - 0{,}57\,Z_7. \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Hierzu symmetrisch ist:

$$\left.\begin{aligned} S_{24} = &-0{,}98\,X_6 - 0{,}97\,Y_6 - 0{,}29\,Z_6 + 0{,}75\,X_1 + 1{,}48\,Y_1 - 0{,}43\,Z_1 \\ &+ 0{,}23\,X_5 + 0{,}47\,Y_5 + 0{,}14\,Z_5 - X_{12} - Y_{12} - 0{,}57\,Z_{12}. \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Die Berechnung der beiden letzten Stabkräfte S_{25} und S_{36} am Knoten VII bedarf hiernach keiner weiteren Erläuterung.

8. Die Auflösung der Gleichgewichtsbedingungen bei unregelmäßiger Form des Fachwerks. In den vorstehenden Beispielen nimmt die Auflösung der Gleichgewichtsbedingungen eine sehr einfache Form an, weil infolge der regelmäßigen Gestalt des Fachwerks einige Glieder jener Gleichungen verschwinden. Wenn dies *nicht* der Fall ist, so hat die allgemeine Gleichgewichtsbedingung eines Knotens die vollständige Form:

$$0 = A + s_1(x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta) + s_2(x_2\xi + y_2\eta + z_2\zeta) + s_3(x_3\xi + y_3\eta + z_3\zeta) \quad (40)$$

A bezeichnet die Summe der bekannten Glieder der Gleichung; die Bedeutung der übrigen Zeichen wurde im Abschnitt 6 erklärt. Zur Berechnung der drei Unbekannten s_1, s_2 und s_3 setzt man im *ersten* Falle:

$$x_2 \xi + y_2 \eta + z_2 \zeta = 0 \quad \text{und} \quad x_3 \xi + y_3 \eta + z_3 \zeta = 0,$$

im *zweiten* Falle:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta = 0 \quad \text{und} \quad x_3 \xi + y_3 \eta + z_3 \zeta = 0$$

und im *dritten* Falle:

$$x_1 \xi + y_1 \eta + z_1 \zeta = 0 \quad \text{und} \quad x_2 \xi + y_2 \eta + z_2 \zeta = 0.$$

Die in Gleichung 40) einzusetzenden Werte von ξ, η und ζ sind demnach im *ersten* Falle:

$$\xi = y_2 z_3 - z_2 y_3, \quad \eta = z_2 x_3 - x_2 z_3, \quad \zeta = x_2 y_3 - y_2 x_3, \qquad (41)$$

ferner im *zweiten* Falle:

$$\xi = y_1 z_3 - z_1 y_3, \quad \eta = z_1 x_3 - x_1 z_3, \quad \zeta = x_1 y_3 - y_1 x_3 \qquad (42)$$

und endlich im *dritten* Falle:

$$\xi = y_1 z_2 - z_1 y_2, \quad \eta = z_1 x_2 - x_1 z_2, \quad \zeta = x_1 y_2 - y_1 x_2. \qquad (43)$$

Selbstverständlich sind diese Formeln auch gültig in den einfacheren Fällen, die in den obigen Beispielen vorlagen. Die Auflösung der Gleichgewichtsbedingungen ist hierdurch zurückgeführt auf das Einsetzen der gegebenen Strecken x, y, z in die vier Gleichungen 40) bis 43).

9. Die Bestimmung der Stablasten auf kinematischem Wege. Das im folgenden zu beschreibende Verfahren möge an dem ersten Beispiel, der Zimmermannschen Kuppel (Abb. 1 und 2), erklärt werden. Man schneide aus dem Laststabe 1 ein Stück heraus und ersetze dasselbe durch die beiden Stablasten (S_1) von unbekannter Größe im Sinne von Zugkräften. Hierdurch wird das Fachwerk in ein *zwangläufiges Getriebe* verwandelt, auf das außer den Lasten X, Y, Z eines jeden Knotens nur noch die zwei Stablasten (S_1) einwirken. Wir erinnern daran, daß die positive Last Y lotrecht ist, während die wagerechten Lasten X und Z parallel zur Längsachse und zur Querachse der Kuppel gerichtet sind und nach innen zeigen, wenn sie das positive Vorzeichen tragen. Wir erteilen dem Getriebe eine unendlich kleine Bewegung und bezeichnen z. B. für den Knoten II mit ξ_2, η_2, ζ_2 seine Geschwindigkeitskomponenten in den Richtungen und dem positiven Sinne seiner Lasten X_2, Y_2, Z_2. Ferner sei σ_1 die Dehnungsgeschwindigkeit der Stabstrecke I II des durchschnittenen Stabes. Die Dehnungsgeschwindigkeiten aller anderen Stabstrecken

sind gleich null. Die Arbeitsgeschwindigkeit der sämtlichen Knotenlasten wird durch die Summe $\Sigma(\xi X + \eta Y + \zeta Z)$ angegeben, während die Arbeitsgeschwindigkeit der beiden Stablasten die algebraische Größe $-\sigma_1 (S_1)$ hat. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten ist die algebraische Summe dieser Arbeitsgeschwindigkeiten gleich null und folglich

$$(S_1) = \frac{\Sigma(\xi X + \eta Y + \zeta Z)}{\sigma_1}. \qquad (44)$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeiten ξ, η, ζ, σ_1 ist das *graphische* Verfahren *nicht* geeignet, weil es wenig übersichtlich und nicht genau genug ist. Daher verdient auch hier die *Rechnung* den Vorzug. Man vergleiche die Abschnitte 4 und 6 der Abhandlung XI. Die vorliegende Aufgabe enthält $(3k - 1)$ unbekannte Größen, nämlich für jeden der k Knoten die drei Geschwindigkeiten ξ, η, ζ mit Ausnahme von *einer*, die nach Belieben gewählt werden kann. Wir zählen die Dehnungsgeschwindigkeit σ_1 nicht zu den Unbekannten, weil sie unmittelbar durch die Geschwindigkeiten der Knoten I und II bestimmt wird:

$$\sigma_1 = -\xi_1 - \xi_2. \qquad (45)$$

Zur Berechnung der $(3k - 1)$ Unbekannten läßt sich eine ebenso große Anzahl von linearen Gleichungen bilden, indem man für jeden der $(3k - 1)$ starren Stäbe, die das Fachwerk außer dem durchschnittenen Stabe enthält, die *Schubgeschwindigkeit* zweimal aus den Geschwindigkeiten der beiden Endpunkte des Stabes bestimmt. Die Schubgeschwindigkeit eines starren Stabes bildet die Projektion der Geschwindigkeit irgend eines Punktes des Stabes oder die Projektionssumme seiner Geschwindigkeitskomponenten auf die Stabrichtung. Wir wählen als Beispiel den Stab 15, dessen Länge l_{15} durch die beiden Knoten I und VII begrenzt wird, und bestimmen seine Schubgeschwindigkeit *im Sinne der Strecke VII I.* Da die Strecke VII I in bezug auf die Richtungen der Geschwindigkeiten ξ_7, η_7, ζ_7 die Projektionen $+4^m$, -10^m, $+6^m$ hat, so ist die Projektionssumme der Geschwindigkeiten ξ_7, η_7, ζ_7 in bezug auf die Richtung und den Sinn der Strecke VII I gleich

$$\frac{1}{l_{15}}(4\xi_7 - 10\eta_7 + 6\zeta_7).$$

Ferner hat die Strecke VII I in bezug auf die Richtungen der Geschwindigkeiten ξ_1, η_1, ζ_1 des Knotens I die Projektionen $+4^m$, -10^m,

-6^m, und daher ist die Schubgeschwindigkeit des Stabes 15 im Sinne der Strecke VII I auch gleich

$$\frac{1}{l_{15}}(4\xi_1 - 10\eta_1 - 6\zeta_1).$$

Zwischen den Geschwindigkeiten der Knoten VII und I, die durch den starren Stab 15 miteinander verbunden sind, besteht demnach die Bedingung:

$$4\xi_7 - 10\eta_7 + 6\zeta_7 = 4\xi_1 - 10\eta_1 - 6\zeta_1.$$

Eine Bedingung von dieser Art ergibt sich für jeden der 35 starren Stäbe des Getriebes.

Die Schubgeschwindigkeit eines jeden der mit den Nummern 21 bis 36 bezeichneten *Stütz*stäbe ist gleich null, weil *ein* Endpunkt eines jeden Stützstabes *ruht*. Daher sind die 16 Geschwindigkeiten $\eta_3, \zeta_3, \eta_4, \xi_4, \eta_5, \xi_5, \eta_6, \zeta_6, \eta_7, \zeta_7, \eta_8, \xi_8, \eta_9, \xi_9, \eta_{10}, \zeta_{10}$ gleich null, und die acht zweifach gestützten Knoten III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X haben in dieser Reihenfolge nur die Geschwindigkeiten ξ_3, $\zeta_4, \zeta_5, \xi_6, \xi_7, \zeta_8, \zeta_9$ und ξ_{10}. Für diese acht Größen ergeben sich durch die Schubgeschwindigkeiten der Stäbe 17, 19, 20, 18 die vier Bedingungen

$$4\xi_3 = -2\zeta_4, \quad 4\xi_6 = -2\zeta_5, \quad 4\xi_7 = -2\zeta_8, \quad 4\xi_{10} = -2\zeta_9$$

oder

$$\zeta_4 = -2\xi_3, \qquad (46)$$

$$\zeta_5 = -2\xi_6, \qquad (47)$$

$$\zeta_8 = -2\xi_7, \qquad (48)$$

$$\zeta_9 = -2\xi_{10}. \qquad (49)$$

Vermittels der vier Größen $\xi_3, \xi_6, \xi_7, \xi_{10}$ können ferner die Geschwindigkeiten der übrigen Knoten I, II, III, IV ausgedrückt werden, da für jeden dieser vier Knoten die Schubgeschwindigkeiten von *drei* anschließenden Stäben durch jene vier Größen bestimmt werden. Wir bestimmen zunächst die Geschwindigkeiten des Knotens I aus den Schubgeschwindigkeiten der Stäbe 5, 7 und 15:

$$4\xi_1 - 10\eta_1 = 4\xi_3,$$

$$2\zeta_1 - 10\eta_1 = 2\zeta_4 = -4\xi_3,$$

$$4\xi_1 - 10\eta_1 - 6\zeta_1 = 4\xi_7.$$

Diese Bedingungen ergeben:

$$\xi_1 = \frac{1}{3}(7\xi_3 - \xi_7) \qquad (50)$$

$$\eta_1 = \frac{2}{15}(4\xi_3 - \xi_7) \qquad (51)$$

$$\zeta_1 = \frac{2}{3}(\xi_3 - \xi_7). \qquad (52)$$

In gleicher Weise lassen sich die Geschwindigkeiten des Knotens XII aus den Schubgeschwindigkeiten der Stäbe 6, 8 und 16 bestimmen; einfacher ergeben sie sich nach den Regeln der Symmetrie aus den Gleichungen 50) bis 52):

$$\xi_{12} = \frac{1}{3}(7\,\xi_{10} - \xi_6) \tag{53}$$

$$\eta_{12} = \frac{2}{15}(4\,\xi_{10} - \xi_6) \tag{54}$$

$$\zeta_{12} = \frac{2}{3}(\xi_{10} - \xi_6). \tag{55}$$

Wir bestimmen ferner die Geschwindigkeiten des Knotens II aus den Schubgeschwindigkeiten der Stäbe 9, 11 und 13:

$$\begin{aligned} -10\,\eta_2 + 2\,\zeta_2 &= 2\,\zeta_5 = -4\,\xi_6, \\ 4\,\xi_2 - 10\,\eta_2 &= 4\,\xi_6, \\ -8\,\xi_2 - 10\,\eta_2 + 2\,\zeta_2 &= 2\,\zeta_4 = -4\,\xi_3, \end{aligned}$$

also:

$$\xi_2 = \frac{1}{2}(\xi_3 - \xi_6), \tag{56}$$

$$\eta_2 = \frac{1}{5}(\xi_3 - 3\,\xi_6), \tag{57}$$

$$\zeta_2 = \xi_3 - 5\,\xi_6, \tag{58}$$

und folgern aus der Symmetrie:

$$\xi_{11} = \frac{1}{2}(\xi_{10} - \xi_7), \tag{59}$$

$$\eta_{11} = \frac{1}{5}(\xi_{10} - 3\,\xi_7), \tag{60}$$

$$\zeta_{11} = \xi_{10} - 5\,\xi_7. \tag{61}$$

Endlich liefern die Schubgeschwindigkeiten der Stäbe 2, 3 und 4 die Bedingungen:

$$\xi_{11} = -\xi_{12}, \tag{62}$$

$$\zeta_1 = -\zeta_{11}, \tag{63}$$

$$\zeta_2 = -\zeta_{12} \tag{64}$$

oder nach den Gleichungen 59), 53), 52), 61), 58) und 55):

$$0 = 2\,\xi_6 + 3\,\xi_7 - 17\,\xi_{10}, \tag{65}$$

$$0 = 2\,\xi_3 - 17\,\xi_7 + 3\,\xi_{10}, \tag{66}$$

$$0 = 3\,\xi_3 - 17\,\xi_6 + 2\,\xi_{10}. \tag{67}$$

Wir wählen jetzt *eine* der Geschwindigkeiten nach Belieben, z. B.

$$\xi_{10} = -170,$$

und zwar so, daß auch die übrigen Geschwindigkeiten durch ganze

Zahlen ausgedrückt werden können. Die letzten drei Gleichungen ergeben dann:

$$\xi_3 = -3910, \quad \xi_6 = -710, \quad \xi_7 = -490.$$

Indem man diese Werte in die Gleichungen 46) bis 61) einsetzt, erhält man die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Größen der Geschwindigkeiten.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
ξ	− 8960	− 1600	− 3910	0	0	− 710	− 490	0	0	− 170	+ 160	− 160
η	− 2020	− 356	0	0	0	0	0	0	0	0	+ 260	+ 4
ζ	− 2280	− 360	0	+ 7820	+ 1420	0	0	+ 980	+ 340	0	+ 2280	+ 360

Um die Stablast (S_1) zu bestimmen, sind die vorstehenden Werte, sowie nach Gleichung 45) der Wert der Dehnungsgeschwindigkeit

$$\sigma_1 = -\xi_1 - \xi_2 = +8960 + 1600 = +10560$$

in Gleichung 44) einzusetzen. Es ergibt sich hierdurch die auf einem anderen Wege abgeleitete Gleichung 27):

$$\left.\begin{aligned}(S_1) = \frac{1}{10560}\,(&-8960\,X_1 - 2020\,Y_1 - 2280\,Z_1 - 1600\,X_2 \\ &-356\,Y_2 - 360\,Z_2 - 3910\,X_3 + 7820\,Z_4 + 1420\,Z_5 \\ &-710\,X_6 - 490\,X_7 + 980\,Z_8 + 340\,Z_9 - 170\,X_{10} \\ &+160\,X_{11} + 260\,Y_{11} + 2280\,Z_{11} - 160\,X_{12} \\ &+4\,Y_{12} + 360\,Z_{12}).\end{aligned}\right\} \quad (68)$$

Das im Vorstehenden für den Stab 1 beschriebene Verfahren ist für den Stab 3 zu wiederholen. Hierbei bleiben die Gleichungen 46) bis 64) unverändert, mit Ausnahme der Gleichung 63), welche fortfällt, weil der Stab 3 zu durchschneiden ist. Diese Gleichung ist zu ersetzen durch die Bedingung für den starren Stab 1:

$$\xi_1 = -\xi_2. \quad (69)$$

Aus den Gleichungen 62), 64), 69) in Verbindung mit den Gleichungen 59), 53), 58), 55), 50) und 56) folgen die beiden Gleichungen 65) und 67):

$$\begin{aligned}0 &= 2\,\xi_6 + 3\,\xi_7 - 17\,\xi_{10} \\ 0 &= 3\,\xi_3 - 17\,\xi_6 + 2\,\xi_{10}\end{aligned}$$

und die neue Bedingung

$$0 = -17\,\xi_3 + 3\,\xi_6 + 2\,\xi_7. \quad (70)$$

Wir wählen wieder *eine* dieser Geschwindigkeiten willkürlich, z. B.

$$\xi_6 = +85$$

und erhalten aus den letzten drei Gleichungen:

$$\xi_3 = +245, \quad \xi_7 = +1955, \quad \xi_{10} = +355.$$

Durch Einsetzen dieser vier Werte in die Gleichungen 46) bis 61) ergeben sich die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Geschwindigkeiten:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
ξ	− 80	+ 80	+ 245	0	0	+ 85	+ 1955	0	0	+ 355	− 800	+ 800
η	− 130	− 2	0	0	0	0	0	0	0	0	− 1102	+ 178
ζ	− 1140	− 180	0	− 490	− 170	0	0	− 3910	− 710	0	− 9420	+ 180

In der Gleichung

$$(S_3) = \frac{\Sigma(\xi X + \eta Y + \zeta Z)}{\sigma_3} \tag{71}$$

bezeichnen ξ, η, ζ die in der vorstehenden Tabelle verzeichneten Geschwindigkeiten und σ_3 die Dehnungsgeschwindigkeit der Stabstrecke I XI des durchschnittenen Stabes 3, welche durch die Geschwindigkeiten der Knoten I und XI bestimmt wird:

$$\sigma_3 = -\zeta_1 - \zeta_{11} = +1140 + 9420 = +10560. \tag{72}$$

Demnach ist wie in Gleichung 29):

$$\left.\begin{aligned}(S_3) = \frac{1}{10560}\,(&-80X_1 - 130Y_1 - 1140Z_1 + 80X_2 - 2Y_2 \\ &- 180Z_2 + 245X_3 - 490Z_4 - 170Z_5 + 85X_6 \\ &+ 1955X_7 - 3910Z_8 - 710Z_9 + 355X_{10} \\ &- 800X_{11} - 1102Y_{11} - 9420Z_{11} + 800X_{12} \\ &+ 178Y_{12} + 180Z_{12}).\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Die Ausdrücke für die Stablasten (S_2) und (S_4) können, wie im Abschnitt 6 beschrieben wurde, aus den Gleichungen 68) und 73) nach den Regeln der Symmetrie gebildet werden.

Das im Vorstehenden beschriebene Verfahren kann in gleicher Weise auch für die Berechnung der übrigen Stabkräfte benutzt werden. Es ist jedoch in jedem Falle zu überlegen, ob dieser Weg einfacher ist, als die im Abschnitt 6 beschriebene Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen für die Knoten des Fachwerks.

10. Die Berechnung der Formänderung eines einfachen Raumfachwerks. Wir nehmen an, daß die festen Punkte

der Stützstäbe ihre Lage *nicht* verändern und daß die Längenänderungen δ_1, δ_2, δ_3 ... *aller* Stablängen l_1, l_2, l_3 ... gegeben sind. Durch die Längenänderungen der Stützstäbe kann eine gegebene Lagenänderung der gestützten Knoten in Rechnung gestellt werden. Die Aufgabe besteht also darin, die Verschiebungen ξ, η, ζ eines jeden Knotens *in der Richtung und dem Sinne der Achsen x, y, z eines festen Koordinatensystems* zu berechnen. Wenn die Dauer der Bewegung als Zeiteinheit gewählt wird, so können ξ, η, ζ auch als die *Geschwindigkeiten* der Knoten bezeichnet werden; denn letztere unterscheiden sich von den Verschiebungen nur durch die Maßeinheit. Wir erklären auch diese Rechnung an dem in Abb. 1 und 2 dargestellten Beispiel. Der x-Achse geben wir Richtung und Sinn der Stabstrecke I II, der z-Achse Richtung und Sinn der Stabstrecke XI I; die y-Achse ist lotrecht und zeigt nach oben.

Die Beziehung zwischen den Geschwindigkeiten der beiden Endpunkte eines dehnbaren Stabes. Einem jeden Stabe, z. B. dem Stabe 16, geben wir den Sinn von dem Knoten mit der *niedrigeren* Nummer VI nach dem Knoten mit der *höheren* Nummer XII und bezeichnen also VI als den *Anfangs*punkt und XII als den *End*punkt der Stabstrecke VI XII, die *vor* der Bewegung die Länge l_{16} und *nach* der Bewegung die Länge $l_{16} + \delta_{16}$ hat. Bezeichnen $x_{16} = -4$ m, $y_{16} = +10$ m, $z_{16} = -6$ m die Projektionen der Stabstrecke VI XII auf die Koordinatenachsen *vor* der Bewegung, so hat die Schubgeschwindigkeit des dehnbaren Stabes 16 im *Anfangspunkte* VI die Größe

$$\frac{1}{l_{16}} (x_{16} \xi_6 + y_{16} \eta_6 + z_{16} \zeta_6) = \frac{1}{l_{16}} (-4 \xi_6 + 10 \eta_6 - 6 \zeta_6) \qquad (74)$$

und im *Endpunkte* XII

$$\frac{1}{l_{16}} (x_{16} \xi_{12} + y_{16} \eta_{12} + z_{16} \zeta_{12}) = \frac{1}{l_{16}} (-4 \xi_{12} + 10 \eta_{12} - 6 \zeta_{12}). \qquad (75)$$

Die Schubgeschwindigkeit des *End*punktes setzt sich algebraisch zusammen aus der Schubgeschwindigkeit des *Anfangs*punktes und der Dehnungsgeschwindigkeit δ_{16} der Stabstrecke. Zwischen den Geschwindigkeiten der beiden Knoten VI und XII, die durch den Stab 16 verbunden sind, besteht daher die Bedingung:

$$x_{16} \xi_{12} + y_{16} \eta_{12} + z_{16} \zeta_{12} = x_{16} \xi_6 + y_{16} \eta_6 + z_{16} \zeta_6 + l_{16} \delta_{16}. \qquad (76)$$

Indem für jeden der $3k$ Stäbe des Fachwerks diese Bedingung gebildet wird, entstehen $3k$ Gleichungen zur Bestimmung der $3k$ Geschwindigkeiten oder Verschiebungen der k Knoten.

Die Auflösung der Gleichungen. Der Rechnungsgang bei Auflösung dieser Gleichungen ist ganz ähnlich dem im Abschnitt 6 beschriebenen Rechnungsgange zur Bestimmung der Stabkräfte; daher werden die folgenden Angaben genügen. Man zerlegt die Geschwindigkeiten in *zwei* Gruppen und wählt die k_1 Geschwindigkeiten der *ersten* Gruppe in möglichst geringer Anzahl so aus, daß bei geeigneter Reihenfolge die Geschwindigkeiten eines jeden Knotens durch je *drei* Bedingungen als Funktionen der Geschwindigkeiten der ersten Gruppe dargestellt werden können. Hierzu sind $(3k - k_1)$ Gleichungen erforderlich. Es bleiben also k_1 Gleichungen übrig zur Bestimmung der k_1 Geschwindigkeiten der *ersten* Gruppe. Eine einfache Ueberlegung läßt erkennen, daß im vorliegenden Beispiel nur *zwei* Geschwindigkeiten, z. B. ξ_3 und ξ_6 in die *erste* Gruppe zu stellen sind. Mit Benutzung dieser beiden Größen bestimmt man:

Die Geschwindigkeiten des Knotens	durch die Bedingungen für die Stäbe
III	25, 29
VI	27, 35
IV	17, 21, 31
V	19, 23, 33
II	9, 11, 13
I	1, 5, 7
VII	15, 28, 36
VIII	20, 24, 34
XI	3, 10, 12
XII	2, 4, 16
IX	8, 22, 32
X	6, 26, 30.

Die Bedingungen für die beiden Stäbe 14 und 18 bleiben übrig, um die beiden Geschwindigkeiten der ersten Gruppe ξ_3 und ξ_6 zu bestimmen, deren Werte darauf in die anderen Gleichungen einzusetzen sind.

11. Literarische Notizen. Der Inhalt der vorstehenden Abhandlung wurde entnommen den *Beiträgen zur Theorie des Raumfachwerks*, Zentralblatt der Bauverwaltung 1902, S. 205 und 634.

Mit der Berechnung einfacher Raumfachwerke beschäftigten sich:

Schwedler, Zeitschrift für Bauwesen 1866.

Henneberg, *Die Statik starrer Systeme*, Darmstadt 1886.

Hacker, Zeitschrift für Bauwesen 1888; Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1888 und 1890.

Föppl, Schweizerische Bauzeitung 1888 und 1891; Zivilingenieur 1891; *Das Fachwerk im Raume*, Leipzig 1892; *Graphische Statik*, Leipzig 1900; Zentralblatt der Bauverwaltung 1901.

W. Ritter, *Das Fachwerk*, Zürich 1890.

Müller-Breslau, Zentralblatt der Bauverwaltung 1891, 1892, 1902. Die in diesen Schriften erhobenen Prioritätsansprüche wurden gewürdigt im Zentralblatt der Bauverwaltung 1902, S. 634 und 1903, S. 237, 377, 402, 641.

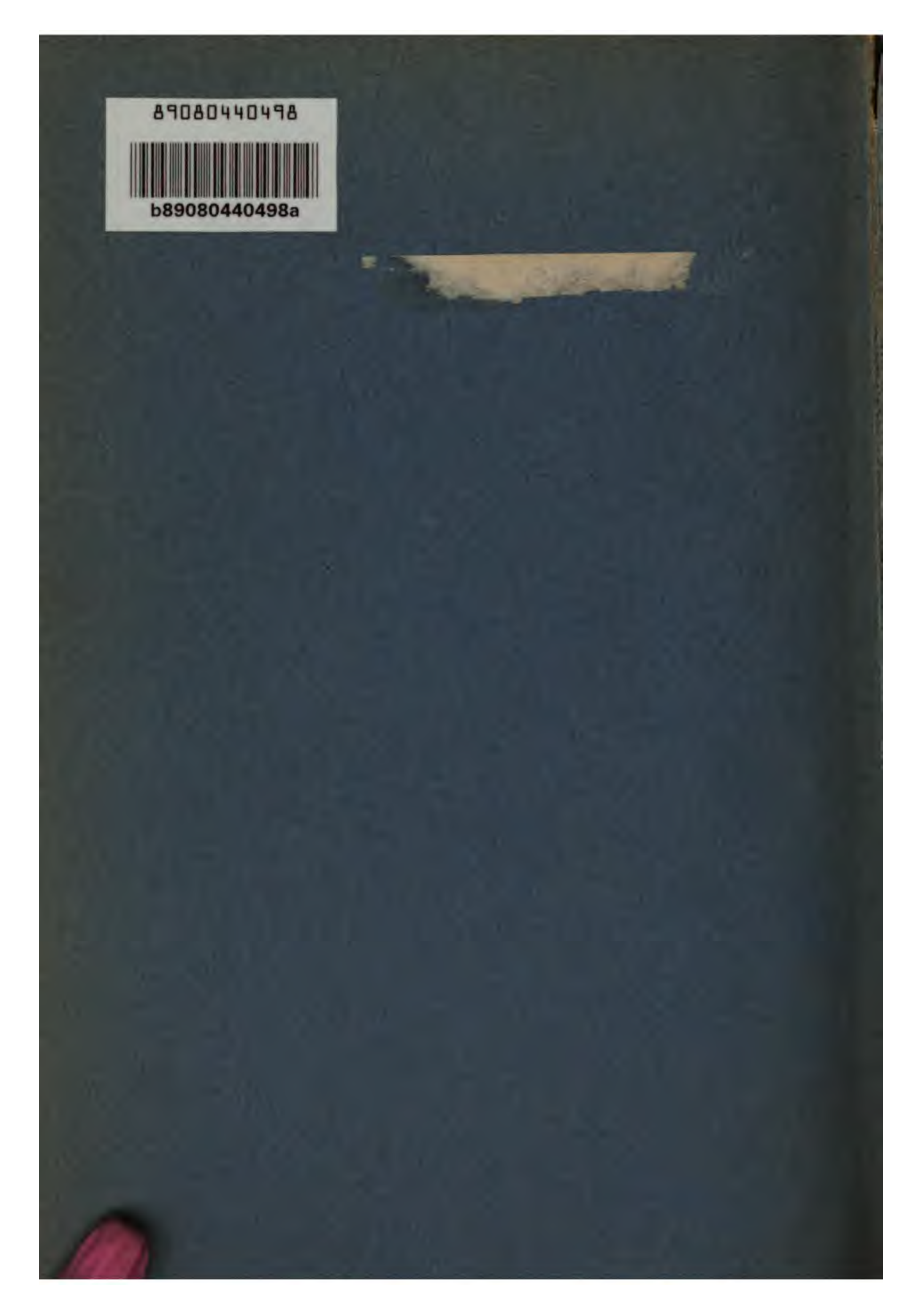
Dietz, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1893.

Landsberg, Zentralblatt der Bauverwaltung 1898 und 1903.

Zimmermann, *Ueber Raumfachwerke*, Berlin 1901.

Mehrtens, *Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen*, Bd. I, Leipzig 1903.

Weitere Angaben finden sich bei *Henneberg*, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, IV, 5: *Die graphische Statik der starren Körper*.


89080440498
b89080440498a